Complementi di Analisi Matematica II

Rubens Longhi
Eugenio Mauri

20 dicembre 2016

Avvertenza

Le presenti dispense sono ispirate all'omonimo corso tenuto dal Prof. Pierluigi Colli nel Dipartimento di Fisica dell'Università di Pavia. Si avverte tuttavia che le dispense non sono state controllate dal docente e non sono presenti tutte le spiegazioni e gli esempi fatti in classe, si invita quindi a segnalare i possibili errori e le mancanze agli indirizzi `rubenslonghi@gmail.com` o `eugeniomau96@gmail.com`

Indice

Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

Indichiamo con $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'insieme di tutte le funzioni da un generico intervallo I ai numeri reali. Definiamo una successione di funzioni, che indichiamo con $\{f_n\}$, un'applicazione dai numeri naturali $\mathbb{N}$ all'insieme delle funzioni $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Definiamo invece una serie di funzioni come successione delle ridotte e la indichiamo, anche se attraverso un abuso di notazioni, con $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

1.1 Convergenza puntuale

Iniziamo con la prima definizione di convergenza per successione di funzioni e relative proprietà.

1.1.1 Definizione (**Convergenza puntuale**). *Una successione di funzioni $\{f_n\}$, tali che $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per ogni n, converge puntualmente ad $f : I \subseteq A \to \mathbb{R}$ se $\forall x \in I$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

cioè se $\forall x \in I$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq m$ si ha che $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

In modo analogo una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, tali che $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per ogni n, converge puntualmente in $I \subseteq A$ se la successione delle ridotte

$$\{s_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_k \right\}$$

converge puntualmente in I. Inoltre l'insieme I è detto insieme di convergenza.

□

1.1.2 Esempio. Diamo ora un semplice esempio di una successione di funzioni che converge puntualmente. Definiamo:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } n \leq x < n+1 \\ 0 \text{ altrove} \end{cases} \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

Dimostriamo che converge alla funzione identicamente nulla. Fissiamo Dunque un qualsiasi punto $x \in \mathbb{R}$ e andiamo a valutare la successione $\{f_n(x)\}$. Essa vale zero sempre tranne quando n è uguale alla parte intera di x. Quindi è proprio la parte intera di x l'indice che cercavamo per provare la convergenza puntuale. □

1.1.3 Esempio. Un altro esempio interessante di convergenza puntuale su in intervallo è dato dalla seguente successione:

$$g_n(x) = x^n, \; x \in \mathbb{R}$$

Andando a studiare il comportamento della successione numerica $\{g_n(x)\}$ per x fissato vediamo che:

$$g_n(x) \to \begin{cases} +\infty \text{ se } x > 1 \\ 1 \text{ se } x = 1 \\ 0 \text{ se } -1 < x < 1 \\ \text{oscilla se } x = -1 \\ \text{diverge in modulo se } x < -1 \end{cases} \qquad \text{per } n \to \infty$$

Se ci restringiamo all'intervallo $(-1, 1]$ abbiamo che la successione converge puntualmente alla funzione g della forma:

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 1 \\ 0 \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases} \quad , \; x \in (-1, 1]$$

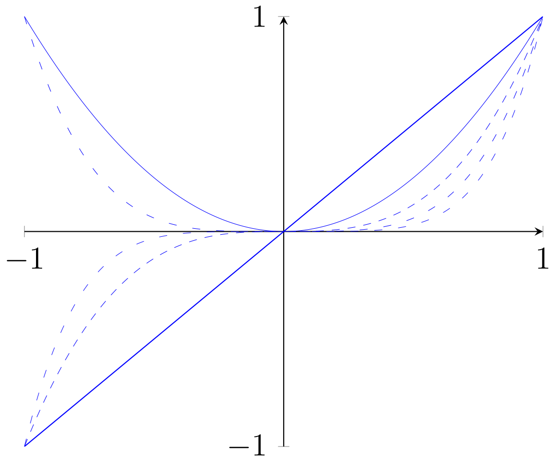


Figura 1.1: grafici delle funzioni g_n

□

Domandiamoci ora quali proprietà assunte dalle $\{f_n\}$ si conservano con il passaggio al limite puntuale.

1.1.4 Proposizione. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite da un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ai reali. Supponiamo che siano tutte non decrescenti, cioè per valga la seguente implicazione:*

$$x \le y \;\Rightarrow\; f_n(x) \le f_n(y) \quad \forall n$$

e che converge a $f : I \subseteq A \to \mathbb{R}$. Allora anche f è non decrescente. □

Dimostrazione. Prendiamo x e y appartenenti a I tali che $x \le y$. Per come abbiamo definito la successione si ha per ogni n che $f_n(x) \le f_n(y)$. Passando al limite, che come sappiamo conserva le disuguaglianze larghe, abbiamo la tesi:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \le \lim_{n\to\infty} f_n(y) \;\text{ e quindi }\; f(x) \le f(y)$$

□

N.B. il risultato è falso se al posto della monotonia larga si pretende la monotonia stretta.

1.1.5 Esempio.

$$f_n(x) = \frac{x}{n},\; x \in \mathbb{R} \quad \text{che converge puntualmente a} \quad f \equiv 0$$

Tutte le f_n sono strettamente crescenti, ma il limite è una funzione costante. Notiamo in particolare che i rispettivi grafici di queste funzioni (Figura 1.2) sono tutte rette centrate nell'origine il cui coefficiente angolare diventa sempre più piccolo.

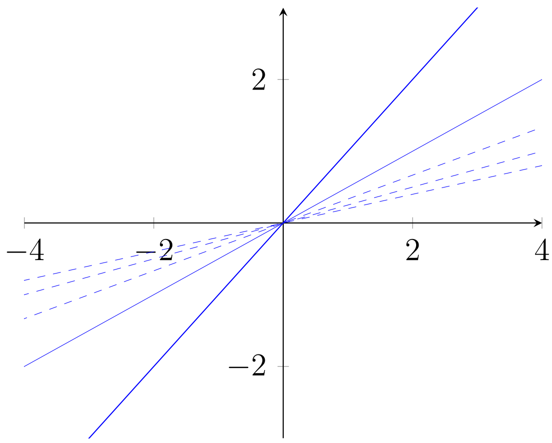


Figura 1.2: grafici delle funzioni f_n

□

1.2 Convergenza uniforme

Proprietà come la continuità o la differenziabilità richiedono ipotesi più forti della sola convergenza puntuale.

1.2.1 Definizione (Convergenza uniforme). *Una successione di funzioni* $\{f_n\}$, *tali che* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *per ogni* n, *converge uniformemente ad* $f : I \subseteq A \to \mathbb{R}$ *se vale che*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geq m \text{ e } \forall\, x \in I \text{ si ha } \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

In maniera equivalente $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *in* I *se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Invece una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, *tali che* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *per ogni* n, *converge uniformemente in* $I \subseteq A$ *se la successione*

$$\{s_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_k \right\}$$

converge uniformemente in I.

1.2.2 Esempio. Un esempio alquanto banale di convergenza uniforme lo troviamo nella seguente successione:

$$f_n(x) = \frac{1}{n},\ x \in \mathbb{R}$$

Che sono tutte funzioni costanti il cui valore tende progressivamente a zero. Se fissiamo ε positivo e prendiamo un indice m tale che l'inverso sia minore di ε si vede subito che per ogni $n \geq m$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo che $|f_n(x)| \leq \varepsilon$. □

Notiamo che graficamente la convergenza uniforme equivale a dire che da un certo indice in poi tutti i grafici delle funzioni sono contenuti all'interno di una *"striscia"* centrata nel grafico della funzione limite f e di spessore ε.

1.2.3 Esempio. Un caso più interessante di convergenza uniforme è quello dato dalla successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n},\ x \in [-1, 1]$$

che è simile alla successione di uno degli esempi precedenti se non per il coefficiente n al denominatore. Ma il ruolo di quel denominatore è fondamentale. Infatti la successione delle funzioni x^n non converge uniformemente alla funzione nulla in $(-1, 1)$ perché se prendiamo un valore di ε abbastanza piccolo e tracciamo la *striscia* di cui abbiamo scritto sopra vediamo che per valori prossimo a 1 e -1 il grafico della funzione *schizza* fuori dalla nostra regione d'interesse di spessore ε, dato che $|(\pm 1)^n| = 1$ per ogni n (si veda la Figura 1.3).

Invece quel denominatore che noi abbiamo messo fa sì che in prossimità di uno le funzioni non 'schizzano' verso uno, ma il valore a cui tendono diminuisce con l'aumentare di n. In particolare con ε fissato se prendo m intero tale che $1/m \leq \varepsilon$ abbiamo l'indice che cercavamo per la convergenza uniforme (Figura 1.4).

□

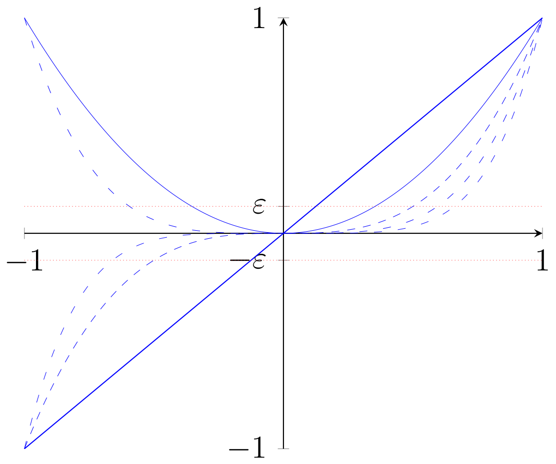


Figura 1.3: $f_n(x) = x^n$. Tutti i grafici 'schizzano' fuori dalla 'striscia'

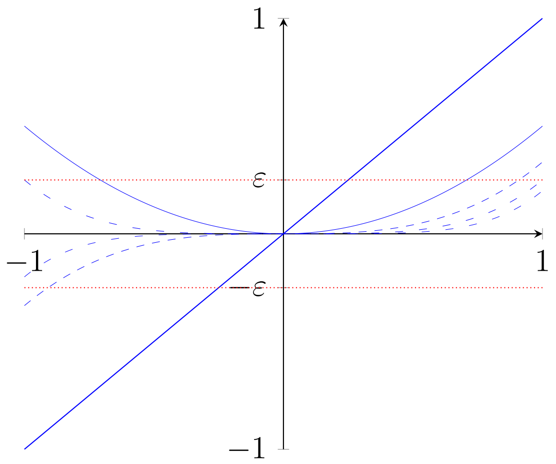


Figura 1.4: $f_n(x) = x^n/n$. Per indici n abbastanza elevati il grafico delle funzioni sono tutte contenute nella 'striscia' di spessore ε

1.2.4 Teorema (Continuità). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni che converge uniformemente a f in un intervallo I. Sia $x_0 \in I$ e le f_n siano continue in x_0 $\forall n$. Allora anche f è continua in x_0. Inoltre se tutte le funzioni di $\{f_n\}$ sono continue in I, allora anche f è continua in I.* □

Dimostrazione. La tesi è che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| \leq \delta$, allora $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Fisso quindi $\varepsilon > 0$ e trovo m tale che per ogni $n \geq m$ e per ogni $x \in I$ si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Poi uso la continuità della funzione f_m e trovo $\delta > 0$ tale per cui se fisso un $x \in I$ che dista da x_0 meno di δ, allora avrò $|f_m(x) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon$. Quindi con questa scelta di x e δ otteniamo usando le disuguaglianze triangolari la seguente disuguaglianza:

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f_m(x_0)|+|f_m(x_0)-f(x_0)| \leq \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$$

dove $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ e $|f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ sono vere per la convergenza uniforme della successione $\{f_n\}$ in I, mentre $|f_m(x) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon$ per la continuità delle funzioni della successione. □

1.2.5 Esempio. Mostriamo con un esempio che la semplice convergenza puntuale non conserva la continuità. Consideriamo la seguente successione:

$$f_n(x) = \arctan(nx), \ \ x \in \mathbb{R}$$

Se fissiamo x vediamo che la successione numerica $\arctan(nx)$ converge a $\pi/2$ per x positivo, $-\pi/2$ per x negativo e a zero per $x = 0$. Vediamo subito che la funzione limite f non è continua, ma presenta un salto in zero (Figura 1.5).

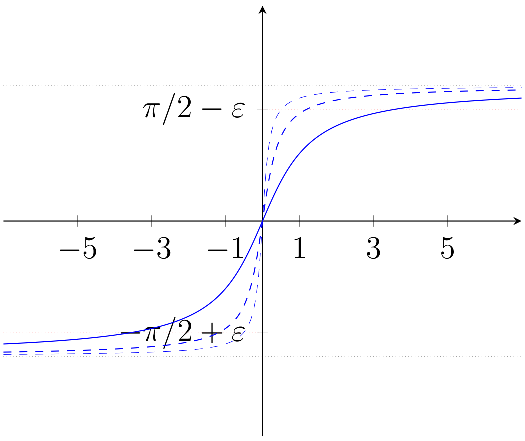


Figura 1.5: $f_n(x) = \arctan nx$. La successione di funzioni continue converge (solo) puntualmente, non conserva la continuità

□

1.2.6 Teorema. *Se la successione $\{f_n\}$ di funzioni continue definite in un intervallo $[a, b]$ converge uniformemente ad f in $[a, b]$ allora f è integrabile e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Per le serie di funzioni, nelle stesse condizioni, vale che la somma della serie è integrabile ed è verificata la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

□

Dimostrazione. Dato che le funzioni f_n sono continue su un intervallo chiuso e limitato sono anche integrabili e visto che persino la funzione limite f è continua, anch'essa è integrabile. Dobbiamo quindi dimostrare solamente la prima delle formule enunciate. Andiamo perciò a valutare il modulo della differenza fra l'integrale di una funzione della successione con quello della funzione limite:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

1.2.7 Esempio. Vediamo un paio di esempi a riprova che la convergenza solo puntuale non conserva l'integrabilità o il valore dell'integrale. Si considerino le due successioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ se } 0 \leq x \leq 1/n \\ 1/x \text{ se } 1/n < x \leq 1 \end{cases} \quad , \ x \in [0,1]$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x \text{ se } 0 \leq x < 1/2n \\ -2n^2 x + 2n \text{ se } 1/2n \leq x < 1/n \\ 0 \text{ se } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \quad , \ x \in [0,1]$$

Scritte così non ci dicono molto, ma se andiamo a rappresentarle graficamente comprendiamo molto meglio il loro comportamento (Figura 1.6 e 1.7). Vediamo infatti che la successione $\{g_n\}$ converge alla funzione identicamente nulla, mentre la successione $\{f_n\}$ alla funzione limite f definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x \text{ se } x \in (0,1] \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

E' immediato osservare che la funzione f non è integrabile in quanto illimitata, mentre la funzione limite della $\{g_n\}$ è integrabile, ma il suo integrale non corrisponde al limite della successione degli integrali delle g_n. Dal disegno vediamo che i grafici di queste funzioni corrispondono a triangoli isosceli di area costante uguale a 1/2 con la base che diventa sempre più piccola, mentre l'altezza cresce di conseguenza all'aumentare dell'indice n.

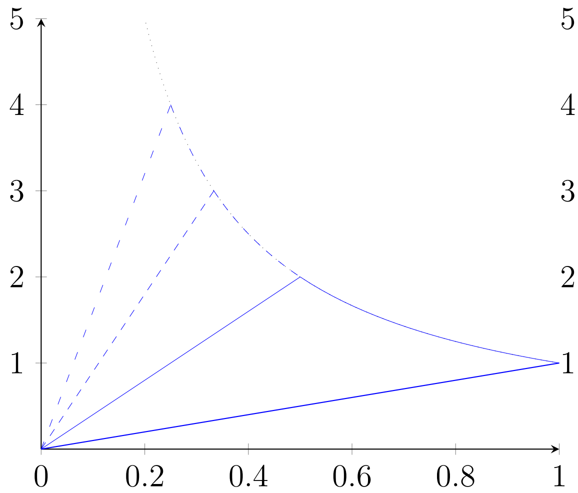


Figura 1.6: grafici delle funzioni f_n.

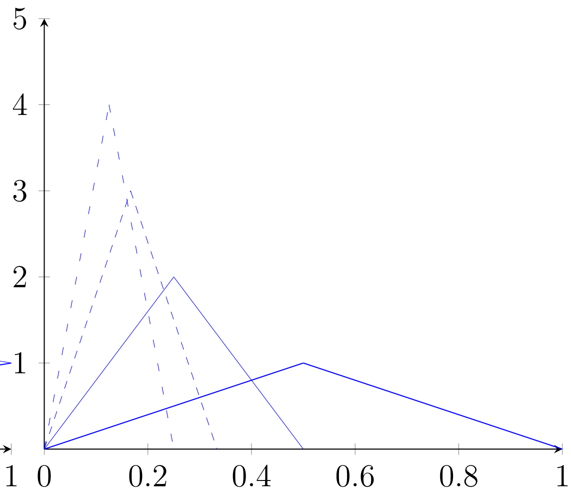


Figura 1.7: grafici delle funzioni g_n

□

1.2.8 Teorema (Differenziabilità). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di classe C^1 in un intervallo I limitato. Sia verificato che:*

- *$\exists\, x_0 \in I$ tale che la successione numerica $\{f_n(x_0)\}$ converga a un certo numero reale l.*
- *la successione delle derivate $\{f_n'\}$ converge uniformemente ad una certa funzione g in I.*

Allora $\{f_n\}$ converge uniformemente a un'unica funzione f, di classe C^1 in I e tale che $g = f'$. □

Dimostrazione. Dal teorema fondamentale del calcolo applicato alle f_n possiamo scrivere

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \quad \forall\, x \in I$$

Passando al limite abbiamo che $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$ e che, sulla base del teorema precedente:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

Possiamo quindi definire una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ del tipo:

$$f(x) := l + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Allora notiamo subito che $f_n \to f$ puntualmente. Ma g è continua perché limite uniforme di funzioni continue, quindi f è di classe C^1 e si ha $f' = g$. Non resta che provare la convergenza uniforme. Consideriamo quindi il seguente modulo:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt - l - \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq |f_n(x_0) - l| + \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))\, dt \right| \leq |f_n(x_0) - l| + |x - x_0| \sup_{t\in I} |f_n'(t) - g(t)| \leq$$

$$\leq |f_n(x_0) - l| + |b - a| \sup_{t\in I} |f_n'(t) - g(t)|.$$

Prendendo il limite di entrambi i membri (e ricordandosi che $\sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - g(t)| \to 0$ per la convergenza uniforme delle f_n') si ottiene che $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ per n che tende a infinito indipendentemente dalla scelta di x. Quindi $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. □

1.2.9 Osservazione. Il teorema vale anche per intervalli non limitati, se alla tesi della convergenza uniforme delle f_n a f sostituiamo la convergenza puntuale. □

1.2.10 Esempio. Dimostriamo con un controesempio che la sola differenziabilità delle funzioni di una successione non basta a far sì he la funzione limite sia essa stessa differenziabile. Sia prenda perciò le seguente successione:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \; x \in \mathbb{R}$$

che sono tutte differenziabili (addirittura C^1) e si dimostra che essa converge uniformemente alla funzione $x \longmapsto |x|$ che però non è differenziabile (Figura 1.8). In particolare si nota che, guardando il teorema di differenziabilità, l'ipotesi che la nostra successione non rispetta è la convergenza uniforme delle derivate. Facendo i conti si vede che:

$$f_n'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + 1/n}}, \ x \in \mathbb{R}$$

che converge alla funzione discontinua $x \longmapsto sign(x)$ e quindi, per forza, non in modo uniforme.

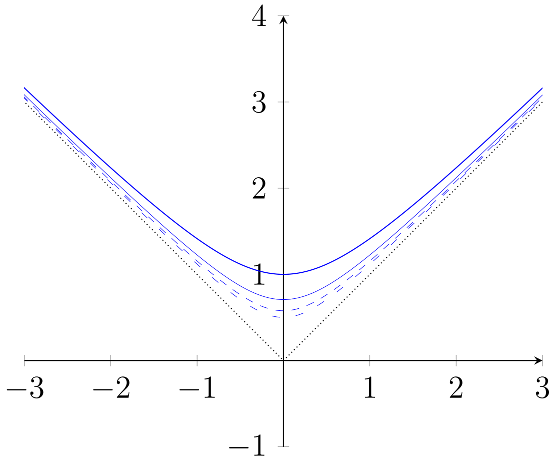


Figura 1.8: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$. La successione di funzioni differenziabili che converge uniformemente a una funzione non differenziabile

□

1.2.11 Teorema (Criterio di Cauchy per successioni e serie di funzioni). *Una successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in I se e solo se:*

$$\forall\ x \in I \ e \ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ m : \ \forall n', n'' \geq m \ si \ ha \ |f_{n'}(x) - f_{n''}(x)| \leq \varepsilon$$

Una successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in I se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m : \ \forall n', n'' \geq m \text{ e } \forall x \in I \ si \ ha \ |f_{n'}(x) - f_{n''}(x)| \leq \varepsilon$$

Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in I se e solo se:

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists m : \ \forall n', n'' \geq m \ si \ ha \ \left| \sum_{k=n'}^{n''} f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in I se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m : \ \forall n', n'' \geq m \text{ e } \forall x \in I \ si \ ha \ \left| \sum_{k=n'}^{n''} f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

□

Dimostrazione La dimostrazione della prima parte è identica a quella per le successioni numeriche. Basta infatti fare gli stessi ragionamenti per ogni $x \in I$. E' invece più interessante la dimostrazione della seconda, mentre le ultime due tesi riguardo alle serie si possono ricavare facilmente a partire dalle prime due. Dimostriamo quindi il criterio di Cauchy per successioni uniformemente convergenti. Supponiamo $\{f_n\}$ convergente in modo uniforme e vediamo che rispetta l'ipotesi di Cauchy. Abbiamo che:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbb{N} : \forall\ n' \geq m \text{ e } \forall\ x \in I \text{ si ha } |f_{n'}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Se prendo un altro indice $n'' \geq m$ ottengo:

$$|f_{n'}(x) - f_{n''}(x)| \leq |f_{n'}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n''}(x)| \leq 2\varepsilon$$

che è la prima parte della tesi. Dimostriamo ora che se la successione rispetta l'ipotesi di Cauchy, allora converge uniformemente. Per ogni $x \in I$ fissato la successione numerica $f_n(x)$ è di Cauchy e quindi converge. possiamo definire perciò una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ che associa a $x \in I$ il valore $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Controlliamo che la successione converga a f. Fissato ε abbiamo che :

$$f_{n''}(x) - \varepsilon \leq f_{n'}(x) \leq f_{n''} + \varepsilon,\ \forall\ x \in I$$

per ogni coppia di indici n' e n'' maggiori di un certo indice m. Da questa relazione posso passare al limite per n'' che tende a infinito dal quale ottengo:

$$f(x) - \varepsilon \leq f_{n'}(x) \leq f(x) + \varepsilon\ ,\ \forall\ x \in I,\ \forall\ n' \geq m$$

che corrisponde alla nostra tesi. □

1.3 Convergenza totale

1.3.1 Definizione (Convergenza totale e assoluta). *Si dice che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente in un intervallo I se esiste una successione $\{M_n\}$ reale tale che*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in I$$

$$\text{ed inoltre la serie } \sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ converge.}$$

Si dice che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$converge assolutamente in un intervallo I se la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \text{ converge } \forall x \in I.$$

□

N.B. banalmente, se una serie di funzioni converge assolutamente, allora converge anche puntualmente per il criterio della convergenza assoluta.

1.3.2 Teorema (Criterio di Weierstrass). *Se una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente in I, allora essa converge uniformemente in I.* □

Dimostrazione. La convergenza assoluta, e quindi quella puntuale, è banale per il criterio del confronto e quello di convergenza assoluta, dato che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge. La tesi diventa è quindi la seguente:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m :\ \forall\, n' \geq m\ ,\ \forall\, n'' \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in I \text{ si ha } \left| \sum_{k=n'}^{n'+n''} f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Che non è altro che una riscrittura equivalente della condizione di Cauchy. Fisso quindi $\varepsilon > 0$ e considero:

$$\left| \sum_{k=n'}^{n'+n''} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n'}^{n'+n''} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n'}^{n'+n''} M_k.$$

Basta quindi dimostrare che $\sum_{k=n'}^{n''} M_k \leq \varepsilon$. Uso il Teorema del criterio di Cauchy sulla serie $\sum_{k=n'}^{n'+n''} M_k$ e trovo in corrispondenza di ε un m^* tale che $\forall n' \geq m^*$ e per ogni $n'' \in \mathbb{N}$ vale che:

$$\left| \sum_{k=n'}^{n'+n''} M_k \right| \leq \varepsilon$$

Quindi con la scelta $m = m^*$ la tesi è dimostrata, dato che la condizione di Cauchy per una serie implica la sua convergenza uniforme. □

1.3.3 Esempio. Consideriamo la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Essa converge totalmente. Infatti si ha che:

$$\left| \frac{\sin(nx)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \text{ e la serie } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ converge}$$

Un altro esempio interessante è la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

che sappiamo non convergere per x non appartenenti a $(-1, 1)$, mentre all'interno di questo intervallo la serie converge puntualmente. lo stesso non possiamo dire per la convergenza assoluta in quanto l'unica maggiorazione che possiamo fare per ogni $x \in (-1, 1)$ è $|x^n| < 1$ e sappiamo che la serie associata alla successione costantemente 1 non converge. Le cose cambiano se facciamo variare x nell'intervallo $[-r, r]$ con $0 < r < 1$. In questo caso abbiamo la convergenza uniforme dato che $|x^n| < r^n$ per ogni $x \in [-r, r]$ e la serie che ha come termine generale r^n converge. □

1.4 Serie di Potenze

1.4.1 Definizione (Serie di potenze). *Sia $\{a_n\}$ una successione reale e $x_0 \in \mathbb{R}$. La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

è detta serie di potenze *di centro x_0 e di coefficienti $\{a_n\}$.* □

1.4.2 Teorema. *Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, se essa converge nel valore $x = \xi \neq x_0$, allora la serie converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $I = (x_0 - |\xi - x_0|, x_0 + |\xi - x_0|)$. (Di conseguenza la serie converge assolutamente $\forall x \in I$).* □

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $x_0 = 0$, cioè in caso in cui la serie è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La tesi è quindi che vi sia la convergenza totale in ogni $[a, b] \subseteq (-|\xi|, |\xi|)$.
Dalla convergenza in $x = \xi$ della serie sappiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0$ e che quindi la successione $\{a_n\xi^n\}$ è limitata, cioè $\exists M > 0$ tale che $|a_n\xi^n| \leq M \; \forall n$.
Sia ora $0 < \lambda < |\xi|$ e provo la convergenza totale nell'intervallo $[-\lambda, \lambda]$. Cerco quindi $\sup_{-\lambda<x<\lambda} |a_n x^n|$:

$$|a_n x^n| = |a_n\xi^n \frac{x^n}{\xi^n}| = |a_n\xi^n||\frac{x^n}{\xi^n}| \leq M|\frac{x^n}{\xi^n}| \leq M\frac{\lambda^n}{|\xi|^n}$$

$$\text{allora} \sup_{-\lambda<x<\lambda} |a_n x^n| \leq M\frac{\lambda^n}{|\xi|^n}$$

Osserviamo che $\frac{\lambda}{|\xi|} < 1$ perchè $0 < \lambda < |\xi|$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} M\frac{\lambda^n}{|\xi|^n}$ converge. Allora la serie è nelle condizioni per la convergenza totale in $[-\lambda, \lambda]$ e, data l'arbitrarietà di λ, abbiamo la tesi. Per quanto riguarda la convergenza uniforme (e quella assoluta) è banale applicare il teorema 1.3.2 (Criterio di Weierstrass). □

1.4.3 Teorema (Raggio di convergenza). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze. Allora esiste ed è unico $\rho \in [0, +\infty]$ tale che*

- *la serie di potenze converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x - x_0| < \rho$*
- *la serie di potenze non converge in $x \in \mathbb{R}$ se $|x - x_0| > \rho$*

Il valore ρ in queste condizioni è detto raggio di convergenza della serie □.

Dimostrazione. Considero il caso $x_0 = 0$. Introduco

$$\rho = \sup\left\{x \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\right\}$$

notando che l'insieme di cui ho preso l'estremo superiore contiene almeno un elemento, dato che la serie converge almeno in $x = 0$.
Sia quindi $\rho > 0$. Dimostriamo che, fissato un qualsiasi x tale che $|x| < \rho$, la serie

numerica $\sum a_n x^n$ converge per il teorema precedente.
Per le proprietà del sup, essendo $|x| < \rho$ troviamo $z \geq 0$ tale che $|x| < z < \rho$ e $\sum a_n z^n$ converge (per la definizione di ρ). Applico il teorema precedente e trovo che $\sum a_n y^n$ converge $\forall y \in (-z, +z)$ e quindi anche nell'x fissato prima.

La seconda tesi è insensata se $\rho = +\infty$, perciò consideriamo $\rho < +\infty$ e fissiamo un qualsiasi $x : |x| > \rho$. Se per assurdo $\sum a_n x^n$ convergesse allora esisterebbe z tale che $\rho < z < |x|$ e $\sum a_n z^n$ converga. Ciò contraddirebbe la definizione di ρ.
Per quanto riguarda l'unicità supponiamo per assurdo che esistano ρ_1 e ρ_2 finiti nelle condizioni del raggio di convergenza. Allora consideriamo

$$x_0 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

In questo punto la serie dovrebbe contemporaneamente convergere e divergere, il che porta ad un assurdo. (In maniera analoga si tratta il caso in cui uno dei due raggi è infinito). $\square$

1.4.4 Esempio. Consideriamo la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}$$

Per ogni x fissato quella che si ottiene è la serie esponenziale che conosciamo bene e che sappiamo convergere al valore e^{x-x_0}. Dunque il raggio di convergenza ρ in questo caso è più infinito. Vediamo ora un altro caso di serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ x \in \mathbb{R}$$

Anche questa la conosciamo bene dato che si tratta della serie geometrica che sappiamo convergere a $1/(1-x)$ per ogni x con $|x| < 1$, mentre non converge per tutti gli altri x. Prendiamo ora un ultimo esempio in cui si ha convergenza anche per almeno un punto x che dista esattamente ρ dal centro della serie, che è il seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \ x \in \mathbb{R}$$

Nel caso in cui $|x| < 1$ o $|x| > 1$ il comportamento della serie è lo stesso del caso precedente. Se $x = 1$ la serie si trasforma nella serie armonica che sappiamo non convergere, mentre nel caso $x = -1$ sappiamo che la serie numerica che ne deriva converge per il criterio di Leibniz. Abbiamo quindi provato che per $|x - x_0| = \rho$ il comportamento della serie può di qualsiasi tipo (si possono trovare anche esempi in cui per entrambi i punti che distano ρ dal centro la serie converge). $\square$

1.4.5 Proposizione (Calcolo del raggio di convergenza). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ una serie di potenze e ρ il suo raggio di convergenza. Allora*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

con la convenzione che $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$. $\square$.

***Dimostrazione.** Non daremo la dimostrazione completa di questa proposizione, ma proveremo la tesi nell'ipotesi aggiuntiva che le successioni $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ e $\{|a_{n+1}/a_n|\}$ convergano. Per la prima tesi uso il criterio della radice sulla successione dei moduli. Esso ci dice che il limite della radice deve essere minore di 1:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|x-x_0|^{n/n} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|x-x_0| < 1$$

da cui

$$|x-x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Analogamente per il criterio del rapporto. $\square$

1.4.6 Esempio. Consideriamo tre serie di potenze definite dalle seguenti successioni di coefficienti:

$$a_n = 1,\ a_n' = \frac{1}{n^2},\ a_n'' = \frac{1}{n!}$$

Andiamo a calcolare il raggio di convergenza ρ delle suddette serie.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n'|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(2/n)\ln n}} = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}''|}{|a_n''|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \rho = +\infty$$

Può sembrare che calcolare il limite superiore del rapporto $|a_{n+1}/a_n|$ sembra molto più semplice e sensato rispetto a usare il criterio della radice, ma questo non è vero sempre. Prendiamo la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n,\ \text{dove } b_n = 0 \text{ se n è pari e } b_n = n^n \text{ se n è dispari}$$

Vediamo subito che $\sqrt[n]{|b_n|} = 0$ se n è pari, mentre vale n altrimenti. Da qui consegue che $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = +\infty$ e quindi $\rho = 0$. $\square$

1.4.7 Teorema (Teoremone sulle serie di potenze). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze, $\rho > 0$ il suo raggio di convergenza e la funzione $f : (x_0-\rho, x_0+\rho) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ la funzione somma. Allora*

1. *la serie di potenze converge totalmente in ogni intervallo $[x_0-r, x_0+r]$ $\forall r \in (0,\rho)$*
2. *la funzione f è continua nell'intervallo aperto $(x_0-\rho, x_0+\rho)$*

3. *la funzione f è differenziabile in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ e la derivata f' è tale che*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

   ed è anch'essa una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza

4. *la funzione f è di classe C^∞ in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ ed una qualunque derivata k-esima coincide con la serie delle derivate k-esime in ogni punto. E' quindi valida*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-x_0)^{n-k}$$

   ed è anch'essa una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza

5. *la funzione f ammette infinite primitive in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ e l'unica primitiva g tale che $g(x_0) = 0$ è data da:*

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

   ed è anch'essa una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza

6. *la funzione f è integrabile in ogni $[a,b] \subset (x_0-\rho, x_0+\rho)$ e vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right]_a^b = g(b) - g(a)$$

□

Dimostrazione.

1. Basta applicare il teorema 1.4.2 scegliendo un qualsiasi $\xi \in (r, \rho)$.

2. Abbiamo che per ogni $r < \rho$ la serie converge totalmente, quindi anche uniformemente, per il Criterio di Weierstrass, in $[x_0-r, x_0+r]$ e la continuità si conserva al limite. Dobbiamo quindi dimostrare che per ogni x dell'intervallo aperto $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ esiste $r < \rho$ tale che $x \in [x_0-r, x_0+r]$. Ciò è possibile per la definizione di aperto.

3. Consideriamo la serie delle derivate (senza supporre preliminarmente nulla sul suo legame con f) e cambiamo la variabile imponendo $n = k+1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k$$

   quindi applico la proposizione 1.4.5 indicando con ρ il raggio di convergenza della serie madre e con ρ' il raggio della serie delle derivate appena scritta:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \rho' = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)|a_n|}}.$$

Dimostriamo che $\rho = \rho'$.

$$\sqrt[k]{(k+1)|a_n|} = (k+1)^{1/k}|a_{k+1}|^{1/k} =$$

$$= e^{\frac{1}{k}\ln(k+1)}\left(|a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^0|a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}} = \sqrt[n]{|a_n|}$$

dove il passaggio al limite è giustificato dal fatto che

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = 1.$$

Detto questo la successione delle derivate converge totalmente in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$ $\forall r < \rho$ per il primo punto, quindi converge anche uniformemente per il criterio di Weierstrass e, dato che per ogni x nell'intervallo aperto esiste $0 < r < \rho$ tale che $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, possiamo applicare il teorema 1.2.8 e dare validità alla formula.

4. Basta reiterare il procedimento descritto al punto 3 k volte. Potendolo fare per ogni k naturale abbiamo la regolarità C^∞.

5. Considero la serie degli integrali e effettuo il cambiamento di variabile $k = n + 1$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k-1}}{k}(x-x_0)^k.$$
Applico la proposizione 1.4.5 nella parte che utilizza il criterio del rapporto e trovo che se indichiamo ρ il raggio di convergenza della serie madre e ρ'' il raggio della serie degli integrali abbiamo $\rho = \rho''$:
$$\frac{1}{\rho''} = \limsup_{k\to\infty}\frac{a_k}{k+1}\frac{k}{a_{k-1}} = \limsup_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\rho}.$$
Inoltre si verifica che la serie degli integrali si annulla in $x = x_0$ e applicandole il punto 3 scopro che è derivabile e la sua derivata coincide con la serie madre, quindi posso definire la primitiva g.

6. una volta trovata la primitiva g basta integrare e si realizza la formula.

□

1.5 Serie di Taylor

In questa sezione ci chiediamo quando sia possibile trovare un intorno di un dato punto x_0 in cui una funzione coincide con una serie di potenze. Partiamo con l'osservare che questo fatto è in generale falso per le funzioni C^∞.

1.5.1 Osservazione. Consideriamo la funzione somma di una generica serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Tale funzione è di classe C^∞ nell'aperto $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Usando il quarto punto del Teoremone sulle serie di potenze possiamo scrivere la derivata k-esima della funzione f:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(n+k)(n+k-1)...(n+1)(x-x_0)^n \text{ da cui } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Il che ricorda un generico coefficiente del polinomio di Taylor relativo alla funzione f. Abbiamo trovato quindi la serie candidata a coincidere con una funzione generica di classe C^∞ che chiameremo *Serie di Taylor*. Vogliamo quindi trovare le ipotesi che permettono di scrivere la seguente formula:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

□

1.5.2 Esempio. Diamo un esempio di una funzione di classe C^∞ la cui corrispettiva serie di Taylor non converge alla funzione. Definiamo quindi la funzione f come:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/|x|) \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \quad , \ x \in \mathbb{R}$$

Al di fuori dell'origine si vede immediatamente che siamo di fronte a una funzione C^∞. Si dimostra, valutando il limite del rapporto incrementale e il limite della derivata a destra e a sinistra, che anche in $x = 0$ la funzione è differenziabile e la derivata è continua (in particolare $f'(0) = 0$). Calcolando le derivate successive si può estendere il ragionamento per qualsiasi indice di derivazione. Possiamo quindi dimostrare che effettivamente f è di classe C^∞ e che $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma dato quest'ultimo punto se scriviamo la serie di Taylor come scritto nell'osservazione precedente otteniamo la funzione nulla e non la nostra f come ci aspettavamo. □

1.5.3 Teorema (Condizione sufficiente per la sviluppabilità). *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ (con a e b non necessariamente finiti) di classe C^∞ tale che esisitono $M, L > 0$ che verificano*

$$|f^{(k)}(x)| \leq ML^k \quad \forall x \in (a,b), \ \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Allora per ogni $x_0 \in (a,b)$ f è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0, cioè

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \forall x \in (a,b)$$

□

Dimostrazione. Essendo f di classe C^∞ scriviamo la formula di Taylor di grado $n-1$ con resto di Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Dobbiamo quindi dimostrare che $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Utilizzando l'ipotesi:

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \right| \leq \frac{ML^n|x - x_0|^n}{(n)!} = M\frac{(L|x - x_0|)^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dove l'ultimo limite è giustificato dal fatto che si tratta del termine generale di una serie convergente (o banalmente perchè vince il fattoriale). □

1.5.4 Esempio. Consideriamo le funzioni $x \longmapsto \sin x$ e $x \longmapsto \cos x$. Tutte le derivate sono continue e limitate dalla costante $M = 1$. Siamo quindi nelle condizione del teorema precedente e possiamo scrivere:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

□

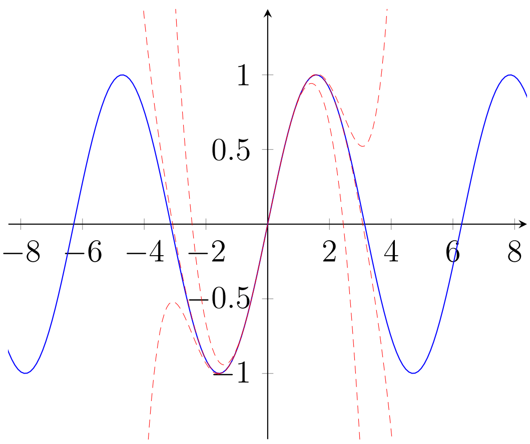


Figura 1.9: grafico della funzione seno (in blu) e la relativa approssimazione tramite polinomio di Taylor (in rosso)

1.5.5 Esempio. Vediamo un esempio di una funzione nota per cui non valgono le ipotesi del Teorema 1.5.3, ma è comunque sviluppabile in serie di Taylor su tutto $\mathbb{R}$. Prendiamo quindi la funzione esponenziale $x \longmapsto \exp x$. Se prendiamo la retta reale non è possibile maggiorare alcuna delle derivate in quanto sono tutte illimitate. Ma se ci limitiamo a un intervallo del tipo $(-r, r)$ con $r \in (0, +\infty)$, allora abbiamo che:

$$\left| \frac{d^k}{dx^k}(e^x) \right| = |e^x| \leq e^r 1^k, \ \forall \ x \in (-r, r)$$

Siamo così nelle ipotesi per applicare il Teorema precedente e dimostrare la sviluppabilità in un intervallo limitato. Ma data l'arbitrarietà di r in $\mathbb{R}$ possiamo estendere il discorso per valori di r sempre più grandi dimostrando così che la funzione esponenziale è sviluppabile su tutto $\mathbb{R}$. □

1.5.6 Proposizione (Calcolo delle derivate). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze, $\rho > 0$ il suo raggio di convergenza (finito o meno) e la funzione $f : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ la funzione somma. Allora f coincide con la sua serie di Taylor e vale che*

$$a_0 = f(x_0), \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \ \textit{quindi} \ f^{(n)}(x_0) = n!a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

□

1.6 Serie di Fourier

1.6.1 Proposizione. *Con $k, m \in \mathbb{N}$ valgono $\forall k, m$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(mx)\,dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \delta_{k,m}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,dx = \delta_{k,m}$$

Dove $\delta_{k,m}$ è la delta di Kronecker che vale 1 se $k = m$ e 0 altrimenti. □

Dimostrazione. Per il primo integrale basta verificare che la funzione integranda è dispari e va calcolato su un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Per gli altri due basta applicare le *formule di Werner*:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

che si dimostrano con le formule di addizione e sottrazione:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Ora basta sostituire e risolvere l'integrale. □

1.6.2 Definizione. *Sia f una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, essa si dice periodica di periodo T se*

$$f(x) = f(x+T).$$

Viene chiamato polinomio trigonometrico una qualsiasi combinazione del tipo :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

dove a_k e b_k vengono chiamati coefficenti del polinomio trigonometrico.
Se $n \to \infty$ il polinomio viene detto serie trigonometrica. □

1.6.3 Teorema (Teorema di Fourier). *Data un funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata, periodica di periodo $T = 2\pi$, integrabile in $[-\pi, \pi]$, tale che f sia sviluppabile in serie*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]\,,\ x \in \mathbb{R}$$

allora

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx.$$

□

Dimostrazione. Vogliamo calcolare il generico coefficiente a_m. Moltiplichiamo entrambi i membri per $\cos(mx)$ e integriamo in dx:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)\, dx + \right.$$

$$\left. + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(mx)\, dx\right]$$

Sappiamo che l'integrale del solo $\cos mx$ davanti al coefficiente a_0 è nullo. Inoltre, utilizzando le formule di Werner, abbiamo che $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)\, dx = \pi$ se e solo se $m = k$ (mentre è 0 negli altri casi) e che $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(mx)\, dx = 0$ sempre. Quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx = \pi a_k$$

da cui la prima tesi. Analogamente moltiplico entrambi i membri per $\sin(mx)$ e integro ottenendo la seconda tesi. Notiamo che il ragionamento va bene anche per il calcolo di a_0 in quanto basta considerare il primo caso con $m = 0$ (o più semplicemente basta integrare direttamente entrambi i membri) e si ha così:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi\,\frac{a_0}{2} = \pi\, a_0$$

possiamo quindi utilizzare la stessa formula degli altri a_k. □

1.6.4 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π sviluppabile in serie di Fourier.*
Se la funzione è pari, *cioè*

$$f(x) = f(-x), \qquad \textit{allora} \qquad b_k = 0,\ \forall k.$$

Se la funzione è dispari, *cioè*

$$f(x) = -f(-x), \qquad \textit{allora} \qquad a_k = 0,\ \forall k.$$

□

Dimostrazione. Chiamiamo f la nostra funzione sviluppabile in serie. Notiamo innanzitutto che il prodotto fra una funzione pari e una dispari è essa stessa dispari (il che si può facilmente controllare). andiamo allora a valutare i coefficienti a_k e b_k della serie di Fourier con le formule scritte nel teorema precedente. Se f è pari, allora la funzione $x \longmapsto f(x)\sin(kx)$ è dispari per ogni k naturale, quindi il suo integrale valutato nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ (e di conseguenza il coefficiente b_k) è nullo. Analogamente si dimostra che $a_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ se f è dispari.

□

1.6.5 Esempio. Prendiamo la funzione f definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x - 2\pi n| \text{ se } x \in [-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n), \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

Rappresentando il grafico di f su un piano cartesiano notiamo che si tratta di una funzione 'a zig zag' di periodo 2π (Figura 1.10). Ipotizziamo che sia sviluppabile in serie di Fourier (il che si potrà facilmente mostrare) e andiamo a calcolarci i coefficienti a_k, dato che $b_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ in quanto f è pari:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0x)dx = \frac{1}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\{\frac{\pi}{k}\sin(kx) - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}dx\} = \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1)$$

Abbiamo quindi $a_k = 0$ per k pari e $a_k = -4/(\pi k^2)$ per k dispari. Possiamo quindi scrivere la serie trigonometrica così:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$$

Se andiamo poi a valutare la funzione nel punto $x = 0$ abbiamo una interessantissima serie numerica convergente:

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

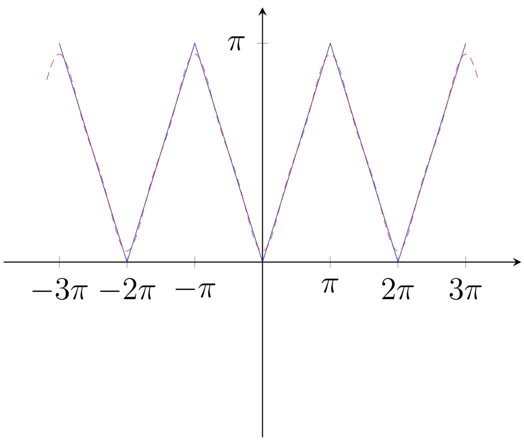


Figura 1.10: grafico di f (in blu) e relativa approssimazione in serie di Fourier (in rosso)

□

1.6.6 Definizione (Regolarità a tratti). *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice regolare a tratti se esistono $\{x_i\}$ in numero finito n tali che valgano le seguenti condizioni:*

- $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$
- *f sia di classe C^1 in (x_i, x_{i+1}) per $i = 0, \ldots, n-1$*
- *la funzione derivata f' sia prolungabile con continuità in $[x_i, x_{i+1}]$ per $i = 0, \ldots, n-1$ (cioè non ci devono essere singolarità della derivata)*

□

1.6.7 Esempio. si prenda la funzione f definita così:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 \text{ se } x \in [0, \pi] \end{cases} \quad , \ x \in [-\pi, \pi]$$

si dimostra facilmente che è regolare a tratti. Infatti in $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$ la funzione e costante, quindi C^1 con derivata estendibile in modo continuo alla chiusura degli intervalli della partizione. Prendiamo ora la funzione g definita come:

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \in [-\pi, 0) \\ \sqrt{x} \text{ se } x \in [0, \pi] \end{cases} \quad , \ x \in [-\pi, \pi]$$

la funzione derivata g' è la seguente:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ se } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

che è illimitata. Quindi non è regolare a tratti in quanto non estendibile con continuità. □

1.6.8 Teorema (della convergenza puntuale della serie di Fourier). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π regolare a tratti. Allora è sviluppabile in serie di Fourier, cioè esiste una serie trigonometrica della forma:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

che converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ al numero:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

□

La dimostrazione di questo teorema rende necessario premettere dei lemmi.

1.6.9 Lemma (1. Disuguaglianza di Bessel). *Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e limitata nel suo dominio e sia s_n il suo polinomio trigonometrico di grado n (definito con i coefficienti del Teorema 1.6.3). Allora valgono:*

$$A)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \left[\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

$$B)\ \text{la serie } \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \text{ converge e si ha:}$$

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

□

Dimostrazione. Svolgendo il quadrato di binomio

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) - 2\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x)}_{\Gamma} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)}_{\Omega}$$

Sviluppando Γ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx) dx + \frac{b_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\right] dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}_{a_0} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

Sviluppando Ω:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]^2 dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0^2}{4} dx + \int_{-\pi}^{\pi}\Big[\overbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\cos^2(kx)}^{=\pi} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\sin^2(kx)}^{=\pi} + \overbrace{\frac{2a_0}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)}^{=0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{2a_0}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k\sin(kx) + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\cos(kx)\sin(kx)}_{=0}\Big] dx\Big]$$

Distribuendo l'integrale sulle somme si ottiene :

$$= \frac{a_0^2}{4}\frac{1}{\pi}2\pi + \frac{\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

Si nota che sviluppando Γ e Ω si ottiene lo stesso risultato ($\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$) quindi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_n(x)|^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx-2\Gamma+\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

Per la seconda tesi si noti che:

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_n(x)|^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx - \left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx$$

Facendo tendere n a infinito abbiamo a sinistra una serie di termini tutti non negativi la cui successione delle ridotte è limitata da una costante non negativa. Quindi la serie converge per il Teorema fondamentale delle successioni monotone e vale la nostra tesi. □

1.6.10 Lemma (2). *Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ limitata ed integrabile, allora:*

1. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0$
2. $\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0 \quad \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0$

□

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Bessel sappiamo che

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

Dato che il secondo membro elemento della disuguaglianza è un numero finito, la serie

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

deve convergere, dunque la successione $(a_k^2 + b_k^2)$ è infinitesima e $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. □

1.6.11 Lemma (3). $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)....+\cos(nx) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})x]}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

□

Dimostrazione. Dalle formule di Werner, ponendo $a = kx$ e $b = \frac{x}{2}$, abbiamo:

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\Rightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(b)\cos(a)$$
$$\Rightarrow \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\cos(kx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = \sum_{k=1}^{n}2\cos(kx)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \to$$
$$\Rightarrow \underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{per k=1} + \underbrace{\sin\left(\frac{5}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3}{2}x\right)}_{per k=2} +$$
$$+ \underbrace{\sin\left(\frac{7}{2}x\right) - \sin\left(\frac{5}{2}x\right)}_{per k=3} ... = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

Semplificando due a due gli elementi uguali con segno opposto, soppravvivono i termini :

$$-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

□

1.6.12 Lemma (4). *$\forall x \in \mathbb{R}$ e per $\forall n \in \mathbb{N}$ vale :*

$$1)\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

$$2)\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

□

Dimostrazione.

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Integrando nell'intervallo $[0,\pi]$ e moltiplicando per $1/\pi$ otteniamo a destra l'integrale di cui vogliamo dimostrare il valore. Adesso sviluppiamo il primo membro della nostra equazione trasformata.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}dx + \int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)dx.$$

Tutti gli integrali del secondo membro dell'equazione che hanno come integrando $\cos(mx)$ sono nulli. Quindi:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}$$

□

1.6.13 Lemma (5). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

1. *f è peridoica di periodo $T = 2\pi$*
2. *f è regolare a tratti*

Allora

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

□

Dimostrazione.

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\cos(ky) + \sin(kx)\sin(ky)\right]dy =$$

(per le formule della somma e sottrazione $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos((y-x)k)\right]dy$$

Ora chiamo $t = y - x$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

In generale se g è periodica con periodo T vale

$$\int_0^T g(x)dx = \int_{0+@}^{T+@} g(x)dx \quad \forall @ \in \mathbb{R}$$

quindi se pensiamo $@ = -x$ abbiamo la tesi. □

Dimostrazione del Teorema 1.6.8. Ora dimostriamo che in tutti i punti la serie di Fourier converge alla media del limite sinistro e destro della funzione nel punto. (In caso di continuità quel valore è il valore della funzione stessa.) Qundi ciò che vogliamo dimostrare è che

$$s_n(x) - \left[\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]\right] \to 0$$

Questo per $n \to \infty$
Ora usiamo il lemma 5 per $s_n(x)$ ed il lemma 4 per $\frac{1}{2}$ e si ha

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\left(f(x+t) - f(x^+) \right) \left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) \right] dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left[\left(f(x+t) - f(x^-) \right) \left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) \right] dt$$

Ora definiamo F come

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{se } 0 < t \leq \pi \\ \frac{f(x+t)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{se } -\pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

allora F è regolare a tratti.
Per dimostrarlo basta vedere che

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t\,(1+o(1))}$$

Questo limite non è altro che la derivata destra di $f(x)$, la quale è regolare a tratti e la sua derivata è prolungabile con continuità, quindi F è regolare a tratti.
Tornando alle precedenti eguaglianze si ha che

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(t) \sin\left(nt + \frac{t}{2} \right) dt$$

Applicando le formule di Werner

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(t) \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(t) \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

In questi integrali si ha come funzione integranda il prodotto tra una certa funzione $g(t) = F(t)\cos(t/2)$ e $\sin(nt)$, (nel secondo integrale le funzioni in gioco sono $g(t) = F(t)\sin(t/2)$ e $\cos(nt)$), ci siamo quindi ricondotti ad una situazione analoga ai coefficenti a_k e b_k, sappiamo che il loro limite per $n \to \infty$ è 0, quindi è dimostrato che il limite iniziale sia uguale a 0. □

1.6.14 Lemma (Bonus 1). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $T = 2\pi$, regolare a tratti, continua, allora $\exists f'$, è sviluppabile in serie e i suoi coefficenti sono $a'_k = kb_k$ e $b'_k = -ka_k$* . □

Dimostrazione. Integriamo per parti:

$$ka_k = k\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x)\cos(kx)dx = \frac{k}{\pi} \left(\underbrace{f(x)\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^\pi f'(x)\frac{\sin(kx)}{k}dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)dx = -b_k'$$

$$k\, b_k = k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{k}{\pi}\left(\underbrace{-f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos(kx)}{k}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)dx = a_k'$$

□

1.6.15 Lemma (Bonus 2).

$$|a_k| \leq \frac{k^2}{2}a_k^2 + \frac{1}{2k^2}, \quad |b_k| \leq \frac{k^2}{2}b_k^2 + \frac{1}{2k^2}.$$

□

Dimostrazione. Dimostriamo solo per a_k:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$$

$$|2a_k| = 2\underbrace{k|a_k|}_{=x}\underbrace{\frac{1}{k}}_{=y} \leq k^2 a_k + \frac{1}{k^2} \Rightarrow |a_k| \leq \frac{k^2}{2}a_k^2 + \frac{1}{2k^2}$$

□

1.6.16 Teorema (Convergenza uniforme). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $T = 2\pi$, regolare a tratti, continua, allora la serie di Fourier converge uniformemente ad f.* □

Dimostrazione. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)}_{\textit{deve convergere assolutamente}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\underbrace{|\cos(kx)|}_{\leq 1} + |b_k|\underbrace{|\sin(kx)|}_{\leq 1} \leq \sum_{k=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2}a_k^2 + \frac{1}{2k^2} + \frac{k^2}{2}b_k^2 + \frac{1}{2k^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2a_k^2 + k^2b_k^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\textit{converge}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k'^2 + a_k'^2\right) + L$$

Dalla disuguaglianza di Bessel

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx}_{finito} + L \leq C$$

Abbiamo dunque la convergenza. □

1.6.17 Teorema (Integrazione per serie di Fourier). *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $T=2\pi$, regolare a tratti. Allora $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$ vale*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{a_0}{2}(x-x_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{x_0}^{x}\cos(kt)dt + b_k\int_{x_0}^{x}\sin(kt)dt\right].$$

□

Dimostrazione. Introduco $F:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt.$$

Quindi $F(-\pi) = 0$, $F(\pi) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt = \pi\, a_0 - \frac{2\pi\, a_0}{2} = 0$. Perciò $F(-\pi) = F(\pi)$ e quindi il prolungamento periodico di F su tutto $\mathbb{R}$ è continuo e regolare a tratti e si può applicare il teorema precedente, concludendo che F è sviluppabile in serie di Fourier ed essa vi converge uniformemente.
La serie di F possiede dei coefficienti

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(kx)\,dx.$$

Inoltre $F' = f$ e quindi, per un lemma già dimostrato, se indichiamo con a_k e b_k i coefficienti di Fourier di f, vale

$$k\,\alpha_k = -b_k, \qquad k\,\beta_k = a_k.$$

Fisso ora x e x_0 in $\mathbb{R}$:

$$\int_{x_0}^{x}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt = F(x) - F(x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k\ (\cos(kx)-\cos(kx_0)) + \beta_k\ (\sin(kx)-\sin(kx_0))\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[-b_k\frac{(\cos(kx)-\cos(kx_0))}{k} + a_k\frac{(\sin(kx)-\sin(kx_0))}{k}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k \int_{x_0}^{x} \sin(kt)\, dt + a_k \int_{x_0}^{x} \cos(kt)\, dt \right].$$

Da cui si ricava la tesi:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{x_0}^{x} \cos(kt)dt + b_k \int_{x_0}^{x} \sin(kt)dt \right].$$

□

Capitolo 2

Curve e forme differenziali lineari

2.1 Parametrizzazione di una curva in $\mathbb{R}^n$

Iniziamo questo capitolo parlando del concetto fondamentale di curva. Intuitivamente si tratta di un oggetto molto semplice; basta prendere un punto iniziale e uno finale in uno spazio euclideo a due o tre dimensioni e tracciare una linea immaginaria continua che li collega. Ma come si può rendere il tutto in maniera più rigorosa e generale a livello matematico. Potremo iniziare pensando alla curva coma la traiettoria percorsa da una certa particella che parte dal nostro punto iniziale a un certo istante t_0, ripercorre la curva e arriva al punto finale all'istante t_1. Possiamo quindi pensare che esista una funzione vettoriale $\vec{\varphi}$ che associa a ogni punto dell'intervallo $[t_0, t_1]$ un punto della curva in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Ovviamente questa funzione sarà continua e viene chiamata *rappresentazione parametrica* della suddetta curva. Spesso viene indicato con il termine 'curva' (o anche 'cammino') la funzione stessa. Si vede subito che tutto può essere esteso anche al caso generale di $\mathbb{R}^n$ definendo come 'curva' una funzione vettoriale definita da un intervallo reale (solitamente chiuso) a $\mathbb{R}^n$. Chiariamo subito che in queste dispense intenderemo con la parola 'curva' una specifica funzione della forma accennata sopra.

2.1.1 Definizione. *Sia data una curva $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Si dice che tale curva è chiusa se $\vec{\varphi}(a) = \vec{\varphi}(b)$. Invece si dice che la curva è semplice se presi comunque de punti t_0 e t_1 appartenenti a $[a, b]$ distinti e tali che almeno uno dei due sia interno all'intervallo, si ha che $\vec{\varphi}(t_0) \neq \vec{\varphi}(t_1)$. Inoltre l'immagine della funzione $\vec{\varphi}$ è detta sostegno della curva.*

□

2.1.2 Definizione (Curva regolare e versori notevoli). *Una curva $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice regolare se $\vec{\varphi}$ è di classe C^1 nel suo dominio e inoltre vale che*

$$|\vec{\varphi}\,'(t)| \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

il che, se chiamo $x_1, \ldots, x_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ le componenti di $\vec{\varphi}$, equivale a dire

$$({x_1}'(t))^2 + \cdots + ({x_n}'(t))^2 \neq 0 \quad \forall t \in (a, b).$$

□

2.1.3 Osservazione. In queste condizioni è sempre possibile definire il versore tangente $\vec{\tau}(t)$ alla curva nel punto $\vec{\varphi}(t)$ come

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{\varphi}\,'(t)}{|\vec{\varphi}\,'(t)|} = \frac{(x_1{}'(t), x_2{}'(t), \ldots, x_n{}'(t))}{\sqrt{(x_1{}'(t))^2 + \cdots + (x_n{}'(t))^2}}$$

e nel caso in cui siamo in $\mathbb{R}^2$ e $\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$ definiamo $\vec{N}(t)$, il *versore normale* alla curva nel punto t come

$$\vec{N}(t) = \frac{(y\,'(t), -x\,'(t))}{\sqrt{(x\,'(t))^2 + (y\,'(t))^2}}$$

□

2.1.4 Definizione (Curva regolare a tratti). *Una curva $\vec{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è detta* regolare a tratti *se esistono $n \in \mathbb{N}$ punti reali $\{a_i\}$ tali che*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b,$$

$$\vec{\varphi}_i := \vec{\varphi}\Big|_{[a_{i-1}, a_i]} \quad \text{sia regolare e} \quad \vec{\varphi}_i(a_i) = \vec{\varphi}_{i+1}(a_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$$

□

2.1.5 Definizione (Lunghezza di una curva). *Sia $\vec{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Si definisce lunghezza della curva l'integrale*

$$L(\vec{\varphi}) = \int_a^b |\vec{\varphi}\,'(t)|\, dt$$

2.1.6 Esempio (Caso di $\mathbb{R}^2$). Nel caso in cui $\vec{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e $\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$

$$L(\vec{\varphi}) = \int_a^b \sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}\, dt$$

□

2.1.7 Esempio (Caso di una funzione). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Allora il grafico della funzione coincide con l'immagine di una curva $\vec{\varphi}$ tale che

$$\vec{\varphi}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \quad t \in [a,b].$$

Allora vale che $|\vec{\varphi}\,'(t)| = \sqrt{x\,'^2(t) + y\,'^2(t)} = \sqrt{1 + f'^{\,2}(t)}$ e quindi

$$L(\vec{\varphi}) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^{\,2}(t)}\, dt$$

□

2.1.8 Esempio (Coordinate polari). Parametrizziamo una curva nel piano in coordinate polari:

$$\rho = f(\vartheta), \quad \vartheta \in [\alpha, \beta]$$

dimostriamo che la lunghezza della curva nel piano è

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\vartheta) + f'^{\,2}(\vartheta)}\, d\vartheta$$

Prendiamo la rappresentazione della curva in coordinate cartesiane $\vec{\varphi}$:

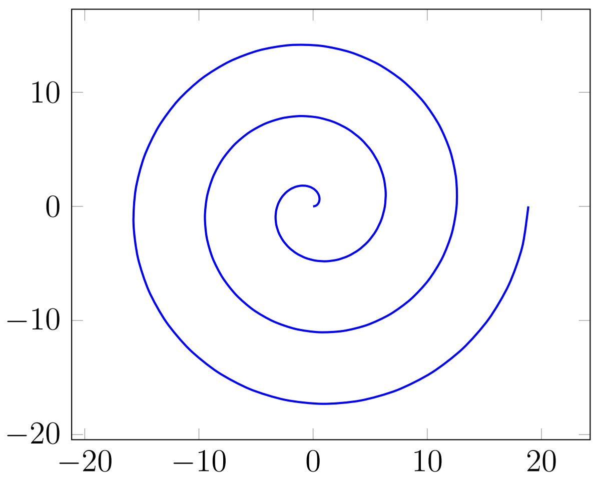
$$\vec{\varphi}(t) = \begin{cases} x(t) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(t) = f(\vartheta)\sin\vartheta \end{cases}, \ \vartheta \in [\alpha, \beta]$$

e valutiamo $|\vec{\varphi}\,'(t)|$:

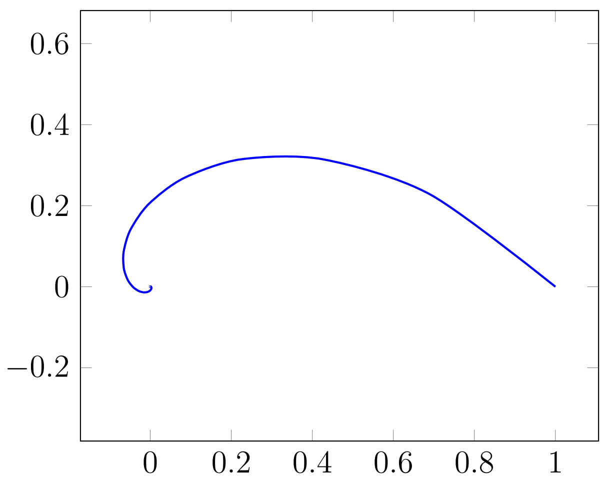
$$\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)} = \sqrt{(f'(\vartheta)\cos\vartheta - f(\vartheta)\sin\vartheta)^2 + (f'(\vartheta)\sin\vartheta + f(\vartheta)\cos\vartheta)^2} =$$
$$= \sqrt{f^2(\vartheta) + f'^{\,2}(\vartheta)}$$

Un esempio interessante di curve parametrizzate in coordinate polari sono le cosiddette spirali come ad esempio la *spirale di Archimede* che ha come parametrizzazione $\rho = \vartheta$ con ϑ compreso tra 0 e un numero reale positivo a piacere, mentre la *spirale logaritmica* ha come parametrizzazione $\rho = e^{-\vartheta}$ con $\vartheta \in [0, +\infty)$. □

Spirale di Archimede



Spirale logaritmica



2.1.9 Definizione (Curve equivalenti). *Date due curve*

$$\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{\psi} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$$

esse si dicono equivalenti *se esiste una funzione suriettiva* $g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *di classe* C^1 *tale che* $g'(t) \neq 0$ *per ogni* $t \in [a, b]$ *e*

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(g(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

□

2.1.10 Osservazione. La funzione g in quelle condizioni è per forza invertibile e $g^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ è di classe C^1 e valgono

$$(g^{-1}(s))' = \frac{1}{g'(g^{-1}(s))} \quad \forall s \in [\alpha, \beta]$$

$$\vec{\psi}(s) = \vec{\varphi}(g^{-1}(s))$$

□

2.1.11 Definizione (Poligonale o spezzata). *Una curva $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è detta* poligonale o spezzata *se è equivalente ad una curva $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tale che esistano N punti $\{a_i\}$ tali che*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b,$$

e inoltre

$$\vec{\varphi}\Big|_{[a_{i-1}, a_i]}(t) = \vec{\varphi}(a_{i-1}) + (t - a_{i-1}) \frac{\vec{\varphi}(a_i) - \vec{\varphi}(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \quad \text{con } t \in [a_{i-1}, a_i]$$

per $i = 1, \ldots, N$; cioè ogni $\vec{\varphi}\Big|_{[a_{i-1}, a_i]}$ rappresenta un segmento. □

2.1.12 Teorema (di rettificabilità). *Sia $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Allora*

$$L(\vec{\varphi}) = \sup_{\vec{p}} L(\vec{p})$$

dove $\vec{p}$ è una poligonale inscritta nella curva, cioè tale che $\vec{p}(a) = \vec{\varphi}(a)$, $\vec{p}(b) = \vec{\varphi}(b)$ e per ogni a_i della definizione di poligonale $\vec{p}(a_i)$ appartiene all'immagine di $\vec{\varphi}$. Inoltre valgono

$$L(\vec{p}) \leq L(\vec{\varphi}),$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \vec{p} \quad \text{tale che} \quad L(\vec{p}) > L(\vec{\varphi}) - \varepsilon$$

□

2.1.13 Definizione (Ascissa curvilinea). *Sia $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare e sia $t_0 \in [a, b]$. È detta* ascissa curvilinea *la funzione $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{\varphi}\,'(r)|\, dr$$

□

2.1.14 Osservazione. È utile notare che, dal teorema fondamentale del calcolo, ricaviamo che per ogni $t \in [a, b]$, $s'(t) = |\vec{\varphi}\,'(t)| \neq 0$. Possiamo quindi prendere $s : [a, b] \to [s(a), s(b)]$ (dato che $s' = |\vec{\varphi}\,'| > 0$) e farle giocare il ruolo che aveva g nella definizione 2.1.9 di curve equivalenti. La funzione s così definita è quindi invertibile per i vari teoremi che dicono che una funzione strettamente monotona e suriettiva lo è. Abbiamo così sia $s(t)$ che $t(s)$, dove $t : [s(a), s(b)] \to [a, b]$, e possiamo riparametrizzare la curva con una funzione $\vec{\gamma} : [s(a), s(b)] \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\varphi}(t(s)).$$

In questo caso le curve sono equivalenti e si conserva anche l'orientamento. Inoltre così facendo abbiamo trovato una rappresentazione equivalente della stessa curva ma percorsa con velocità in ogni punto di modulo unitario, infatti $|\vec{\gamma}\,'(s)| = 1$. Per vederlo basta fare il calcolo:

$$\vec{\gamma}\,'(s) = \vec{\varphi}\,'(t(s)) \cdot t'(s), \quad t'(s) = \frac{1}{|\vec{\varphi}\,'(t(s))|}$$

dove l'ultima affermazione è giustificata dall'osservazione 2.1.10. Concludiamo notando quindi che

$$|\vec{\gamma}\,'(s)| = |\vec{\varphi}\,'(t(s))| \frac{1}{|\vec{\varphi}\,'(t(s))|} = 1 \quad \forall s \in [s(a), s(b)]$$

$$L(\vec{\varphi}) = L(\vec{\gamma}) = \int_{s(a)}^{s(b)} ds = s(b) - s(a)$$

$\square$

2.1.15 Definizione (Integrali curvilinei). *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare tale che $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita in particolare sul sostegno di γ. Si definisce integrale di f lungo γ*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma\,'(t)|\, dt = \int_a^b f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \sqrt{x_1'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t)}\, dt$$

In caso $n = 2$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

In caso $n = 3$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è regolare a tratti ed è composta da N curve regolari $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ la definizione è ancora valida a patto che si ponga

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \cdots + \int_{\gamma_N} f\, ds.$$

Nel caso in cui γ sia una curva chiusa per l'integrale si usa il simbolo

$$\oint_\gamma f\, ds.$$

$\square$

2.1.16 Osservazione. Dimostriamo che per curve equivalenti l'integrale curvilineo non cambia. Chiamo perciò $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\vec{\psi} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ le mie due parametrizzazioni equivalenti. Dunque esiste una funzione $g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ come da definizione di curve equivalenti. Scriviamo innanzitutto l'integrale curvilineo rispetto alla prima parametrizzazione:

$$\int_a^b f(\vec{\varphi}(t))|\vec{\varphi}'(t)|\,dt$$

Sostituiamo t con $g^{-1}(s)$ per $s \in [\alpha, \beta]$. Se $(g{-}1(s))' > 0$ abbiamo che

$$\int_a^b f(\vec{\varphi}(t))|\vec{\varphi}'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{\varphi}(g^{-1}(s)))|\vec{\varphi}'(g^{-1}(s))(g^{-1}(s))'|\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{\psi}(s))|\vec{\psi}'(s)|\,ds$$

e la stessa uguaglianza si può dimostrare facilmente anche nel caso in cui $(g{-}1(s))' < 0$, cioè se l'orientazione della curva è opposta. □

2.1.17 Osservazione. Osserviamo che l'integrale curvilineo conserva le proprietà di linearità e del confronto. Infatti, se prendo due funzioni f g (con le giuste proprietà per avere l'integrabilità) e due costanti reali α e β, vale la seguente relazione:

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha \int_\gamma f\,ds + \beta \int_\gamma g\,ds$$

Inoltre se $f \leq g$ in ogni punto del sostegno della curva, allora vale questa disuguaglianza:

$$\int_\gamma f\,ds \leq \int_\gamma g\,ds$$

Da quest'ultima deriva un'altra importante disuguaglianza che è la seguente:

$$\left| \int_\gamma f\,ds \right| \leq \sup_{sost(\gamma)} |f| L(\gamma)$$

2.1.18 Definizione (Baricentro). *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare tale che $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Viene definito baricentro della curva il punto $(x_b^1, x_b^2, \ldots, x_b^n)$ tale che*

$$x_b^i = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x_i\,ds \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

2.2 Forme differenziali di $\mathbb{R}^n$

2.2.1 Definizione (**Duale di $\mathbb{R}^n$**). *Si chiama* duale *di $\mathbb{R}^n$ l'insieme*

$$(\mathbb{R}^n)^* = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \big\{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad lineari\big\}$$

Si può dimostrare facilmente che $(\mathbb{R}^n)^*$ è uno spazio vettoriale di dimensione n e, fissata la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, possiede una base detta base duale canonica

$$\{dx_1, \dots, dx_n\}$$

tale che

$$dx_i(e_j) = \delta_{ij}$$

□

2.2.2 Definizione (**Forma differenziale**). *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, una* forma differenziale *è una funzione $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ ed è esprimibile come*

$$\omega(x) = a_1(x)\, dx_1 + \cdots + a_n(x)\, dx_n \quad con \quad a_i : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Inoltre la forma differenziale si dice di classe C^k quando lo sono tutte le a_i. □

2.2.3 Definizione (**Integrale di una forma differenziale**). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare, $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale continua. Si definisce integrale di ω su γ*

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt$$

Nel caso $n = 2$

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha^\beta \Big[a_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + a_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\Big] dt.$$

Nel caso $n = 3$

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha^\beta \Big[a_1(x(t), y(t), z(t))\cdot x'(t) + a_2(x(t), y(t), z(t))\cdot y'(t) + a_3(x(t), y(t), z(t))\cdot z'(t)\Big] dt$$

Inoltre valgono le usuali proprietà di linearità e vale (indicando con $-\gamma$ la curva con orientamento opposto)

$$\int_\gamma \omega = -\int_{-\gamma} \omega$$

□

2.2.4 Definizione (**il Differenziale**). *Data $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, definiamo il suo* differenziale *come la forma differenziale*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy.$$

In generale data $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1, definiamo il suo differenziale *come la forma differenziale*

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i.$$

□

2.2.5 Definizione (Forma esatta). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale con $\omega = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$.*
La forma si dice esatta *se esiste $F : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $dF = \omega$, o*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i,$$

cioè se ω è il differenziale di una funzione, che viene detta una primitiva *di ω.* □

2.2.6 Definizione (insieme connesso). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Esso si dice* connesso *se per ogni $y, z \in \Omega$ esiste una poligonale che li congiunge il cui sostegno è incluso in Ω.* □

2.2.7 Proposizione. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso, $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale esatta e $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ due sue primitive. Allora F e G differiscono per una costante, cioè*

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad F(x) = G(x) + c \quad \forall\, x \in \Omega$$

□

Dimostrazione. Siano F e G due qualsiasi primitive della forza differenziale $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$. Si prenda la funzione differenza $F - G$, che sarà almeno differenziabile, e calcoliamoci le derivate parziali in un generico punto $x \in \Omega$. Otteniamo che

$$\frac{\partial(F-G)}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} = a_i - a_i = 0,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \text{ e } \forall\, x \in \Omega$$

abbiamo quindi che il gradiente di $F - G$ è il vettore nullo e questo implica, per il teorema del gradiente nullo, che la funzione deve essere costante. □

2.2.8 Teorema (di integrazione delle forme esatte). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale esatta e continua e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Scelta poi una curva regolare (anche a tratti) $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ il cui sostegno è incluso in Ω, se chiamiamo $\gamma(\alpha) = y$ e $\gamma(\beta) = z$, vale che*

$$\int_\gamma \omega = F(z) - F(y)$$

cioè l'integrale non dipende dalla curva, ma solo dai punti iniziale e finale. □

Dimostrazione. Scriviamo $\gamma(t) = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, allora vale che

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t))\, x_i'(t)\ dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(x(t))\, dt = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(z) - F(y).$$

Se la curva è regolare a tratti applichiamo il ragionamento a ciascuno dei tratti e sommiamo trovando la tesi. □

2.2.9 Teorema (di caratterizzazione delle forme esatte). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale continua. Allora sono equivalenti*

1. *ω è esatta in Ω*
2. *per ogni curva chiusa regolare a tratti γ il cui sostegno è incluso in Ω vale*
$$\oint_\gamma \omega = 0$$
3. *date due curve γ_1, γ_2 regolari a tratti che hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza vale*
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$
e in caso i versi di percorrenza siano opposti vale
$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega.$$

Inoltre, in queste condizioni, fissato $z \in \Omega$ la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = \int_\gamma \omega,$$

con γ una curva regolare a tratti che ha come punto iniziale z e come punto finale x, è una primitiva della forma differenziale ω.

□

Dimostrazione. La 1) implica la 2) perchè basta calcolare la differenza tra i valori della primitiva nello stesso punto, che fa ovviamente zero. La 2) implica la 3) perchè scelte γ_1 e γ_2 aventi gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza, la curva $\gamma_1 \circ (-\gamma_2)$, ottenuta percorrendo la prima e poi in senso inverso la seconda, è una curva chiusa. Perciò

$$0 = \int_{\gamma_1 \circ (-\gamma_2)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega,$$

da cui la tesi 3) - nel caso i versi di percorrenza siano opposti si aggiunge un meno che fa quadrare i conti.

Ci rimane quindi da controllare che 3) implica 1). Per farlo scriviamo $\omega = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$, fissiamo $x_0 \in \Omega$ e introduciamo $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) := \int_{\gamma_x} \omega,$$

dove per ogni $x \in \Omega$, $\gamma_x : [a,b] \to \Omega$, $\gamma_x(t)$ è una curva regolare a tratti inclusa in Ω tale che $\gamma_x(a) = x_0$ e $\gamma_x(b) = x = (x_1, \ldots, x_n)$. L'obiettivo è dimostrare che

$$a_i(x) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Procediamo per $i = 1$. Calcoliamo quindi utilizzando le proprietà dell'integrale

$$\frac{F(x_1 + h, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_h \circ \gamma_x} \omega - \int_{\gamma_x} \omega\right) = \frac{1}{h}\int_{\gamma_h} \omega$$

dove e γ_x è la curva definita prima e $\gamma_h(t) = (x_1 + t, \ldots, x_n)$, $t \in [0,h]$ con h positivo abbastanza piccolo (il che esiste sempre dato che stiamo parlando di una poligonale in un aperto connesso). Dato che $x_i'(t) = 0$ se $i \neq 1$ e $x_1'(t) = 1$, sui punti di γ_h abbiamo che

$$\frac{1}{h}\int_{\gamma_h} \omega = \frac{\int_0^h a_1(x_1 + t, \ldots, x_n)\, x_1'(t)\, dt}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h a_1(x_1 + t, \ldots, x_n)\, dt$$

Facendo il limite di questo rapporto incrementale per $h \to 0^+$ otteniamo, per il Teorema della media integrale, $a_1(x)$. Facendo lo stesso discorso per $h \to 0^-$ dimostriamo che $a_1(x) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x)$. Se poi facciamo un ragionamento analogo per gli altri valori dell'indice i otteniamo la nostra tesi. □

2.2.10 Osservazione. L'integrale di una forma differenziale $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$, con $\omega = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$, su una curva regolare $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ può essere reinterpretato definendo la funzione $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tale che $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$. In questo caso è facile dimostrare che

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma a(x) \cdot \tau(x)\, ds,$$

dove τ indica il versore tangente alla curva e ds indica l'integrale di linea. Infatti

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha^\beta a(x(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta a(x(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}|\gamma'(t)|\, dt = \int_\gamma a(x) \cdot \tau(x)\, ds.$$

□

2.2.11 Definizione (Forma chiusa). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1 con $\omega = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$. La forma differenziale si dice* chiusa *se*

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \text{per ogni} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Nel caso $n = 2$ la forma $\omega = a_1\, dx + a_2\, dy$ è chiusa se

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}.$$

Nel caso $n = 3$ la forma $\omega = a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz$ è chiusa se

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial z}$$

□

2.2.12 Proposizione. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1. Se ω è esatta, allora è anche chiusa.* □

Dimostrazione. Sia F una primitiva di ω. Allora F è di classe C^2 e vale il teorema di Schwarz. Quindi

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \text{per ogni} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

□

2.2.13 Teorema (Forma chiusa in un rettangolo di $\mathbb{R}^2$). *Sia $R \subseteq \mathbb{R}^2$ un rettangolo aperto e $\omega : R \to (\mathbb{R}^2)^*$ tale che $\omega(x, y) = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$ una forma differenziale di classe C^1. Se essa è chiusa, allora è anche esatta.* □

Dimostrazione. Cerchiamo una primitiva F della forma assegnata. Fissiamo un punto (x_0, y_0) in R e definiamo per ogni $(x, y) \in R$

$$F(x, y) = \int_\gamma a\, dx + b\, dy$$

dove γ è una curva formata da due segmenti

$$\gamma_1(t) = (t, y_0), \quad t \in [x_0, x]$$

$$\gamma_2(t) = (x, t), \quad t \in [y_0, y]$$

E quindi otteniamo

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\cdot 1 + b(t, y_0)\cdot 0\, dt + \int_{y_0}^{y} a(x, t)\cdot 0 + b(x, t)\cdot 1\, dt = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} b(x, t)\, dt.$$

Scopriamo che le funzioni

$$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\, dt \quad \text{e} \quad x \longmapsto \int_{y_0}^{y} b(x, t)\, dt$$

sono differenziabili rispetto a x e la loro derivata vale rispettivamente

$$a(x, y_0) \quad \text{e} \quad \int_{y_0}^{y} \frac{\partial b}{\partial x}(x, t)\, dt$$

Quindi riprendendo la definizione di F deriviamo rispetto a tutte le variabili:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial b}{\partial x}(x,t)\, dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b(x, y)$$

Dalla chiusura della forma sappiamo che $\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\partial a}{\partial y}(x,t)$ e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial a}{\partial y}(x,t)\, dt = a(x,y_0) + \Big[a(x,t)\Big]_{y_0}^{y} = a(x,y)$$

E le ultime relazioni ci dicono che

$$dF = a\, dx + b\, dy.$$

□

2.2.14 Definizione (Aperto semplicemente connesso). *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Esso si dice* semplicemente connesso *quando ogni curva chiusa inclusa in Ω può essere deformata fino a ridursi ad un singolo punto ancora incluso in Ω.* □

2.2.15 Teorema (Forme differenziali in aperti semplicemente connessi). *Sia Ω un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1. Allora la forma è chiusa se e solo se è esatta.* □

2.2.16 Definizione (Aperto stellato di $\mathbb{R}^n$). *Un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si dice* stellato *rispetto ad un suo punto x_0 se per ogni $x \in \Omega$ esiste un segmento di estremi x_0 e x incluso in Ω.* □

2.2.17 Teorema (Forme differenziali in aperti stellati). *Sia Ω un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1. Allora la forma è chiusa se e solo se è esatta.* □

Dimostrazione. Supponiamo che il punto rispetto al quale Ω è stellato sia l'origine (in caso contrario operiamo una traslazione). Allora per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ il segmento γ tale che

$$\gamma(t) = t\mathbf{x}, \quad t \in [0,1]$$

è incluso in Ω. Mostriamo che F definita da

$$F(\mathbf{x}) = \int_\gamma \omega$$

è una primitiva di ω. Infatti consideriamo l'integrale

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^1 \Big\{a_1(t\mathbf{x})x_1 + \cdots + a_n(t\mathbf{x})x_n\Big\}\, dt$$

e deriviamo rispetto alla prima variabile:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_0^1 \left\{ a_1(t\mathbf{x}) + \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(t\mathbf{x})tx_1 + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_1}(t\mathbf{x})tx_n \right\} dt$$

ricordando che per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial(a_i(t\mathbf{x}))}{\partial x_1} = t\,\frac{\partial a_i}{\partial x_1}(t\mathbf{x}).$$

Utilizzando l'ipotesi di chiusura

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_1}(t\mathbf{x}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_i}(t\mathbf{x})$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ scriviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_0^1 \Big\{ a_1(t\mathbf{x}) &+ \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(t\mathbf{x})tx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(t\mathbf{x})tx_2 + \dots \\ \cdots &+ \frac{\partial a_1}{\partial x_n}(t\mathbf{x})tx_n \Big\}\, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(t\,a_1(t\mathbf{x}))\, dt = \\ &= \Big[t\,a_1(t\mathbf{x})\Big]_0^1 = a_1(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

La dimostrazione si ripete per tutte le a_n e si trova che $dF = \omega$. $\square$

2.3 Campi vettoriali

2.3.1 Definizione (Campo vettoriale). *Un* campo vettoriale *è una funzione* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *di classe* C^1 *a cui è associata una forma differenziale* $\omega = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$*. La forma è esatta se e solo se esiste* $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $\nabla F = f$ *e in tale caso il campo si dice* conservativo. □

2.3.2 Teorema. *Sia* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vettoriale. Allora valgono le considerazioni del teorema 2.2.9, cioè che sono equivalenti*

1. *f è conservativo in Ω*
2. *per ogni curva chiusa regolare a tratti γ il cui sostegno è incluso in Ω vale*
$$\oint_\gamma f(x) \cdot \tau(x)\,ds = 0$$
3. *date due curve γ_1, γ_2 regolari a tratti che hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza vale*
$$\int_{\gamma_1} f(x) \cdot \tau(x)\,ds = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot \tau(x)\,ds$$
e in caso i versi di percorrenza siano opposti vale
$$\int_{\gamma_1} f(x) \cdot \tau(x)\,ds = -\int_{\gamma_2} f(x) \cdot \tau(x)\,ds$$

indicando per ognuna delle curve γ
$$\tau(x) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$
il versore tangente definito a meno di un numero finito di punti. □

Dimostrazione. Basta applicare il teorema 2.2.9 già citato al caso in cui $\omega = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$ e quindi
$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f_x\,\gamma_x'(t) + f_y\,\gamma_y'(t) + f_z\,\gamma_z'(t)\ dt = \int_a^b f \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(x) \cdot \tau(x)\,ds.$$
□

2.3.3 Proposizione. *Dato un campo vettoriale* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *di classe* C^1*, se* $\nabla \times f(x) = rot f(x) = 0$ *per ogni* $x \in \Omega$*, allora la forma individuata da* f *è chiusa.* □

Dimostrazione. Dalla definizione di rotore
$$\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0$$
che significa esattamente la chiusura. □

2.3.4 Teorema. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto semplicemente connesso e $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Allora esso è conservativo se e solo se $\operatorname{rot} f = 0$.* □

Dimostrazione. L'implicazione diretta è banale ed è già stata dimostrata nella proposizione 2.2.12. Quella inversa è verificata dal fatto che la condizione sul rotore implica la chiusura e siamo in un aperto semplicemente connesso. □

Capitolo 3

Integrale di Lebesgue

3.1 Spazi di misura e misura esterna

3.1.1 Definizione (**Spazio elementare di misura**). *Uno* spazio elementare di misura *è una terna* $(A, \mathcal{E}, m)$*, dove* A *è un insieme non vuoto,* $\mathcal{E}$ *è detto* semianello degli insiemi elementari *e* m *è detta* misura*, tale che*

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$
2. *per ogni* $E', E'' \in \mathcal{E}$*,* $E' \cap E'' \in \mathcal{E}$*,*
3. *per ogni* $E', E'' \in \mathcal{E}$*, la loro differenza è esprimibile come unione finita di insiemi elementari a due a due disgiunti:*
$$E' \setminus E'' = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad E_i \in \mathcal{E}$$
4. $m : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ *è tale che per ogni* $E \in \mathcal{E}$ *esprimibile come unione finita di insiemi elementari a due a due disgiunti* ($E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$) *vale*
$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$$

$\square$

3.1.2 Definizione (**Spazio di misura**). *Uno* spazio di misura *è una terna* $(A, \mathcal{E}, m)$ *avente tre proprietà*

1. $(A, \mathcal{E}, m)$ *è uno spazio elementare di misura.*
2. *(*σ*-additività) Per ogni successione di insiemi elementari* $\{E_n\}$ *a due a due disgiunti tali che la loro unione*
$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
appartenga ad $\mathcal{E}$*, vale*
$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

3. *(σ-finitezza) Esiste una successione di insiemi elementari $\{E_n\}$ (a due a due disgiunti) tali che*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

□

3.1.3 Esempio. Elenchiamo ora una serie di esempi interessanti sugli spazi di misura:

- **Misura di Dirac**. Prendiamo la terna $(\mathbb{R}^N, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \delta_0)$ dove $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, mentre $\delta_0 : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty)$ è definita così:

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathbf{0} \in E \\ 0 \text{ se } \mathbf{0} \notin E \end{cases} \quad , \text{ per } E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

  Dove $\mathbf{0}$ in questo caso indica l'origine di $\mathbb{R}^N$, cioè la n-plua con tutte le coordinate nulle. Si dimostra che quest aterna è uno spazio di misura. La σ-finitezza è molto semplice da dimostrare in quanto basta prendere come successione di insiemi elementari quella che ha come primo elemento tutto $\mathbb{R}^N$ e come elementi successivi sempre l'insieme vuoto. Per la σ-additività prendiamo in considerazione un insieme $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ e una successione di insiemi $\{E_n\}$ sempre appartenenti al semi-anello, disgiunti a due a due tra loro e tali che la loro unione numerabile dia E. Si distinguono i due casi in cui E include o no l'origine di $\mathbb{R}^N$. Se sì, allora esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbf{0} \in E_j$, quindi abbiamo che la somma delle misure degli elementi della partizione di E è proprio uguale alla misura di E. Nel caso opposto abbiamo che nessun elemento della partizione contiene $\mathbf{0}$ e la tesi è ancora verificata.

- **Misura che conta** Consideriamo la terna $(\mathbb{N}, \mathcal{E}, \#)$ dove $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \emptyset$ (cioè la famiglia degli insiemi contenenti un singolo numero naturale), mentre $\# : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ vale zero in corrispondenza dell'insieme vuoto e uno per ogni altro elemento del semi-anello. Anche questa terna è uno spazio di misura e si può dimostrare facilmente.

- **Rettangoli di** $\mathbb{R}^N$ Prendiamo la terna $(\mathbb{R}^N, \mathcal{E}, mis_N)$ dove $\mathcal{E}$ è l'insieme dei rettangoli di $\mathbb{R}^N$, cioè del prodotto cartesiano tra N intervalli limitati compresi quelli degeneri corrispondenti a un singolo punto, mentre mis_N è la funzione che associa ad ogni rettangolo il prodotto tra la lunghezza di tutti gli N intervalli da cui è definito. Dimostrare che anche questo è uno spazio di misura non è altrettanto banale e vi dedichiamo una proposizione a parte.

□

3.1.4 Proposizione (Rettangoli di $\mathbb{R}^N$). *La terna $(\mathbb{R}^N, \mathcal{E}, m)$, con $\mathcal{E}$ formato dai rettangoli di $\mathbb{R}^N$ e $m = mis_N$ è uno spazio di misura.* □

Dimostrazione. Per $\mathcal{E}$ valgono banalmente le ipotesi sullo spazio elementare di misura, inoltre considerando la famiglia dei rettangoli $(-n,n)^N$ per ogni n, abbiamo una famiglia di insiemi elementari la cui unione è $\mathbb{R}^N$ ed è quindi verificata la σ-finitezza. Rimane da mostrare che, presa una successione di insiemi elementari $\{E_n\}$ a due a due disgiunti tali che $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ è un insieme elementare, vale

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Dimostriamo le disuguaglianze $\leq$ e $\geq$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e troviamo un rettangolo $E' \subseteq E$ chiuso tale che $m(E') \geq m(E) - \varepsilon$ e troviamo per ogni n un rettangolo aperto $E''_n \supseteq E_n$ tale che $m(E''_n) \leq m(E_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Mettendo insieme le inclusioni:

$$E' \subseteq E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E''_n.$$

Dato che E' è chiuso e limitato, esso è compatto, quindi dalla famiglia degli $\{E_n\}$ posso estrarne un numero finito tale da ricoprire E' e riordinarli in modo che esista k tale che

$$E' \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} E''_n.$$

Quindi utilizziamo le proprietà delle unioni finite e scoviamo

$$m(E') \leq \sum_{n=1}^{k} m(E''_n)$$

Di conseguenza, ricordando che $m(E') \geq m(E) - \varepsilon$:

$$m(E) \leq m(E') + \varepsilon \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{k} m(E''_n) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{k} (m(E_n) + \varepsilon 2^{-n})$$

$$\leq 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{k} m(E_n) \leq 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

e, data l'arbitrarietà di ε, $m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.
La disuguaglianza opposta è di facile dimostrazione, dato che vale per ogni k

$$\bigcup_{n=1}^{k} E_n \subseteq E$$

e applicando le proprietà per le unioni finite si scopre

$$\sum_{n=1}^{k} m(E_n) \leq m(E)$$

da cui la tesi passando al limite per $k \to \infty$. □

3.1.5 Definizione (**Misura esterna**). *Sia* $(A, \mathcal{E}, m)$ *uno spazio di misura e* $B \subseteq A$. *La* misura esterna *di* B *è*

$$m^*(B) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) : \quad \{E_n\} \in \mathcal{E}, \quad B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

Inoltre se $m^*(B) = 0$, *l'insieme* B *si dice* m*-trascurabile.*

Se una proprietà P *è vera per gli elementi di un insieme* $B \subseteq A$ *di misura esterna* $m^*(B)$ *nulla allora si dice che essa è verificata* quasi ovunque *in* B *rispetto alla misura* m *(si indica che essa è verificata* m*-q.o. oppure, quando la cosa non è ambigua, semplicemente q.o.).* □

3.1.6 Proposizione (**Sub-additività della misura esterna**). *Sia* $(A, \mathcal{E}, m)$ *uno spazio di misura,* $B \subset A$ e $\{B_n\}$ *una successione di sottoinsiemi di* A. *Allora vale che*

$$\text{se} \quad B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{allora} \quad m^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

Quindi ogni insieme contenuto in una famiglia di insiemi trascurabili è esso stesso trascurabile. □

3.1.7 Esempio (**Insieme di Cantor**). Si può essere portati a pensare che la trascurabilità sia una proprietà esclusiva di insiemi al quanto banali (tipo rette, singoli punti o insieme numerabile di punti). Vediamo ora un esempio che smentisce questa idea. In particolare definiremo un insieme che ha misura esterna nulla, ma possiede la potenza del continuo.
Prendiamo a tal scopo l'intervallo reale $C_0 = [0, 1]$, lo dividiamo in tre sotto-intervalli di uguale lunghezza e togliamo l'intervallo aperto centrale. Avremmo così costruito un insieme C_1 definito come

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Facciamo lo stesso procedimento per i due intervalli chiusi che compongono C_1, cioè divido entrambi in tre parti uguali e tolgo l'aperto interno. Avrò così ottenuto l'insieme C_2 del tipo

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Vediamo ora che se ripetiamo il procedimento all'infinito otteniamo una successione C_n di insiemi chiusi composti dall'unione di 2^n intervalli chiusi di lunghezza 3^{-n}. A questo punto definiamo l'insieme C come

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Esso sicuramente non è vuoto in quanto contiene i punti 0, 1/3, 1/9, 7/9, 1 e tanti altri. Tale insieme C viene comunemente chiamato *Insieme di Cantor*. Dimostriamo ora la sua trascurabilità secondo la misura ordinaria di $\mathbb{R}$. Notiamo

innanzitutto che $C \subseteq C_n$ per ogni n. Dato che ogni C_n è unione 2^n di insiemi elementari di misura 3^{-n}, abbiamo che $m^*(C) \leq m(C_n) = (2/3)^n$. Ma visto che $(2/3)^n \to 0$ per $n \to \infty$, allora $m^*(C)$ deve essere per forza nulla.
Adesso dimostriamo che l'insieme di Cantor possiede la potenza del continuo. Questo vuol dire dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra C e un intervallo di $\mathbb{R}$. Iniziamo col dire che come ben sappiamo i numeri tra 0 e 1 si possono scrivere attraverso la notazione decimale (cioè come '$0{,}a_1a_2a_3a_4$...'). Questo equivale a scrivere un numero $x \in [0,1]$ come una e una sola serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n$ con $a_n \in \{0;1;2;...;9\}$. Si dimostra facilmente usando il Teorema del confronto che effettivamente queste tipo di serie convergono a un numero minore o uguale a 1. La stessa cosa si può farlo usando solo le cifre tra zero e tre (cioè attraverso quella che viene chiamata notazione *in base tre*). In pratica si rappresenta ogni numero in $[0,1]$ con un unica serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} d_n/3^n$ con $d_n \in \{0;1;2\}$. Per esempio il numero 1/2 in base tre si scrive '$0,\overline{1}111111$...', mentre il numero 1/7 si scrive '$0.\overline{010212}010212$...'. Si dimostra poi che ogni elemento x dell'insieme di Cantor si rappresenta solo usando le cifre *zero* e *due* cioè esiste una e una sola successione $d_n \in \{0;2\}$ tale che $x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n/3^n$. A questo punto prendo per rappresentare i numeri reali la notazione *binaria* che usa solo le cifre *zero* e *uno* e che rappresenta in numeri minori uguali a uno come $\sum_{n=1}^{\infty} e_n/2^n$ con $e_n \in \{0;1\}$. Posso così stabilire una corrispondenza biunivoca tra C e $[0,1]$ associando a ogni $x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n/3^n$ con $d_n \in \{0;2\}$ il punto $y = \sum_{n=1}^{\infty} e_n/2^n$ con $e_n = d_n/2$, mentre la corrispondenza inversa si ottiene ponendo $d_n = 2e_n$. □

3.1.8 Definizione. *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura. Una funzione $s : A \to \mathbb{R}$ si dice a scala quando esistono $E_1, ..., E_n \in \mathcal{E}$ disgiunti a due a due e $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tale che*

$$s(x) = \begin{cases} c_k \text{ se } x \in E_k \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} , \ x \in A$$

3.1.9 Definizione (Integrale di Lebesgue). *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e $f : A \to \mathbb{R}$. La funzione f si dice* integrabile secondo Lebesgue *se esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni a scala tali che*

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in A,$$

$$\lim_{n', n'' \to \infty} \int_A |s_{n'} - s_{n''}| \, dm = 0$$

dove la seconda richiesta significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n^* tale per cui

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}| \, dm \leq \varepsilon$$

per ogni $n', n'' \geq n^*$. In queste condizioni poniamo

$$\int_A f \, dm = \lim_{n \to \infty} \int_A s_n \, dm.$$

□

3.1.10 Proposizione. *Siano $(A, \mathcal{E}, m)$ spazio di misura, $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Lebesgue e α, β due numeri reali. Allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile secondo Lesbegue e vale*

$$\int_A (\alpha f + \beta g)\, dm = \alpha \int_A f\, dm + \beta \int_A g\, dm$$

□

Dimostrazione. Dato che f e g sono integrabili esistono due successioni di funzioni a scala $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ che rispettano le due condizioni dell'integrabilità rispettivamente per f e per g. Prendo la successione $\{\alpha s_n + \beta t_n\}$. Essa è sicuramente una successione di funzioni a scala e inoltre converge quasi ovunque alla funzione $\alpha f + \beta g$. Vediamo ora che la nostra funzione a scala rispetta la condizione di Cauchy Abbiamo infatti che

$$\int_A |\alpha s_n + \beta t_n - \alpha s_k - \beta t_k|\, dm \leq |\alpha| \int_A |s_n - s_k|\, dm + |\beta| \int_A |t_n - t_k|\, dm \to 0 \text{ per } n, k \to +\infty$$

Abbiamo quindi che la funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile. Calcoliamo infine il suo integrale:

$$\int_A (\alpha f + \beta g)\, dm = \lim_{n \to +\infty} \int_A (\alpha s_n + \beta t_n)\, dm = \alpha \int_A f\, dm + \beta \int_A g\, dm$$

□

3.1.11 Proposizione. *Siano $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e f,$g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili tali che $f \leq g$ quasi ovunque. Allora*

$$\int_A f\, dm \leq \int_A g\, dm$$

□

Dimostrazone. Prendo $h = g - f$ che è sicuramente integrabile e non negativa quasi ovunque. Prendo $\{u_n\}$ successione di funzioni a scala che rispettano e condizioni di integrabilità e prendo poi la successione di funzioni $\{v_n\}$ dove $v_n = (u_n)^+ = \max\{0, u_n\}$ per ogni n. Essa è sicuramente una successione di funzioni a scala ed è non negativa quasi ovunque. Inoltre per $n \to +\infty$ abbiamo che $v_n \to \max 0h = h$ quasi ovunque e anche che (per la lipschitzianità della funzione parte positiva)

$$\int_A |v_n - v_k|\, dm \leq \int_A |u_n - u_k|\, dm \to 0 \text{ per } n, k \to +\infty.$$

Quindi $\{v_n\}$ è una successione che rispetta le condizioni per l'integrabilità di h. Avremmo perciò che

$$\int_A h\, dm = \lim_{n \to +\infty} \int_A v_n\, dm \geq 0.$$

□

3.1.12 Osservazione. Prima di passare alla giustificazione dell'integrale di Lesbegue, facciamo qualche piccola osservazione che consegue da ciò che abbiamo detto prima:

- Se f è una funzione a scala, allora è integrabile secondo Lesbegue. Basta prendere come successione di funzioni quella che vale costantemente f.

- Se f è integrabile e g è una funzione tale che $g = f$ q.o., allora g è integrabile e l'integrale è uguale a quello della f. Per dimostrarlo basta prendere la stessa successione di funzioni a scala che va bene per la f e dimostrare che va bene anche per g.

- Se f è integrabile, allora sono integrabili anche f^+, f^- e $|f|$ sono integrabili. Infatti, se $\{s_n\}$ è una successione di funzioni a scala che va bene per f, le successioni $\{s_n^+\}$, $\{s_n^-\}$ e $\{s_n^+ + s_n^-\}$ vanno bene rispettivamente per f^+, f^- e $|f|$.

- Se f è integrabile, allora si vede facilmente
$$\left| \int_A f\, dm \right| \leq \int_A |f|\, dm.$$

- Se f e g sono funzioni integrabili, allora lo sono anche le funzioni $u = \max\{f, g\}$ e $v = \min\{f, g\}$. Basta vedere che $u = (f - g)^+ + g$, mentre $v = -(f - g)^- + g$ e applicare le osservazioni precedenti.

3.2 La giustificazione della definizione

3.2.1 Lemma (1). *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura, $\{B_n\}$ una successione di sottoinsiemi di A e definiamo*

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k.$$

Allora valgono le seguenti implicazioni:

1. *se $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n)$ converge, allora B è trascurabile.*
2. *se $x \notin B$, allora esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ $x \notin B_n$.*

□

Dimostrazione. Definiamo la successione $\{B'_n\}$:

$$B'_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$$

in modo tale che $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B'_n$. Applichiamo ora la disuguaglianza dimostrata nella proposizione 3.1.6 e troviamo che per ogni n vale

$$m^*(B) \leq m^*(B'_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m^*(B_k)$$

e se prendo il limite per $n \to \infty$ l'ultimo membro va a 0 per la convergenza della serie e quindi anche B è trascurabile.
Prendiamo $x \notin B$ e, dato che B è l'intersezione di tutti i B'_n, troviamo $\bar{n}$ tale che $x \notin B'_{\bar{n}}$. Infine, se x appartesse ad un altro B_m con $m \geq \bar{n}$ allora rientrerebbe nell'unione che va a formare B'_m e quindi anche in quella che va a formare $B'_{\bar{n}}$, che è più grande. Ne deduciamo che, per ogni $n \geq \bar{n}$, $x \notin B_n$. □

3.2.2 Lemma (2). *Nello stesso quadro di cui sopra, sia $s : A \to \mathbb{R}$ a scala, sia $\varepsilon > 0$ e*

$$B := \{x \in A : \quad |s(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Se

$$\int_A |s| \, dm < \varepsilon^2,$$

allora $m(B) < \varepsilon$. □

Dimostrazione. Osserviamo che, dato che s è a scala, è combinazione di funzioni caratteristiche di insiemi elementari, quindi anche B è unione di insiemi elementari.
Per assurdo, se $m(B) \geq \varepsilon$, allora

$$\int_A |s| \, dm \geq \int_B |s| \, dm \geq \varepsilon \, m(B) \geq \varepsilon^2,$$

che genera un assurdo con la tesi. □

3.2.3 Lemma (3). *Nello stesso quadro di sopra, se una successione di funzioni a scala $\{s_n\}$ verifica la condizione di Cauchy*

$$\lim_{n',n''\to\infty}\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm = 0,$$

allora esiste una sottosuccessione di funzioni a scala $\{s_{n_k}\}$ e una funzione g tali che

1. *$s_{n_k} \to g$ q.o. in A;*
2. *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme $A_\varepsilon \subseteq A$ tale che $m^*(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e*

$$s_{n_k} \to g \quad \text{uniformemente in} \quad A \setminus A_\varepsilon.$$

□

Dimostrazione. Scelgo $\varepsilon = 4^{-k}$ e per ogni k trovo n_k tale che

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm < 4^{-k}$$

per ogni $n', n'' \geq n_k$. In particolare se prendiamo $n' = n_k$ e $n'' = n_{k+1}$ avviene che per ogni k

$$\int_A |s_{n_k} - s_{n_{k+1}}|\, dm \leq 4^{-k}.$$

Definisco due successioni di insiemi

$$P_k = \left\{x \in A : \quad |s_{n_k}(x) - s_{n_{k+1}}(x)| \geq 2^{-k}\right\}$$

$$Q_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} P_i$$

Prendiamo poi in considerazione $x \notin Q_k$, allora

$$|s_{n_i}(x) - s_{n_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}$$

per ogni $i \geq k$ e dunque la serie

$$\sum_{i=k}^{\infty} \left(s_{n_i}(x) - s_{n_{i+1}}(x)\right)$$

converge uniformemente in $A \setminus Q_k$ per il criterio di Weierstrass. Allora anche la successione $\{s_{n_i}\}$ converge uniformemente a $g_k : A \setminus Q_k \to \mathbb{R}$. Notando che $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ abbiamo che

$$A \setminus Q_k \subseteq A \setminus Q_{k+1}$$

e nei punti comuni $(A \setminus Q_k)$ vale $g_{k+1} = g_k$. Poniamo poi

$$Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$$

definiamo $g : A \setminus Q \to \mathbb{R}$ in modo tale che in $A \setminus Q_k$ vale $g = g_k$.
Dal secondo lemma applicato con $\varepsilon^2 = 4^{-k}$ scopriamo che

$$m(P_k) < 2^{-k}$$

e dal primo lemma applicato a $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} P_i$, ricordando che per gli insiemi elementari $m^*(P_k) = m(P_k)$ e che quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} m^*(P_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$$

che converge, scopriamo che Q è trascurabile. Quindi $s_{n_i} \to g$ puntualmente quasi ovunque in A.
Per la seconda tesi dobbiamo provare che per ogni ε esiste A_ε nelle condizioni della tesi. Fissiamo quindi k tale che

$$\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} \leq \varepsilon$$

e osserviamo che basta prendere $A_\varepsilon = Q_k$ per avere $m^*(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Inoltre la convergenza uniforme nell'insieme $A \setminus Q_k = A \setminus A_\varepsilon$ è stata provata sopra. □

3.2.4 Proposizione. *Nel solito quadro, sia $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile, allora il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A s_n \, dm$$

esiste finito e il suo valore non dipende dalla successione $\{s_n\}$ scelta, nelle condizioni della definizione di integrabilità di f. □

Dimostrazione. Il limite esiste per la condizione di Cauchy richiesta nella definizione di integrabilità, infatti per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo n_0 tale che per ogni $n', n'' \geq n_0$ vale

$$\left| \int_A s_{n'} \, dm - \int_A s_{n''} \, dm \right| \leq \int_A |s_{n'} - s_{n''}| \, dm \leq \varepsilon.$$

Dimostriamo ora la seconda tesi. Date due successioni di funzioni a scala $\{S_n^1\}$ e $\{S_n^2\}$ che sono nella condizione della definizione di integrabilità, poniamo $s_n = S_n^1 - S_n^2$. Allora $s_n \to 0$ q.o. (perchè entrambe devono convergere ad f quasi ovunque) e per le s_n è ancora verificata la condizione di Cauchy dato che

$$|s_{n'} - s_{n''}| \leq |S_{n'}^1 - S_{n''}^1| + |S_{n'}^2 - S_{n''}^2| \underset{n',n''\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

, quindi basta dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_A s_n \, dm = 0.$$

Da un certo indice n^* in poi, per non cadere nel banale, supponiamo che l'insieme

$$\{x \in A : s_n(x) \neq 0\}$$

abbia misura diversa da zero. Allora fisso $\varepsilon > 0$ e trovo n_0 tale che per ogni $n', n'' \geq \max\{n^*; n_0\} \geq n^*$ valga

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm \leq \varepsilon.$$

Per quanto detto prima l'insieme

$$B := \{x \in A : s_{n^*}(x) \neq 0\}$$

ha misura diversa da zero.
Sia poi $M > 0$ tale che $|s_{n^*}(x)| \leq M$ per q.o. $x \in A$. Allora dal lemma 3 esistono

$$s_{n_k} \to g \quad \text{q.o.} \quad (g = 0),$$

e la sottosuccessione converge uniformemente a $g = 0$ in $A \setminus A_\varepsilon$, dove $m^*(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, cioè

$$\exists \bar{k} : \forall k \geq \bar{k} \quad |s_{n_k} - 0| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A \setminus A_\varepsilon.$$

Fisso $k \geq \bar{k}$ tale che $n_k \geq n^*$, allora, per quanto detto sopra, vale

$$\int_A |s_n - s_{n_k}|\, dm \leq \varepsilon,\ \forall n \geq n^*.$$

Definisco ora l'insieme C:

$$C := \{x \in A : |s_{n_k}(x)| > \varepsilon\},$$

allora vale che $C \subseteq A_\varepsilon$ e che $m(C) \leq \varepsilon$.
Quindi per $n \geq n^*$

$$\left|\int_A s_n\, dm\right| \leq \int_A |s_n|\, dm \leq \int_A |s_n - s_{n_k}|\, dm + \int_A |s_{n_k}|\, dm$$

$$\leq \varepsilon + \int_{A\setminus B} |s_{n_k}|\, dm + \int_B |s_{n_k}|\, dm$$

Poi, ricordando che in $A \setminus B$ $s_{n^*} = 0$ e che $\int_A |s_n - s_{n^*}|\, dm \leq \varepsilon$, vale

$$\int_{A\setminus B} |s_{n_k}|\, dm = \int_{A\setminus B} |s_{n_k} - s_{n^*}|\, dm \leq \int_A |s_{n_k} - s_{n^*}|\, dm \leq \varepsilon.$$

Ora consideriamo l'insieme $B \setminus C$: esso è incluso in $A \setminus C$, dato che $B \subseteq A$. Per definizione di C, altrove vale che

$$|s_{n_k}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B \setminus C$$

e, ricordando che $|s_{n^*}| \leq M$, possiamo scrivere

$$\int_B |s_{n_k}|\, dm \leq \int_{B\setminus C} |s_{n_k}|\, dm + \int_C |s_{n_k}|\, dm$$

$$\leq \int_{B\setminus C} |s_{n_k}|\,dm + \int_C |s_{n_k} - s_{n^*}|\,dm + \int_C |s_{n^*}|\,dm$$
$$\leq m(B\setminus C)\,\varepsilon + \int_A |s_{n_k} - s_{n^*}|\,dm + m(C)\,M$$
$$\leq m(B\setminus C)\,\varepsilon + \varepsilon + M\,\varepsilon \leq m(B)\,\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = (1 + m(B) + M)\varepsilon.$$

In conclusione abbiamo che

$$\left|\int_A s_n\,dm\right| \leq \varepsilon + \varepsilon + (1 + m(B) + M)\varepsilon = (3 + m(B) + M)\,\varepsilon,$$

e, dato che $m(B)$ e M sono noti all'inizio del discorso, abbiamo la tesi:

$$\lim_{n\to\infty}\int_A s_n\,dm = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\int_A S_n^1\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_A S_n^2\,dm.$$

□

3.2.5 Lemma (4)**.** *Nel quadro della definizione di integrabilità di una funzione f, vale*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |s_n - f|\,dm = 0.$$

□

Dimostrazione. Fissiamo k e definiamo

$$t_n = |s_n - s_k|, \quad \varphi = |f - s_k|.$$

Osserviamo che $t_n \to \varphi$ q.o. e che vale la condizione di Cauchy, dato che

$$|t_{n'} - t_{n''}| \leq |s_{n'} - s_{n''}|.$$

Allora fisso ε e se si usa la definizione di integrale e si può calcolare

$$\int_A |f - s_k|\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_A t_n\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_A |s_n - s_k|\,dm \leq \varepsilon,$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che in corrispondenza di ε trovo che per indici abbastanza grandi vale

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\,dm \leq \varepsilon,$$

quindi scegliendo gli indici come n e k vale

$$\int_A |s_n - s_k|\,dm \leq \varepsilon$$

e la disuguaglianza si conserva al limite, quindi per quella scelta di k (e con un indice più grande) vale

$$\int_A |f - s_k|\,dm \leq \varepsilon.$$

□

3.2.6 Teorema (Teoremone). *Sia* $(A, \mathcal{E}, m)$, $\{f_n\}$ *una successione di funzioni tutte integrabili in* A *tali che valga la condizione di Cauchy*

$$\lim_{n',n''\to\infty} \int_A |f_{n'} - f_{n''}|\, dm = 0.$$

Allora esistono una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ *e una funzione integrabile* f *tali che*

$$f_{n_k} \to f \quad \text{q.o. in } A$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f|\, dm = 0.$$

□

Dimostrazione. Ognuna delle f_n è integrabile e quindi avrà la sua successione di funzioni a scala

$$s_k^n \to f_n \text{ q.o.}, \qquad \int_A |s_{k'}^n - s_{k''}^n|\, dm \underset{k',k''\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Avendo la condizione di Cauchy applico il lemma 3 e il lemma 4 e trovo, tra le s_k^n una funzione che chiamiamo $t_n = s_{k_n}^n$ e un insieme A_n tali che

$$m^*(A_n) \leq 2^{-n}, \quad |f_n(x) - t_n(x)| \leq 2^{-n}\ \forall x \in A \setminus A_n,$$

$$\int_A |t_n - f_n|\, dm \leq 2^{-n}$$

Notiamo che la successione $\{t_n\}$ verifica esattamente una condizione di Cauchy per quanto detto sopra a proposito delle s_k^n, quindi dal lemma 3 trovo una sottosuccessione $\{t_{n_k}\}$ che converge ad una f quasi ovunque ed f è integrabile perchè le t_{n_k} sono a scala e verificano la definizione di integrabilità fi f. Allora valutiamo

$$\int_A |f - f_n|\, dm \leq \int_A |f - t_{n_k}|\, dm + \int_A |t_{n_k} - f_{n_k}|\, dm + \int_A |f_{n_k} - f_n|\, dm.$$

Ora sappiamo che

$$\int_A |t_{n_k} - f_{n_k}|\, dm \leq 2^{-n_k},$$

e a partire da un certo indice $2^{-n_k} \leq \varepsilon$ dal lemma 4 sappiamo che

$$\int_A |f - t_{n_k}|\, dm \leq \varepsilon$$

e dalla condizione di Cauchy messa nelle ipotesi (con la scelta $n' = n_k$ e $n'' = n$) concludiamo che

$$\int_A |f_{n_k} - f_n|\, dm \leq \varepsilon$$

e quindi

$$\int_A |f - f_n|\, dm \leq 3\varepsilon.$$

Dimostriamo poi che la sottosuccessione f_{n_k} (con gli indici n_k scelti prima) converge a f q.o.
Considero
$$B := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_{n_k}$$
e sia $x \notin B$, allora
$$|f - f_{n_k}| \leq |f - t_{n_k}| + |t_{n_k} - f_{n_k}|,$$
dove il primo membro tende a zero quasi ovunque per quanto detto sopra e vale
$$|f_{n_k} - t_{n_k}| \leq 2^{-n_k} \leq \varepsilon$$
a partire da un certo indice. Inoltre B è trascurabile grazie al lemma 1 dato che $\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_{n_i})$ converge:
$$m^*(A_{n_i}) = 2^{-n_i}$$

□

3.3 I teoremi di Beppo Levi e di Lebesgue

3.3.1 Definizione (Successione di funzioni monotona). *Data una successione di funzioni* $\{f_n\}$*, con* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *essa si dice* monotona crescente *se*

$$f_n \leq f_{n+1} \quad q.o.\ in\ A \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si dice monotona decrescente *se*

$$f_n \geq f_{n+1} \quad q.o.\ in\ A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

3.3.2 Teorema (di Beppo Levi, prima parte). *Nel quadro degli spazi di misura, sia* $\{f_n\}$*, con* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *un successione monotona di funzioni integrabili tale che* $\left\{\int_A f_n\, dm\right\}$ *sia limitata. Allora esiste una funzione* f *integrabile tale che* $f_n \to f$ *quasi ovunque in* A *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm = \int_A f\, dm.$$

□

Dimostrazione. Supponiamo che la successione sia monotona crescente. Allora si conserva la disuguaglianza sotto il segno di integrale:

$$\int_A f_n\, dm \leq \int_A f_{n+1}\, dm \quad \forall n.$$

Quindi la successione numerica $\left\{\int_A f_n\, dm\right\}$ è crescente e limitata. Allora chiamo $I := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm$.
Prendo quindi n', n'' tali che $n'' \geq n'$ (ricordando che dalla monotonia vale $(f_{n''} - f_{n'}) = |f_{n''} - f_{n'}|$):

$$\int_A (f_{n''} - f_{n'})\, dm = \int_A |f_{n''} - f_{n'}|\, dm = \int_A f_{n''}\, dm - I + I - \int_A f_{n'}\, dm \underset{n',n''\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dato che la successione degli integrali converge a I e quindi sono verificate le ipotesi di Cauchy del teoremone. Allora trovo f come nella tesi e una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge a f quasi ovunque. Per dimostrare che anche la successione madre $\{f_n\}$ converge a f per ogni $j \in \mathbb{N}$ esistono n_k e n_{k+1} tali che

$$f_{n_k} \leq f_j \leq f_{n_{k+1}} \quad \text{q.o.}$$

e basta prendere il limite per concludere che f_n non può che convergere a f. Infine, dato che dal teoremone vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f|\, dm = 0.$$

allora vale anche il limite della tesi. □

3.3.3 Corollario. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni tutte integrabili e non negative quasi ovunque.*
Se converge la serie numerica degli integrali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A u_n \, dm,$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

converge q.o. e la sua funzione somma u è integrabile e il suo integrale vale la serie degli integrali (si può integrare termine a termine):

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A u_n \, dm.$$

□

3.3.4 Proposizione. *Sia $\{f_n\}$una successione di funzioni integrabili e non negativa, allora la funzione f definita come $f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}$ è integrabile e*

$$\int_A f \, dm \leq \int_A f_n \, dm \quad \forall n$$

□

Dimostrazione. f è non negativa.
Definiamo $g_n(x) = \min\{f_1(x) \dots f_n(x)\}$, le g_n sono tutte integrabili ed inoltre $g_n \geq g_{n+1}$ q.o. in A. $\{g_n\}$ è monotona decrescente

$$0 \leq \int_A g_n \, dm \leq \int_A g_1 \, dm = \int_A f_1 \, dm$$

Dunque la successione degli intergali $\{\int_A g_n \, dm\}$ è limitata. Ci sono tutte le ipotesi per poter applicare Beppo-Levi e succede che $g_n \to g$ q.o., g integrabile tale che $\int_A g \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n \, dm$; $g = f$ q.o., f è integrabile. □

3.3.5 Teorema (Lemma di Fatou). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzione integrabili e non negative tali che la successione degli integrali $\{\int_A f_n \, dm\}$ sia limitata, allora la funzione f definita come $f(x) = \liminf_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$ è integrabile e vale*

$$\int_A f \, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, dm$$

□

Dimostrazione. $f(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} f_k(x))$.
Definisco $u_n = \inf_{k\geq n} f_k(x)$, dalla proposizione precedenti sappiamo che sono tutte integrabili, e $\int_A u_n(x) \, dm \leq \int_A f_n(x) dm$, quindi la successione $\{\int_A u_n \, dm\}$ è

limitata,vale $u_n \leq u_{n+1} \rightarrow \{u_n\}$ è una successione monotona crescente di funzioni integrabili. Esiste dunque una funzione u tale che $u_n \to u$ q.o. e $\int_a u\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A u_n\, dm$. Abbiamo però che per quasi ogni $x \in A$

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} \{u_k(x)\}) = \liminf_{n\to\infty} u_n(x) = f(x)$$

Infine, dato che $u_n \leq f_n$, abbiamo che

$$\int_A f\, dm = \int_A u\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A u_n\, dm = \liminf_{n\to\infty} \int_A u_n\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm$$

□

3.3.6 Teorema (Lemma di Fatou versione estesa). *Sia f_n una successione di funzioni integrabili tale che la successione $\left\{\int_A f_n\, dm\right\}$ sia limitata*

1. *se esiste una funzione integrabile φ tale che $f_n \geq \varphi$ q.o. in A, $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\liminf_{n\to\infty} f_n$ è integrabile e vale*

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm$$

2. *se esiste una funzione integrabile ψ tale che $f_n \leq \psi$ q.o in A, $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\limsup_{n\to\infty} f_n$ è integrabile e vale*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm \leq \int_A \limsup_{n\to\infty} f_n\, dm$$

□

Dimostrazione parte 1. Imponiamo $g_n = f_n - \varphi$, queste funzioni sono integrabili, non negative, e la relativa successione degli integrali limitata.
Dal lemma di Fatou abbiamo la disuguaglianza:

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} g_n\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A g_n\, dm$$

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n\, dm - \int_A \varphi\, dm \leq \left(\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm\right) - \int_A \varphi\, dm.$$

Quest'ultimo passaggio si basa sul fatto che per $x \in A$ vale $\liminf_{n\to\infty}(f_n(x) - \phi(x) = (\liminf_{n\to\infty} f_n(x)) - \phi(x)$ il che è abbastanza facile da dimostrare.
Dimostrazione parte 2. Sappiamo per ipotesi che $-f_n \geq -\psi$ q.o. in A, si applica la parte 1 del lemma alla successione $\{-f_n\}$

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} (-f_n)\ dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A -f_n\, dm \leq \limsup_{n\to\infty} \int_A -f_n\, dm$$

$$\int_A - \liminf_{n\to\infty} (f_n)\ dm \leq - \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm \leq - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm$$

$$\int_A \limsup_{n\to\infty} f_n\, dm \geq \int_A \liminf_{n\to\infty} f_n\, dm \geq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm \geq \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm.$$

□

3.3.7 Teorema (di Lebesgue). *Nel quadro degli spazi di misura, sia $\{f_n\}$, con $f_n : A \to \mathbb{R}$ un successione di funzioni integrabili tali che f_n converga ad una funzione f q.o. in A e esista una funzione φ integrabile tale che*

$$|f_n| \leq \varphi \quad \text{q.o. in } A \quad \forall n.$$

Allora f è integrabile e vale

$$\int_A f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm.$$

□

Dimostrazione. Per ogni n vale

$$-\varphi \leq f_n \leq \varphi$$

e facendo l'integrale di tutti i membri risulta

$$\int_A (-\varphi)\, dm \leq \int_A f_n\, dm \leq \int_A \varphi\, dm.$$

Dato che i due membri esterni sono integrabili, anche $\left\{\int_A f_n\, dm\right\}$ è una successione limitata. Allora posso applicare il lemma di Fatou e ho

$$\int_A (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm \leq \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm \leq \int_A (\limsup_{n\to\infty} f_n)\, dm$$

dove il primo e l'ultimo membro sono integrabili sempre per Fatou. Ma dato che $f_n \to f$ il massimo e il minimo limite sono uguali e ho che

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

quindi la f è integrabile, dato che gioca il ruolo del massimo e minimo limite in Fatou.
Infine, sfruttando gli ultimi due risultati possiamo scrivere

$$\int_A f\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm \leq \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm \leq \int_A f\, dm,$$

che ci assicura che quelle sono tutte uguaglianze e vale

$$\int_A f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm$$

□

3.3.8 Corollario. *Nelle condizioni del teorema di Lebesgue, vale che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f|\, dm = 0.$$

□

Dimostrazione. Definiamo $h_n := |f_n - f|$. Allora le h_n sono integrabili perchè il teorema di Lebesgue ci assicura che f lo è e le h_n sono dominate da

$$|h_n| = |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq \varphi + |f|.$$

E sapendo che $h_n(x) \to 0$ per quasi ogni $x \in A$ la dimostrazione è subito conclusa applicando il Teorema di Lebesgue. □

3.3.9 Teorema (**di Beppo Levi, seconda parte**)**.** *Sia $\{f_n\}$ una successione monotona di funzioni integrabili. Se la successione $\left\{\int_A f_n \, dm\right\}$ non è limitata, allora vale almeno una delle due proposizioni:*

- *la successione $\{f_n\}$ converge quasi ovunque ad una funzione f non integrabile.*
- *l'insieme dei punti in cui essa diverge non è trascurabile.*

□

Dimostrazione. Supponiamo che la successione sia crescente e per assurdo neghiamo la tesi. Se non vale la seconda della tesi questo vuol dire che l'insieme $\{x \in A : \{f_n(x)\}$ diverge $\}$ è trascurabile. Quindi $\{f_n\}$ converge q.o. a una funzione che chiamo f. Dato che non vale nemmeno la seconda proposizione, tale f deve essere per forza integrabile. Detto questo, data la monotonia della nostra successione, L'integrabilità di ogni f_n e di f, abbiamo che

$$f_1(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \text{ per q.o. } x \in A \Rightarrow \int_A f_1 \, dm \leq \int_A f_n \, dm \leq \int_A f \, dm$$

Questo dimostra che la successione $\{\int_A f_n \, dm\}$ é limitata, il che è assurdo. □

3.3.10 Corollario. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni tutte integrabili e non negative quasi ovunque.*
Se diverge la serie numerica degli integrali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A u_n \, dm,$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

o converge q.o. ad una funzione somma u che non è integrabile, oppure l'insieme dei punti in cui essa diverge non è trascurabile. □

3.3.11 Esempio. Sia α un parametro reale e strettamente positivo. Definisco le funzioni f_α come

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \ \alpha > 0$$

Vogliamo studiarne ora l'integrabilità di questa funzione prima in $(0, 1)$ e poi in $(1, +\infty)$. Consideriamo il primo caso e cerchiamo una successione di funzioni che mi permetta di applicare uno dei teoremi che abbiamo elencato e dimostrato prima. A tale scopo prendiamo la successione $\{f_n\}$ definita come

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x^\alpha \text{ se } x \in (1/n, 1) \\ 0 \text{ se } x \in (0, 1/n] \end{cases}$$

Esse sono integrabili secondo Riemann in $(0, 1)$. Vedremo che l'integrabilità secondo Riemann implica quella secondo Lebesgue e che l'integrale si conserva. Abbiamo quindi che

$$\int_{(0,1)} f_n \, dm = \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \begin{cases} \ln(n) \text{ se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(1 - n^{\alpha-1}) \text{ se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

A questo punto vediamo che se $\alpha \in (0, 1)$ la successione degli integrali converge a $1/(1-\alpha)$, quindi, usando la prima parte del Teorema di Beppo-Levi, la funzione f_α è integrabile e il suo integrale deve essere il limite di questa successione. Nel caso in cui $\alpha \in [1, +\infty)$ la successione degli integrali diverge. Quindi, per la seconda parte del Teorema di Beppo-Levi, la f_α non è integrabile. Infatti, l'insieme dei punti di $(0, 1)$ tale che la successione $\{f_n(x)\}$ diverge è vuota e quindi l'unica tesi che può valere è quella della non integrabilità di f_α.
Per quanto riguarda il secondo caso basta prendere la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x^\alpha \text{ se } x \in (1, n + 1) \\ 0 \text{ se } x \geq n + 1 \end{cases}$$

Rifacendo i conti possiamo vedere che in questo caso la situazione si ribalta. Infatti f_α è integrabile in $(1, +\infty)$ se $\alpha > 1$, mentre negli altri casi no.

$\square$

3.4 Funzioni e sottoinsiemi misurabili

3.4.1 Definizione. *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è detta* misurabile *se esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni a scala tale che $s_n \to f$ q.o. in A.* □

3.4.2 Teorema (Condizione necessaria e sufficiente di integrabilità). *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e sia $f : A \to \mathbb{R}$, allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1. *f è integrabile,*
2. *f è misurabile* e *$\exists\ \varphi$ integrabile in A tale che*
$$|f| \leq \varphi \quad \text{q.o. in } A,$$
3. *f è misurabile* e *$|f|$ è integrabile.*

□

Dimostrazione.

1) implica 3)
Abbiamo ovviamente la misurabilità dalla successione di funzioni a scala che verifica la definizione di integrabilità e la integrabilità di $|f|$ è già stata dimostrata precedentemente.

3) implica 2)
Basta prendere come φ proprio $|f|$ e la 2) è verificata.

2) implica 1)
Consideriamo il caso in cui f sia positiva (altrimenti il tutto si applica a f^+ e f^-, ricordando che $f = f^+ - f^-$). Chiamo $\{s_n\}$ la successione di funzioni a scala che verifica la misurabilità. Definiamo quindi
$$g_n := \min\{s_n^+, \varphi\}$$
e verifichiamo che
$$\lim_{n\to\infty} g_n = \min\{f_n^+, \varphi\} = f^+ = f$$
quasi ovunque. Vale quindi
$$0 \leq g_n \leq \varphi,$$
il che ci permette di applicare il teorema di Lebesgue e concludere l'integrabilità. □

3.4.3 Proposizione. *Se f è misurabile allora sono misurabili anche $f^+, f^-, |f|$. Se f, g sono misurabili allora anche $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $\max\{0, f - g\}$, f/g (nel caso in cui, ovviamente, g non prenda quasi mai valori nulli).* □

3.4.4 Proposizione. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo limitato e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua o monotona. Allora f è misurabile.* □

3.4.5 Teorema. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che converge q.o. a una funzione f. Allora anche f è misurabile.*

Dimostrazione. Costruiamo innanzitutto una funzione φ strettamente positiva e integrabile in A. Se A fosse un elemento del semi-anello $\mathcal{E}$ e la sua misura fosse finita, allora basterebbe prendere la funzione che vale identicamente 1. In caso contrario noi sappiamo, per le proprietà degli spazi di misura, che esiste una successione di insiemi elementari $\{E_n\}$ tale che

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Chiediamo adesso che tutti gli E_n siano a due a due disgiunti e che nessuno di essi sia trascurabile (il che si può sempre fare con un po' di fatica e tanta pazienza). Fatto ciò, definisco φ come

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{E_n}(x)}{n^2 m(E_n)} \,,$$

dove χ_{E_n} è la funzione caratteristica del generico E_n. Questa funzione è ben definita per le condizione poste precedentemente e per il Criterio del confronto delle serie ed è anche strettamente positiva. Se consideriamo la successione delle ridotte, che sono tutte funzioni a scala, e studiamo la serie degli integrali otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \frac{\chi_{E_n}}{n^2 m(E_n)}\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(E_n)}{n^2 m(E_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Abbiamo quindi che la serie degli integrali converge e possiamo applicare il Teorema di Beppo-Levi per dimostrare l'integrabilità di φ. Ora prendiamo la successione di funzioni $\{u_n\}$ definite come

$$u_n(x) = \varphi(x) \tanh(f_n(x))$$

Data la continuità della tangente iperbolica, abbiamo che $u_n(x) \to u(x) = \varphi(x) \tanh(f(x))$ per ogni $x \in A$. Inoltre abbiamo che u_n è misurabile (basta applicare le Proposizioni precedenti) per ogni indice n e inoltre si ha che

$$|u_n(x)| = |\varphi(x)||\tanh(f_n(x))| < |\varphi(x)| = \varphi(x), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in A$$

Applico a questo punto il Teorema di Lebesgue della convergenza dominata per dimostrare che la funzione limite u è integrabile e quindi misurabile. A questo punto posso scrivere la seguente relazione

$$f(x) = \tanh^{-1}\left(\frac{u(x)}{\varphi(x)}\right)$$

che vale sempre in quanto φ non è mai nulla e la funzione u/φ da valori sempre compresi nell'intervallo $(-1, 1)$. A questo punto la misurabilità di f è garantita dalla continuità di $\tanh^{-1}$ in un intervallo limitato e dalla misurabilità di u/φ. □

3.4.6 Proposizione. *Se f_n è una successione di funzioni misurabili, allora anche* $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$
sono misurabili.(Ovviamente quando questi sono ben definiti, $\neq \infty$) □

Dimostrazione. Imponiamo

$$g_n(x) = \min\left(f_1(x)\dots f_n(x)\right),$$

g_n è misurabile in quanto minimo di funzioni misurabili in numero finito. g_n per $n \to \infty$ converge a

$$g(x) = \inf_{j\in\mathbb{N}}\left(g_j(x)\right),$$

allora anche g è misurabile grazie alla proposizione precedente. □

3.4.7 Corollario. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

converga quasi ovunque in A. Allora la sua somma è misurabile. □

3.4.8 Definizione (Misurabilità di sottoinsiemi). *Dato uno spazio di misura $(A, \mathcal{E}, m)$ e $B \subseteq A$. Diciamo che B è misurabile secondo Lebesgue quando la sua funzione caratteristica χ_B è misurabile. Inoltre se χ_B è anche integrabile poniamo $m(B) = \int_A \chi_B\, dm$, altrimenti poniamo $m(B) = +\infty$.* □

3.4.9 Definizione (Integrabilità su sottoinsiemi). *Dato uno spazio di misura $(A, \mathcal{E}, m)$ e $B \subseteq A$ e una funzione $f : B \to \mathbb{R}$. Dico che f è integrabile se la sua estensione $\widetilde{f}$ definita come*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in B \\ 0 \text{ se } x \in A\backslash B \end{cases}$$

è integrabile su A. Inoltre definisco

$$\int_B f\, dm = \int_A \widetilde{f}\, dm$$

3.4.10 Osservazione. Innanzitutto osserviamo che L'insieme vuoto $\emptyset$ e quello ambiente A sono misurabili. Infatti, la funzione caratteristica dell'insieme vuoto è identicamente nulla su tutto A, perciò è addirittura integrabile. Invece l'insieme vuoto può essere visto come unione di una successione insiemi elementari $\{E_n\}$ e questo ci permette di dire

$$\chi_A = \lim_{k\to\infty} \chi_{F_k} \text{ dove } F_k = \bigcup_{n=1}^{k} E_n$$

che ne dimostra la misurabilità.
Poi osserviamo che se $B \subseteq A$ è misurabile, allora anche $A\backslash B$ lo è dato che

$$\chi_{A\backslash B} = \chi_A - \chi_B$$

Infine se $B, C \subseteq A$ sono misurabili abbiamo che anche $B \cup C$, $B \cap C$ e $B \backslash C$ lo sono in quanto

$$\chi_{B\cup C} = \max\{\chi_B, \chi_C\}$$
$$\chi_{B\cap C} = \min\{\chi_B, \chi_C\}$$
$$\chi_{B\backslash C} = \chi_B - \chi_{B\cap C}$$

che sono tutte funzioni misurabili.

3.4.11 Teorema (**σ-additività**). *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e sia $\{B_n\}$ una successione di insiemi misurabili con $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, allora B è misurabile. Se inoltre $B_i \cap B_j = \emptyset$, con $i \neq j$ e se f è una funzione integrabile su B allora*

$$m(B) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \qquad \int_B f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f\, dm$$

□

Dimostrazione. Per provare la prima tesi si prenda la successione monotona di insiemi misurabili $\{B'_n\}$ definiti nel seguente modo:

$$B'_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Allora la successione delle funzioni caratteristiche misurabili $\{\chi_{B'_n}\}$ converge q.o. alla funzione caratteristica di B che quindi è misurabile. Proviamo ora la seconda tesi. Con le ipotesi aggiuntive abbiamo che

$$\int_A \chi_{B'_n} = \sum_{k=1}^{n} m(B_k)$$

Adesso studiamo i tre casi in cui la successione degli integrali di $\chi_{B'_n}$ può comportarsi. Nel primo caso tale successione è limitata. Allora anche

$$\{\sum_{k=1}^{n} m(B_k)\}$$

è una successione limitata. Ma essendo anche monotona, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$$

converge e la sua somma deve essere $m(B)$. Nel secondo caso invece abbiamo che esiste un indice $\overline{n}$ tale che

$$m(B'_{\overline{n}}) = \sum_{k=1}^{\overline{n}} m(B_k) = +\infty$$

Ma dato che $m(B) \geq m(B'_{\overline{n}}) = +\infty$, l'uguaglianza è ancora verificata. Nell'ultimo caso abbiamo che $m(B'_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma la successione $\{m(B'_n)\}$ non è limitata. Questo implica che anche la serie $\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ diverge all'infinito. se prendo ora le funzioni caratteristiche χ_{B_k}, che sono tutte non negative e integrabili, so che $\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{B_k} = \chi_B$, ma essendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_A \chi_{B_k}\, dm = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$$

abbiamo che $m(B) = +\infty$ per la seconda parte del Teorema di Beppo-Levi. Prendiamo ora una funzione f come da ipotesi e osserviamo che

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{B_k} \text{ in } B \text{ e } \left|\sum_{k=1}^{n} f\chi_{B_k}\right| \leq |f|$$

Allora possiamo applicare il Teorema di Lebesgue del passaggio al limite sotto il degno di integrale per provare l'ultima parte della nostra tesi. □

3.4.12 Teorema (di continuità della misura). *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura,$\{B_n\}$ una successione crescente di insiemi misurabili, cioè $B_n \subseteq B_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e sia*

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

allora B è misurabile e

$$m(B) = \lim_{n\to\infty} m(B_n).$$

Mentre se $f : B \to \mathbb{R}$ è integrabile su B, allora vale

$$\int_B f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f\, dm$$

Sia inoltre $\{C_n\}$ una successione decrescente di insiemi misurabili, cioè $C_{n+1} \subseteq C_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ con $m(C_1) < \infty$ allora

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

è misurabile e

$$m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C_n).$$

□

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima parte della tesi. Iniziamo con il dire che l'insieme B può essere riscritto come

$$B = B_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} B_k \backslash B_{k-1}\right)$$

cioè come unione di insiemi misurabili a due a due disgiunti. Quindi possiamo applicare il teorema precedente e dire che B è misurabile e la sua misura è data dalla seguente formula:

$$m(B) = \lim_{n\to\infty} m(B_1) + \sum_{k=2}^{n} m(B_k \backslash B_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} m(B_n)$$

e in modo analogo la formula per l'integrale di f. □

3.4.13 Proposizione. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e $c \in \mathbb{R}$. Allora gli insiemi*

$$\{x \in A : f(x) \le c\},$$
$$\{x \in A : f(x) \ge c\}$$

sono misurabili. (Lo sono anche quelli con le disuguaglianze strette.) □

3.4.14 Teorema. *Sia $f : A \times I \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile secondo Lebesgue e $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che*

1. *$x \longmapsto f(x, t)$ sia integrabile in A per ogni $t \in I$*
2. *$t \longmapsto f(x, t)$ sia derivabile in I per quasi ogni $x \in A$*
3. *esista g integrabile in A tale che*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \le g(x) \quad \text{per q.o. } x \in A, \ \forall t \in I.$$

Allora la funzione

$$\varphi : I \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) := \int_A f(x, t)\, dx \quad \forall t \in I$$

risulta derivabile $\forall t \in I$ e vale che

$$\varphi'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx \quad \forall t \in I$$

□

Dimostrazione. Fissiamo $t_0 \in I$ e troviamo $h \neq 0$ tale che $t_0 + h \in I$. Allora abbiamo che

$$\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \int_A \psi_h(x)\, dx, \quad \text{dove} \quad \psi_h(x) := \frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h}.$$

Per $h \to 0$, $\psi_h \to \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ quasi ovunque in A e, usando il teorema del valor medio di Lagrange troviamo $\bar{t} \in (t_0, t_0 + h)$ tale che valga

$$|\psi_h(x)| = \frac{1}{|h|}|f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0 + \vartheta h)\right| \le g(x), \quad \text{con } \vartheta = \frac{\bar{t} - t_0}{h} \in (0, 1).$$

Posto ora $\delta := \min\{t_0 - a, b - t_0\}$ abbiamo che la disuguaglianza vale per ogni $h \in (-\delta, \delta)$ con $h \neq 0$. Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di Lebesgue dalla quale scopriamo che ψ_h è integrabile possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\varphi'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_A \psi_h(x)\, dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, dx.$$

Dato che esiste il limite del rapporto incrementale, la φ è derivabile e vale la formula $\forall t_0 \in I$. □

3.4.15 Proposizione. *Tutti gli aperti e tutti i chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili.* □

Dimostrazione. Dato che ogni chiuso è complementare di un aperto, consideriamo Ω aperto. Sia poi $Q_k(P_n)$ il quadrato aperto di lato $1/k$ centrato nel punto P_n. Se come P_n vado a prendere tutti i punti razionali inclusi in Ω, che formano una successione essendo numerabili. I quadrati $Q_k(P_n)$ sono quindi numerabili e se considero solo quelli inclusi in Ω ho ancora una famiglia numerabile. La tesi ora è che

$$\Omega = \bigcup_{k,n} Q_k(P_n), \quad \text{con} \quad Q_k(P_n) \subseteq \Omega.$$

Considero quindi un generico $x \in \Omega$ e dato che esso è aperto trovo $r > 0$ tale che il quadrato chiuso di lato $2r$ sia incluso in Ω. Tra i punti di questo quadrato N-dimensionale prendo un punto a coordinate razionali che disti da x meno di $r/2$ e lo chiamo y. Allora il quadrato che ha per centro y e per lato r è incluso nel quadrato centrato in x trovato prima e quindi è incluso anche in Ω e contiene x. Per cui il generico punto x fa parte di quell'unione. □

3.4.16 Proposizione (Caratterizzazione di funzioni misurabili). *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f^{-1}(\Omega)$ è un sottoinsieme misurabile di A.* □

3.4.17 Proposizione. *Nel quadro degli spazi di misura sia $B \subseteq A$. Allora B è trascurabile se e solo se B è misurabile e $m(B) = 0$.* □

3.4.18 Proposizione (1)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora*

$$\int_A |f| \, dm = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad f = 0 \textit{ q.o. in } A.$$

□

Dimostrazione. Proviamo che

$$D := \{x \in A : f(x) \neq 0\}$$

è trascurabile. Siano

$$D_n := \{x \in A : |f(x)| > 1/n\}$$

allora vale che

$$\frac{m(D_n)}{n} = \int_{D_n} \frac{dm}{n} \leq \int_{D_n} |f| \, dm \leq \int_A |f| \, dm = 0.$$

Ne concludiamo che, dato che $D = \bigcup D_n$, $m(D) = 0$. □

3.4.19 Proposizione (2)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile. Se per ogni $B \subseteq A$ misurabile vale $\int_B f \, dm = 0$, allora $f = 0$ q.o. in A.* □

Dimostrazione. Prendo $B = \{x \in A : f(x) > 0\}$ e applico la dimostrazione della proposizione precedente a f^+ (poi faccio il contrario con f^-). □

3.4.20 Proposizione (3. **Continuità dell'integrale**). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $B \subseteq A$ misurabile con $m(B) \leq \delta$ ho*

$$\left| \int_B f\, dm \right| \leq \varepsilon.$$

□

Dimostrazione. Definisco una successione

$$g_n := \min\{|f|, n\} \to |f|,$$

e verifico che è monotona: $\min\{|f|, n\} = g_n \leq g_{n+1} \leq \min\{|f|, n+1\}$. Inoltre la successione degli integrali di g_n è limitata, poichè $|f|$ è integrabile e $g_n \leq |f|$, e si può applicare Beppo Levi. (Volendo si può applicare Lebesgue perche g_n è dominata da $|f|$). Allora scopriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \Big| |f| - g_n \Big|\, dm = \int_A \lim_{n\to\infty} (|f| - g_n)\, dm = 0$$

e quindi fisso $\varepsilon > 0$ e trovo almeno un indice n tale che

$$\int_A (|f| - g_n)\, dm \leq \varepsilon.$$

Allora scelgo $\delta = \varepsilon/n$, B nelle condizioni della tesi e ho

$$\int_B (|f| - g_n)\, dm \leq \int_A (|f| - g_n)\, dm, \qquad \int_B |f|\, dm \leq \int_A (|f| - g_n)\, dm + \int_B g_n\, dm.$$

Quindi vale

$$\left| \int_B f\, dm \right| \leq \int_B |f|\, dm \leq \int_A (|f| - g_n)\, dm + \int_B g_n\, dm \leq \varepsilon + n\, m(B) \leq 2\varepsilon.$$

□

3.5 Il calcolo degli integrali

3.5.1 Teorema. *Sia* $(A, \mathcal{E}, m)$ *uno spazio di misura,* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile nel senso di Riemann. Allora essa è anche integrabile nel senso di Lebesgue e gli integrali coincidono.* □

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione di integrabilità nel senso di Riemann:

$$\mathcal{I}_+ := \left\{ \int_A s_+ \, dm, \text{ con } s_+ \text{ a scala tali che } s_+ \geq f \right\}$$

$$\mathcal{I}_- := \left\{ \int_A s_- \, dm, \text{ con } s_- \text{ a scala tali che } s_- \leq f \right\}$$

f è integrabile quando $\sup \mathcal{I}_- = \inf \mathcal{I}_+ = I$ e chiamiamo I l'integrale nel senso di Riemann. Per la definizione di inf e di sup, per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovo s_n e t_n a scala tali che

$$s_n \leq f \leq t_n \text{ in } A, \quad I - 2^{-n} \leq \int_A s_n \, dm, \quad \int_A t_n \, dm \leq I + 2^{-n}.$$

Costruiamo delle successioni di funzioni a scali con proprietà di monotonia per poter applicare poi il teorema di Beppo Levi:

$$\sigma_n(x) = \max_{1 \leq k \leq n} s_k(x) \quad \tau_n(x) = \min_{1 \leq k \leq n} t_k(x)$$

$$\sigma_n \leq \sigma_{n+1} \quad \tau_n \geq \tau_{n+1}$$

Allora applichiamo Beppo Levi a $\{\sigma_n\}$ e $\{\tau_n\}$: troviamo quindi σ e τ, funzioni integrabili tali che $\sigma_n \to \sigma$, $\tau_n \to \tau$ q.o. e

$$\int_A \sigma_n \, dm \to \int_A \sigma \, dm \quad \int_A \tau_n \, dm \to \int_A \tau \, dm.$$

D'altra parte se mettiamo insieme le disuguaglianze abbiamo:

$$I - 2^{-n} \leq \int_A s_n \, dm \leq \int_A \sigma_n \, dm \leq \int_A \tau_n \, dm \leq \int_A t_n \, dm \leq I + 2^{-n}$$

quindi tutti i membri non possono fare altro che convergere a I e dalla linearità abbiamo

$$\int_A (\tau - \sigma) \, dm = 0$$

con $\sigma \leq f \leq \tau$, da cui $(\tau - \sigma) \geq f - \sigma \geq 0$. Allora $(\tau - \sigma) = 0$, cioè $\tau = \sigma = f$ quasi ovunque, per cui f è integrabile secondo Lebesgue e

$$\int_A f \, dm = I.$$

□

3.5.2 Teorema (Integrabilità per unione crescente). *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e sia $\{B_n\}$ una successione di insiemi misurabili tali che*

$$B_n \subseteq B_{n+1} \ \forall n, \quad B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Sia poi $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Allora f è integrabile su B se e solo se f è integrabile su ogni insieme B_n e esiste finito $\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |f| \, dm$. in tali condizioni vale anche

$$\int_B f \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f \, dm.$$

□

Dimostrazione. Ipotizziamo innanzitutto che f sia integrabile su B. Questo implica ovviamente l'integrabilità di $|f|$ su B e quindi su tutti i sottoinsiemi misurabili B_n. Ma abbiamo che

$$\int_{B_n} |f| \, dm = \int_B |f| \chi_{B_n} \, dm$$

e quest'ultimo integrale converge per $n \to \infty$ a $\int_B |f| \, dm$ per il Teorema di Beppo-Levi (in questo caso si potrebbe usare anche quello di Lebesgue). Al contrario supponiamo valgano queste ultime due condizioni e dimostriamo che f sia integrabile su B. Se $|f|$ è integrabile su B_n per ogni n, allora esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |f| \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_B |f| \chi_{B_n} \, dm$$

quindi la successione $\{\int_B |f| \chi_{B_n} \, dm\}$ è limitata e questo implica, per la prima parte del Teorema di Beppo-Levi che $|f| \chi_{B_n}$ converge ad una funzione integrabile su B. Ma questa funzione è per forza $|f|$ e questo prova l'integrabilità di f. □

3.5.3 Teorema (Integrabilità per unione disgiunta). *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e sia $\{B_n\}$ una successione di insiemi misurabili tali che*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \ \text{ se } i \neq j, \quad B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è integrabile su ognuno dei B_n allora
f è integrabile su B se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} |f| \, dm$ *converge. In quelle condizioni inoltre vale*

$$\int_B f \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f \, dm$$

□

3.5.4 Esempio. Prendiamo lo spazio di misura del contare visto in precedenza definito dalla terna $(\mathbb{N}, \mathcal{E}, \#)$ e prendiamo una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che definisce perciò una particolare successione reale. Iniziamo col dire subito che f è senz'altro misurabile. Infatti prendiamo la seguente successione $\{s_k\}$ di funzioni a scala (che nel nostro caso sono tutte e sole le funzioni che valgono 0 da un certo indice in poi):

$$s_k(n) = \begin{cases} f(n) \text{ se } n \leq k \\ 0 \text{ se } n > k \end{cases}$$

Questa converge puntualmente a f. Ora vogliamo trovare le condizione necessarie per l'integrabilità di tale f. A tale scopo prendiamo la successione a scala definita come sopra. Sappiamo che per l'integrabilità deve valere la condizione di Cauchy:

$$\int_{\mathbb{N}} |s_k - s_j| \, d\# \to 0 \text{ per } j, k \to \infty$$

Ma questo equivale a dire che

$$\sum_{i=j+1}^{k} |f(i)| \to 0 \text{ per } j, k \to \infty$$

e questa condizione è vera se e solo se la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |f(i)|$ converge. Abbiamo quindi che tutte e sole le funzioni che definiscono una successione la cui serie converge assolutamente è integrabile e, in tal caso, vale

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\# = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

□

3.5.5 Teorema (di Fubini). *Siano $(A', \mathcal{E}', m')$ e $(A'', \mathcal{E}'', m'')$ due spazi di misura e sia $(A, \mathcal{E}, m)$ lo spazio prodotto. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile con $x' \in A'$, $x'' \in A''$, allora*

1. *per m'-q.o. $x' \in A'$, $x'' \longmapsto f(x', x'')$ è integrabile su A''*
2. *la funzione $x' \longmapsto \int_{A''} f(x', x'') \, dm''$ è integrabile su A'.*

Le tesi valgono anche con i ruoli del primo e del secondo spazio di misura invertiti. Vale inoltre

$$\int_A f \, dm = \int_{A'} \left(\int_{A''} f(x', x'') \, dm'' \right) dm' = \int_{A''} \left(\int_{A'} f(x', x'') \, dm' \right) dm''$$

□

3.5.6 Osservazione. La prima tesi del teorema nel quadro dell'integrale di Riemann era da verificare come ipotesi.

3.5.7 Teorema (di Tonelli). *Siano $(A', \mathcal{E}', m')$ e $(A'', \mathcal{E}'', m'')$ due spazi di misura e sia $(A, \mathcal{E}, m)$ lo spazio prodotto. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ misurabile tale che*

1. *per m'-q.o. $x' \in A'$, $\int_{A''} |f(x', x'')| \, dm'' < +\infty$ (cioè $x'' \longmapsto |f(x', x'')|$ è integrabile su A'',*

2. *$\int_{A'} \left(\int_{A''} f(x', x'')\, dm'' \right) dm' < +\infty$ (cioè $x' \longmapsto \int_{A''} f(x', x'')\, dm''$ è integrabile in A'*

allora f è integrabile in A.
La tesi vale con i ruoli scambiati.

3.5.8 Esempio (L'integrale di Poisson). Calcoliamo il famoso integrale di Poisson, ovvero

$$I(n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

La funzione è sicuramente integrabile per ogni n, dato che è possibile maggiorare l'argomento con la funzione $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^{n+1}}$. Consideriamo quindi lo spazio prodotto $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}, m)$ dotato della misura ordinaria e la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Il teorema di Fubini ci assicura che vale

$$I(2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = I^2(1).$$

E quindi

$$I(n) = I^n(1).$$

Calcoliamo $I(2)$ applicando un cambio di variabile in coordinate polari: $\rho^2 = x^2 + y^2$, $dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\vartheta$.

$$I(2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \; e^{-\rho^2} \rho.$$

Procediamo usando la sostituzione $t = \rho^2$, $dt = 2\rho$:

$$I(2) = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 2\rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi [e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = \pi$$

Ne concludiamo che $I(2) = I^2(1) = \pi$ e quindi

$$I(n) = \pi^{n/2}$$

□

3.5.9 Esempio (La convoluzione). Si chiama *prodotto di convoluzione* tra $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x - y) v(y)\, dy.$$

Se u e v sono integrabili, dimostriamo che $u * v$ è integrabile.

$$f(x, y) := u(x - y) v(y), \quad |f(x, y)| = |u(x - y)||v(y)|$$

Allora per q.o. $y \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x - y)||v(y)|\, dx =$$

$$= |v(y)| \int_{\mathbb{R}} |u(x-y)|\, dx = |v(y)| \int_{\mathbb{R}} |u(t)|\, dt < +\infty$$

Dove abbiamo posto $t = x - y$ e l'ultima affermazione è giustificata dal fatto che u è integrabile.
Verifichiamo la seconda ipotesi di Tonelli:

$$\int_{A''} \left(\int_{A'} |f(x,y)|\, dm' \right) dm'' = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|\, dt \int_{\mathbb{R}} |v(y)|\, dy < +\infty$$

dato che v è integrabile.
Ora usiamo Tonelli e scopriamo che f è integrabile in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Usiamo il teorema di Fubini e scopriamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} (u * v)(x)\, dx < +\infty$$

cioè che $u * v$ è integrabile in $\mathbb{R}$ e inoltre vale

$$\int_{\mathbb{R}} (u * v)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(t)\, dt \int_{\mathbb{R}} v(y)\, dy$$

□