Note personali e piuttosto disorganiche preparate da Pierluigi Colli come ausilio per le lezioni di

Equazioni a derivate parziali parte b - anno acc. 2006/07

Si considerano distribuzioni di $(0,T)$ a valori in uno spazio V come operatori lineari

$$\mathcal{D}(0,T) \xrightarrow{T} V$$

$(\mathcal{D}'(]0,T[;V))$ per cui vale la proprietà di continuità

$$T(\varphi_n) \to T(\varphi) \text{ in } V \text{ se } \varphi_n \to \varphi \text{ in } \mathcal{D}(0,T)$$

Es. 1. $u \in L^1_{loc}(0,T;\cancel{V})$, allora

$$T(\varphi) = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt \quad \text{è una distribuz.}$$

2. fissato x in $\cancel{V}$, l'applicazione

$$\varphi \longmapsto \varphi\left(\frac{T}{2}\right)x$$

è una distribuzione

Derivata nel senso delle distribuzioni

~~Ovviamente se $\cancel{\varphi}$ $\Phi \in \mathcal{D}(0,T;V)$ e $T \in \mathcal{D}'(0,T;V')$ allora si può definire~~

Io avevo estrapolato un po' troppo.

[redacted]

Altre cose che ho detto loro:

N.B. $L^p(0,T;V)$ è separabile se V lo è e $1 \le p < \infty$;

$L^2(0,T;V)$ è Hilbert se V lo è;

$C^0([0,T];X)$ è denso in $L^p(0,T;X)$.

Proposizione Se V è un Banach e $u \in L^1(0,T;V)$ verifica

$$\int_0^T \varphi(t)\, u(t)\, dt = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

$\Rightarrow u = 0$ in $L^1(0,T;V)$.

Dim (per V' separabile) oppure per $V = X'$ con X separabile:

$$\int_0^T \varphi(t) < u(t), v_i > dt = 0 \qquad \forall\ v_i$$

$\Rightarrow\ < u(t), v_i > = 0 \quad \forall\ t \in [0,T] \setminus Z(i)$, con $Z(i)$ di misura nulla

$\Rightarrow\ < u(t), v > = 0 \quad \forall\ v \in [0,T] \setminus Z \quad , Z = \bigcup_i Z(i)$

$w = u'$ $\left(\text{oppure } \dfrac{du}{dt}\right)$ se vale la seguente

$$-\int_0^T \varphi'(t)\, u(t)\, dt = \int_0^T \varphi(t)\, w(t)\, dt$$

e in generale $w = u^{(n)}$ se

$$\int_0^T \varphi(t)\, w(t)\, dt = (-1)^n \int_0^T \varphi^{(n)}(t)\, u(t)\, dt.$$

$V \subseteq H \subseteq V'$ tripla di spazi normati reali

V Banach separabile e riflessivo.

H Hilbert separabile

$V \hookrightarrow H$ con immersione continua

V denso in H

$\exists\, c_V$ tale che $\|u\|_H \leq c_V \|u\|_V \quad \forall u \in V$

Ad ogni $h \in H$ corrisponde $i(h) \in V'$ così definito

$$|\langle i(h), v\rangle| = |(h, v)| \leq \|h\|_H \|v\|_H$$
$$\leq c_V \|h\|_H \cdot \|v\|_V$$

$i: H \to V'$ è lineare e continuo. Inoltre i è anche iniettiva: se $i(h)=0$ allora $(h, v) = 0 \ \forall v \in V$ ma siccome V è denso in H, ne viene che $h = 0$.

Se ora identifichiamo h con $i(h)$, osserviamo che H è denso in V': infatti se $w \in (V'')$ è tale che

$${}_{V''}\langle w, v\rangle_{V'} = 0 \quad \forall v \in H$$

dalla riflessività di V segue ${}_{V'}\langle v, J^{-1}(w)\rangle_V = (v, J^{-1}(w)) = 0$
$\forall v \in H$

dunque $J^{-1}(w) = 0$ in $H (\supseteq V)$ per cui $w = 0$.

$\boxed{J \text{ immersione canonica}}$

$V \hookrightarrow H$, V denso in $H \Rightarrow H' \hookrightarrow V'$

Identifichiamo H con H', dunque $H \hookrightarrow V'$

$\Rightarrow v = u'$.

Dim. Tutte le convergenze implicano quello debole in $L^1(0,T;X)$

Definisco $W^{1,p}(0,T;X)$.

Provo un teorema fondamentale del calcolo.
Se $u \in L^p(0,T;Y)$ e $u' \in L^q(0,T;Z)$, $Y \subset Z$ con immersione continua, allora.

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds.$$

Dim.
Comincio a provare che la funzione

$$v(t) = \int_0^t u'(s)\,ds$$

ha derivata generalizzata uguale ad u'.
Devo usare densità di $C^0([0,T];Z)$. Sia q_n in $C^0([0,T];Z)$ con $q_n \to u'$ in $L^1(0,T;Z)$: provo che $p_n = \int_0^t q_n(s)\,ds$ converge a v in $C^0([0,T];Z)$ dunque in $L^1(0,T;Z)$ da cui passo al limite

in $$\int_0^T p_n \varphi' = -\int_0^T \varphi q_n$$

$\Rightarrow v' = u'$.

Se ora $u' = 0$, provo che u è costante (l'altra freccia è banale).

$$\int_0^T \varphi' u\,dt = 0 \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

Fisso ρ in $\mathcal{D}(0,T)$ con $\int_0^T \rho = 1$. Allora $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ si può scrivere come

$$\left(\int_0^T \psi\,ds\right)\rho + \varphi'$$

con φ definita da $\varphi(t) = \int_0^t \left(\psi - \left(\int_0^T \psi\,ds\right)\rho\right) ds$

Posto $c = \int_0^T \rho u \, dt$, viene

$$\int_0^T \psi u \, dt = \int_0^T \psi \, dt \int_0^T \rho u \, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T \psi (u - c) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$$

$$\Rightarrow u(t) - c = 0 \quad \text{q.o.}$$

$W^{1,1}(0,T;Z) \hookrightarrow C^0([0,T];Z)$
e vale la stima

la continuità scende dall'assoluta continuità dell'integrale

$$\|u\|_{C^0} \leq C \left(\|u\|_{L^1(0,T;Z)} + \|u'\|_{L^1(0,T;Z)} \right)$$

$W^{1,\infty}(0,T;Z)$ sono le lipschitziane.

$W^{1,p}(0,T;Z)$ sono hölderiane di un certo esponente $\frac{1}{p'}$

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \left| \int_s^t \|u'(\tau)\| \, d\tau \right| \leq |t-s|^{1/p'} \|u'\|_{L^p(0,T;Z)}$$

23.10a. Show that W is a B-space. W è uno spazio di Banach

$W = \{u \in L^p(0,T;V) : u' \in L^q(0,T;V')\}$ con $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$V \subseteq H \subseteq V'$ terna di evoluzione

Solution: If (u_n) is a Cauchy sequence in W, then

$$u_n \to u \quad \text{in } L_p(0, T; V) \qquad \text{as} \quad n \to \infty,$$

$$u_n' \to v \quad \text{in } L_q(0, T; V^*) \qquad \text{as} \quad n \to \infty,$$

with suitable points u and v. Observe that $L_p(0, T; V)$ and $L_q(0, T; V^*)$ are B-spaces. The continuity of the embedding $V \subseteq V^*$ implies $v = u'$, according to Proposition 23.19. Hence

$$u_n \to u \quad \text{in } W \qquad \text{as} \quad n \to \infty. \quad *$$

23.10b. Show that $C^1([0, T], V)$ is dense in W.

Solution: The proof proceeds analogously to the corresponding proof for classical Sobolev spaces in Section 21.4. Observe that, because of the p-mean continuity in Problem 23.9, the smoothing operator for $u \in W$ has the same properties as the classical smoothing operator from Section 18.14.

From Problem 23.3 it follows additionally that the set of all the polynomials $p: [0, T] \to V$ with coefficients in V is dense in the space W.

densità:
- prolungamento
- regolarizzaz. per mollif.
- troncatura all'intervallo $[0,T]$

23.10c. Show that the embedding $W \subseteq C([0, T], V^*)$ is continuous.

Solution: Denote the norm on V^* and $L_p(0, T; V^*)$ by $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_p$, respectively. Let $u \in W$. The idea of the proof is to consider the function

$$v(t) = \int_0^t u'(s)\, ds.$$

Then, $v \in C([0, T], V^*)$. To see this, observe that

$$\|v(t) - v(s)\| \le \int_s^t \|u'(z)\|\, dz$$

and use the absolute continuity of the integral, $A_2(20)$.

By Problems 23.5a and 23.8, we obtain $v' = u'$, and hence

$$v(t) = u(t) + c \qquad \text{for almost all } t \in \,]0, T[, \tag{66}$$

where $c \in V^*$. The Hölder inequality yields

$$\begin{aligned} \max_{0 \le t \le T} \|v(t)\| &\le T^{1/p} \|u'\|_q, \\ \|c\| &= T^{-1/p} \|c\|_p. \end{aligned} \tag{67}$$

From (66) and (67) it follows that

$$\begin{aligned} \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\| &\le d(\|u'\|_q + \|v - u\|_p) \\ &\le d(\|u'\|_q + \|v\|_p + \|u\|_p) \le d_1 \|u\|_W. \end{aligned}$$

23.10d. Show that the embedding $W \subseteq C([0, T], H)$ is continuous.

* Se $p = q = 2$ e anche V, V' sono Hilbert, allora W è un Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(u, v)_W = \int_0^T \{(u,v)_V + (u',v')_{V'}\}(s)\, ds$$

8

$|(u(s),u(s))| \leqslant \|u(s)\|_{V'} \|u(s)\|_V$

$\leqslant \|u\|_{C^0([0,T];V')} \|u(s)\|_V$

Solution:

(I) Integration by parts. Let $u, v \in C^1([0, T], H)$. Integrating

$$(u(t)|v(t))' = (u'(t)|v(t)) + (u(t)|v'(t)),$$

we get the integration by parts formula

$$(u(t)|v(t)) - (u(s)|v(s)) = \int_s^t (u'(z)|v(z)) + (u(z)|v'(z))\, dz, \qquad (68)$$

for all $0 \le s \le t \le T$. By (17),

$$(u|v) = \langle u, v\rangle \qquad \text{for all} \quad u, v \in V.$$

For $u, v \in C^1([0, T], V)$, this implies

$$(u(t)|v(t)) - (u(s)|v(s)) = \int_s^t \langle u'(z), v(z)\rangle + \langle v'(z), u(z)\rangle\, dz, \quad (69)$$

for all $0 \le s < t \le T$.

(II) In order to cancel the term $(u(s)|v(s))$ in (69), we choose a test function $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(s) = 0$ and $\varphi(t) = 1$. Moreover, let $|\varphi| + |\varphi'| \le 1$ on $\mathbb{R}$. Set $v = \varphi u$. Equation (69) implies that

non è possibile chiederlo (vedi sopra idea per come fare in ogni caso, nella pagina successiva è sviluppato per bene il conto.

$$(u(t)|u(t)) \le \text{const}\, \|u\|_W^2 \qquad \text{for all} \quad u \in C^1([0, T], V). \qquad (70)$$

To see this, observe that $v' = \varphi' u + \varphi u'$ and use the Hölder inequality. Equation (70) yields

$$\|u\|_{C([0,T],H)} \le \text{const}\, \|u\|_W \qquad \text{for all} \quad u \in C^1([0, T], V). \quad (71)$$

The set $C^1([0, T], V)$ is dense in W. By (71) and the extension principle from Section 18.12, the embedding operator

$$j\colon C^1([0, T], V) \subseteq W \to C([0, T], H)$$

has a unique continuous extension $j\colon W \to C([0, T], H)$. In this sense, the embedding

$$W \subseteq C([0, T], H)$$

is continuous.

23.10e. Show that the integration by parts formula (69) holds for all $u, v \in W$.

Solution: Use the density of $C^1([0, T], V)$ in W and a limiting process in (69).

23.11. *Weak* convergence*. Let X be a B-space. Recall that a sequence (x_n^*) from X^* is called weakly* convergent to the point x^* in X^* iff

Sia $u \in C^1([0,T];V)$. Vale allora la stima

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u\|_{C^0([0,T];V')} \|u(s)\|_V + 2\|u'\|_{L^q(0,T;V')} \|u\|_{L^p(0,T;V)} \quad \forall\, t,s \in [0,T]$$

Integro ora rispetto ad s in $[0,T]$

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{T} \|u\|_{L^1(0,T;V')} + \|u'\|_{L^1(0,T;V')} \right) \times \|u\|_{L^1(0,T;V)} + 2\|u\|_W^2$$

Ora osservo che:

$$\|v\|_{L^1(0,T;Z)} \leq T^{1/r'} \|v\|_{L^r(0,T;Z)} \quad \text{per } r>1, \ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

si ottiene pertanto (C costante di $V \hookrightarrow V'$)

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \frac{C}{T^2} \|u\|_{L^1(0,T;V)}^2 + \frac{1}{T} \|u'\|_{L^1(0,T;V')} \|u\|_{L^1(0,T;V)} + 2\|u\|_W^2$$

$$\leq \frac{C\,T^{2/q}}{T^2} \|u\|_{L^p(0,T;V)}^2 + \frac{T^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}}{T} \|u\|_{L^p(0,T;V)} \|u'\|_{L^q(0,T;V')} + 2\|u\|_W^2$$

$$\leq \left(\frac{C}{T^{2/p}} + 3 \right) \|u\|_W^2 \quad \text{OK. } \forall t.$$

Ora

$$\|u\|_{C^0([0,T];H)} \leq C\|u\|_W \quad \forall u \in C^1([0,T];V)$$

Siccome $C^1(V)$ è denso in W, se $u_n \to u$ in W, $u_n \in C^1([0,T];V)$ $\forall n$, scende che $\{u_n\}$ è di Cauchy in $C^0([0,T];H)$, dunque converge a una v in $C^0([0,T];H)$ e per forza $v=u$ perché i due limiti devono coincidere in $L^1(0,T;V')$.

Ora si passa al limite facilmente anche nell'identità in (69).

(1) $\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times (0,T)$

(11)

(2) $\nabla u \cdot \nu + \alpha u = g \quad \text{su } \Gamma \times (0,T)$

(3) $u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega$

Testiamo la (1) per v, integrando formalmente per parti e otteniamo

$$\int_\Omega \partial_t u \cdot v_{dx} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_{dx} + \int_\Gamma \alpha u \cdot v_{ds} = \int_\Omega f(x,t)\, v_{dx} + \int_\Gamma g(x,t)\, v_{ds}$$

ds elemento superficiale

Possiamo introdurre $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \alpha(x)\, u \cdot v \, ds, \quad u, v \in V,$$

e l'elemento $h(t) \in V'$ tale che

$$\langle h(t), v \rangle = \int_\Omega f(x,t)\, v \, dx + \int_\Gamma g(\cdot,t)\, v \, ds$$

Naturalmente negli integrali di bordo compare la traccia delle funzioni di $H^1(\Omega)$, che sta in $H^{1/2}(\Gamma) \subseteq L^2(\Gamma)$.

Il problema si può riscrivere

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v \rangle + \langle Au(t), v \rangle = \langle h(t), v \rangle$$

con l'operatore $A : V \to V'$ definito dalla forma bilineare e $h(t) \in V'$ definito da f e da g.

Se $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ e $g \in L^2(\Sigma \times (0,T))$ ne viene

$$h \in L^2(0,T; V')$$

$$\frac{d}{dt} < u(t), v > = < u'(t), v >$$

In effetti

$$\int_0^T \frac{d}{dt} < u(t), v > \varphi(t)\, dt = - \int_0^T < u(t), v > \varphi'(t)\, dt$$

$$= - \int_0^T < u(t)\varphi'(t), v > dt = < - \int_0^T u(t)\varphi'(t) dt, v >$$

$$= < u'(t), v >$$

Da cui riscriviamo

$$< u'(t), v > + < Au(t), v > = < h(t), v > \quad \forall v \in V.$$

Cercare $u \in W =: H^1(0,T; V, V')$? per cui $u \in C^0([0,T]; H)$ e ha senso la condizione iniziale. Ancora l'equazione si può riscrivere

$$\int_0^T - < u(t), v > \varphi'(t)\, dt = \int_0^T < f(t) - Au(t), v > \varphi(t) dt$$

Ipotesi sulla forma a debolmente coerciva:

$$a(v,v) \geq L \|v\|_V^2 - \lambda \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ipotesi su $h \in L^2(0,T; V')$, $u_0 \in H$.

Tutto Ok con $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$, $\alpha \geq 0$, $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$, $g \in L^2(\Gamma \times (0,T))$.

<u>Lemma di Gronwall</u> $\phi_0 \geq 0$, $m \in L^1(0,T)$, $m \geq 0$,

ϕ continua

$$\phi(t) \leq \phi_0 + \int_0^t m(s)\phi(s)\,ds$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(t) \leq \phi_0 \, e^{\int_0^t m(s)ds} \quad \forall t$$

$\cancel{e^{-\int_0^t m(s)ds}\phi(t)}$ <u>Dimostrazione</u>

$$\psi(t) = \phi_0 + \int_0^t m(s)\phi(s)\,ds$$

$$\frac{d\psi}{dt} = m(t)\phi(t) \leq m(t)\psi(t)$$

$$e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi'(t) - m(t)\,e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi(t) \leq 0$$

dunque

$$t \longmapsto e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi(t) \text{ è decrescente}$$

$$\psi(t) \leq \psi(0) = \phi_0\, e^{\int_0^t m(s)ds}$$

$$\phi(t) \leq \phi_0\, e^{\int_0^t m(s)ds}$$

<u>Oppure altra dimostrazione</u>: provare che

$$e^{-\int_0^t m(s)ds}\left(\phi_0 + \int_0^t m(s)\phi(s)\,ds\right) \text{ è decrescente}$$

$$-m(t)\,e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi(t) + e^{-\int_0^t m(s)ds}\big(m(t)\phi(t)\big) \leq 0.$$

Schema Faedo-Galerkin $\{v_i\}$ base in V.

V_n generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$ $\qquad V_U = \bigcup_n V_n \underset{ds}{\hookrightarrow} V$

$$(u_n'(t), v_i) + a(u_n(t), v_i) = \langle h(t), v_i \rangle \quad , \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\langle u_n(0), v_i \rangle = \langle u_0, v_i \rangle \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t) v_j$$

$$B_{ij} = (v_j, v_i) \quad , \quad D_{ij} = a(v_j, v_i)$$

$$y_{0i} = \langle u_0, v_i \rangle \qquad f_i(t) = \langle h(t), v_i \rangle \qquad \begin{cases} B\vec{y}\,'(t) + D\vec{y}(t) = \vec{f}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

ho detto che B è invertibile.

Gli $f_i(t)$ stanno in $L^2(0,T)$

$$|f_i(t)| \leq \|h(t)\|_{V'} \|v_i\|_V \leq \|h(t)\|_{V'} \max_i \|v_i\|_V$$

e y_{0i} sono in $\mathbb{R}$.

Il sistema di ODE ha una ~~dec~~ ed una sola soluzione in $H^1(0,T)$ e dunque $u_n \in H^1(0,T;V_n)$

Ora stima a priori che è la stessa dell'enunciato

$$\|u_n\|_{C^0([0,T];H)} + \|u_n\|_{L^2(0,T;V)} \leq C\left(\|u_n(0)\|_H + \|f\|_{L^2(V')}\right)$$

Occorre provare che $u_n(0)$ è limitato in H: ma $u_n(0)$ è la proiezione ortogonale in H di u_0 su V_n (che è sottospazio di H) per cui $\|u_n(0)\|_H \leq \|u_0\|_H$ è limitato.

In realtà possiamo anche provare che

$$u_n(0) \to u_0 \text{ in } H.$$

Infatti

$$\|u_n(0) - u_0\| \leq \|u_0 - v\| \quad \forall\, v \in V_n.$$

Siccome V_U è densa in V, è densa anche in H: sia $\{v_k\} \subset V_U$ con $v_k \to u_0$ per $k \to \infty$. Ora per ogni k esiste un indice $n_k > n_{k-1}$ tale che $v_k \in V_{n_k}$.
Dunque la successione numerica

$$d_{n_k} = \|u_{n_k}(0) - u_0\|$$

tende a 0 per forza, ma allora tende a 0 anche tutta la successione $\{d_n\}$ che è infinitesima $(V_n \subseteq V_{n+1})$

Si passa ora al limite debole di u_{n_k} a u in $L^2(0,T;V)$

__Oss__. Siccome il limite è unico, è tutta la succ. che conv. debole.

__Oss__. C'è conv. debole $*$ in $L^\infty(0,T;H)$ (siccome $L^1(0,T;H)$ è separabile).

~~Oss. [illegible] converge a u_0 in H~~

__Oss__. Se la base è ortogonale in H, posso stimare u_n' in $L^2(0,T;V')$. Se la base non è ortogonale in H, basta ortogonalizzarla e la nuova base sarà anche una base di V perchè costruita a partire dai $\{v_n\}$.

N.B. posso prendere A dipendente da t a patto di avere la misurabilità di $a(t,u,v)$.

Teorema di regolarità per A indip. da t e simmetrico, $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in V$. Definire $D(A)$ sottospazio chiuso di V con norma $\|u\|_V + \|Au\|_{D(A)}$.
Esplicitare $D(A)$ nel caso $-\Delta$.

Mi sono accorto che la mia osservazione sulla base ortogonale in H sviluppata nella pagina precedente non funziona in generale: mi impasto esattamente nel punto in cui devo stimare $\|P_{V_n}(v)\|_V$ dove P_{V_n} è l'operatore di proiezione sul sottospazio V_n in H (dunque $\|P_{V_n}(v)\|_H \leq \|v\|_H$, ma nulla posso dire per le norme in V).

Se l'iniezione di V in H è compatta, allora l'operatore di Riesz $R : V' \to V$ (isomorfismo isometrico)

$$((Rw, v)) = \langle w, v \rangle \qquad \forall\, w \in V',\ \forall\, v \in V$$

una volta ristretto ad H è autoaggiunto compatto.

Se $f, g \in H$

$$\langle f, Rg \rangle = (f, Rg) = ((Rf, Rg)) = (Rf, g)$$

È sicuramente compatto: se $f_n \to f$ in H, allora $Rf_n \to Rf$ in V e dunque $Rf_n \to Rf$ in H.

Per la teoria spettrale degli operatori autoaggiunti compatti, la famiglia v_n con

$$R v_n = \mu_n v_n$$

ammette autovalori con $\mu_n \searrow 0$ e fornisce una base per H. Più precisamente, esiste una base $\{w_n\}$ di auto=

vettori che è hilbertiana (ortonormale in H):

$$R w_n = \mu_n w_n$$

Provo ora che $\{w_n\}$ è ortogonale anche in V

$$((w_n, w_m)) = \langle R^{-1} w_n, w_m \rangle = \frac{1}{\mu_n} (w_n, w_m) = 0$$

e inoltre $\|w_n\|_V^2 = \frac{1}{\mu_n} \|w_n\|_H^2$ per cui $\{\sqrt{\mu_n}\, w_n\}$ è ortonormale in V. Che cosa succede in V'?

$$((w_n, w_m))_* = ((R w_n, R w_m)) = \mu_n \mu_m ((w_n, w_m)) = 0$$

e inoltre $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} w_n \right\}$ è ortonormale in V'.

Si noti inoltre che w_n è una base anche di V in quanto se $u \in V$ verifica

$$((u, w_n)) = 0 \quad \forall\, n$$

allora

$$((u, w_n)) = \langle R^{-1} w_n, u \rangle = \frac{1}{\mu_n} (w_n, u) = 0$$

da cui $u = 0$ in H. Ultima cosa <u>molto importante</u>: trovata una base ortonormale in V che è anche ortogonale in H, si fa la proiezione in V e non in H per P_{V_n}!

Devo spiegare che cosa si conclude da
$\|u'_n\|_{L^2(0,T;V')} \leq C$: conv. debole a v, prova che
$v = u'$, condizione iniziale

Nel dare il teorema di regolarità mi sono impastato di nuovo, questa volta sulla condizione iniziale. Occorre prendere

$$u_n(0) = u_{0n}, \quad \text{con } u_{0n} \in V_n \quad \forall n$$

e $u_{0n} \to u_0$ in V. Vale allora la stima

$$\|u'\|_{L^2(0,T;H)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;V)}$$

$$\leq C \left\{ \|u_0\|_V + \|f\|_{L^2(0,T;H)} \right\}$$

con C che dipende da T, M, L, λ.

Dire loro, lasciando come esercizio di estendere a $f \in L^1(H) + W^{1,1}(0,T;V')$ con l'aiuto del lemma di Gronwall.

Notare che $D(A)$ è denso in V: si può dimostrare che se $u_n + \frac{1}{n}Au_n = u$ allora u_n converge a u in V.

Due istanze

- insegnare loro discretizzazione in tempo: $\tau = \frac{T}{N}$

$$\frac{u^i - u^{i-1}}{\tau} + Au^i = f^i$$

$$u^0 = u_0$$

e $f_i = \frac{1}{\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau} f(s)ds \quad , i = 1, \dots, N;$

- studiare anche equazioni iperboliche.

Allora

$$\begin{cases} u'' + Au = f & \text{in } V', \text{ q.o. in } (0,T) \\ u(0) = u_0 \quad , & u'(0) = v_0 \end{cases}$$

lo studio con discretizzazione in tempo.

N.B.: lavoro con ipotesi forti sui dati, elimenò dopo.

<u>Teorema di esistenza di una soluzione forte</u>

Siano $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$ con immersioni continue e dense.

Assumo A simmetrica, $u_0 \in V$, $v_0 \in V$, $f \in W^{2,1}(0,T;V') + H^1(0,T;H)$ con $f(0) - Au_0 \in H$. Allora esiste una soluzione

$$u \in W^{2,\infty}(0,T;H) \cap W^{1,\infty}(0,T;V).$$

<u>Dimostrazione</u>

approssimo con discretizzazione in tempo $n \in \mathbb{N}$, $\tau = \frac{T}{n}$, siccome f_1, f_2 sono continue posso porre $f_1^i = f_1(\tau i)$, $f_2^i = f_2(\tau i)$, $f^i = f_1^i + f_2^i$

Problema approssimato (P_τ). Trovare due vettori $(u^0, u^1, \dots, u^n) \in V^{n+1}$, $(v^0, v^1, \dots, v^n) \in V^{n+1}$ tali che

$$u^0 = u_0, \quad v^0 = v_0$$

e inoltre

$$v^i = \frac{u^i - u^{i-1}}{\tau},$$

$$\frac{v^i - v^{i-1}}{\tau} + Au^i = f^i.$$

Esiste una ed una sola soluzione.

u^0, v^0 li trovo subito, posso partire. Assumendo noti v^{i-1}, u^{i-1} risulta che devo risolvere

$$\frac{1}{\tau}u^i + \tau A u^i = \left(\tau f^i + v^{i-1}\right) + \frac{1}{\tau}u^{i-1}$$

Se A è coercivo in senso debole tutto OK, basta prendere $\frac{1}{\tau} > \tau\lambda$ cioè $\tau < \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ perché

$$\frac{1}{\tau}I + \tau A \text{ sia un isomorfismo.}$$

Introduciamo il vettore ausiliario $(z_0, z_1, \dots z_n) \in V^{n+1}$ con

$$z^0 = z^1, \qquad z^i = \frac{v^i - v^{i-1}}{\tau}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Allora $u_\tau, v_\tau, z_\tau \in L^1(0,T;V)$ e $f_\tau \in L^1(0,T;V')$ sono le costanti a tratti:

$$u_\tau(t) = u^i, \dots, \quad f_\tau(t) = f^i \quad \text{se } (i-1)\tau < t \leq i\tau$$

$\hat{u}_\tau, \hat{v}_\tau, \hat{z}_\tau$ le lineari a tratti

$$\hat{u}_\tau(t) = u^i + \frac{u^i - u^{i-1}}{\tau}(t - i\tau), \dots \qquad (i-1)\tau \leq t \leq i\tau$$

che dunque coincidono con le costanti a tratti nei punti $i\tau$.
Abbiamo dunque

$$z_\tau(t) + Au_\tau(t) = f_\tau(t)$$

$$v_\tau(t) = \hat{u}'_\tau(t), \quad z_\tau(t) = \hat{v}'_\tau(t) \qquad t \in (0,T)$$

$$\hat{u}_\tau(0) = u_0, \quad \hat{v}_\tau(0) = v_0$$

Stime a priori.
Scriviamo l'equazione anche per l'indice $i-1$ e prendiamo la differenza

$$z^i - z^{i-1} + \tau A v^i = f^i - f^{i-1}$$

da cui

$$z^i - z^{i-1} + \lambda\tau v^i + \tau A v^i = f^i - f^{i-1} + \lambda \tau v^i$$

Moltiplico scalarmente per z^i

$$\frac{1}{2}|z^i|^2 - \frac{1}{2}|z^{i-1}|^2 + \frac{1}{2}|z^i - z^{i-1}|^2$$

$$+ \frac{1}{2} a_\lambda(v^i, v^i) - \frac{1}{2} a_\lambda(v^{i-1}, v^{i-1}) + \frac{\tau^2}{2} a_\lambda(z^i, z^i)$$

$$= \langle f^i - f^{i-1} + \lambda\tau v^i, z^i \rangle$$

con $\quad a_\lambda(u,v) = \langle Au, v\rangle + \lambda(u,v)$; posto ora

$$S_m = \frac{1}{2}|z^m|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m |z^i - z^{i-1}|^2 + \frac{1}{2} a_\lambda(v^m, v^m) + \sum_{i=1}^m \frac{\tau^2}{2} a_\lambda(z^i, z^i)$$

e sommando la precedente uguaglianze da **2** a m si trova

$$S_m = S_1 + \sum_{i=2}^{m} \tau \left(\frac{f^i - f^{i-1}}{\tau} + \lambda v^i, z^i \right)$$

Ora per $i=1$ testiamo con z^1

$$\frac{1}{2}|z^1|^2 + S_1 = \langle f^1 - Au^1, z^1 \rangle + \cancel{\frac{1}{2}|z^1 - \underbrace{z^0}_{=0}|^2}$$

$$+ \frac{1}{2} a_\lambda(v^1, v^1) + \frac{\tau^2}{2} a_\lambda(z^1, z^1)$$

$=$ ~~.....~~ dovrebbe essere uguale a

$$(f(0) - Au_0, z^1) + \frac{1}{2} a_\lambda(v^0, v^0) + \tau \left(\frac{f^1 - f^0}{\tau} + \lambda v^1, z^1 \right)$$

Ora siccome

$$(f(0) - Au_0, z^1) - \frac{1}{2}(z^1, z^1) \leq \frac{1}{2} |f(0) - Au_0|^2$$

si trova

$$S_m \leq C_1 + \sum_{i=1}^{m} \tau \left(\frac{f^i - f^{i-1}}{\tau} + \lambda v^i, z^i \right) \text{ per } m \geq 1.$$

Ora

$$S_m \leq C_1 + \sum_{j=1}^{3} R_j(m),$$

con $R_1(m) = (g_1^m, v^m) - (g_1^1, v^0) - \sum_{i=2}^{m} \tau \left\langle \frac{g_1^i - g_1^{i-1}}{\tau}, v^{i-1} \right\rangle$

$$R_2(m) = \sum_{i=1}^{m} \tau |g_2^i| |z^i| \quad , \quad R_3(m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda \tau |v^i| |z^i|$$

dove $g_k^i = \dfrac{f_k^i - f_k^{i-1}}{\tau}$, $k = 1,2$. Ora

$$\|g_1^i\|_* \leq \frac{1}{\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \|f_1'(t)\|\, dt \leq \|f_1'\|_{C^0([0,T];V')}$$

$$\left\| \frac{g_1^i - g_1^{i-1}}{\tau} \right\|_* \leq \frac{1}{\tau^2} \left\| \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \big(f_1'(t) - f_1'(t-\tau)\big)\, dt \right\|_*$$

$$\leq \frac{1}{\tau^2} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \int_{t-\tau}^{t} \|f_1''(s)\|_*\, ds\, dt \leq \frac{1}{\tau} \|f_1''\|_{L^1((i-2)\tau; i\tau; V')}$$

Allora

$$|R_1(m)| \leq \delta \max_{1\leq i\leq m} \|v^i\|^2 + C_2(\delta).$$

Inoltre

$$|R_2(m)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \tau |z^i|^2 + \frac{1}{2} \|f_2'\|^2_{L^2(0,T;H)}.$$

$$|R_3(m)| \leq C_3 \sum_{i=1}^{m} \tau \|v^i\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^{m} \tau |z^i|^2.$$

Posto $N_m = \frac{1}{2}\left(|z^m|^2 + \sum_{i=1}^{m} |z^i - z^{i-1}|^2\right) + \frac{L}{2}\left(\|v^m\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \tau^2 \|z^i\|^2\right)$,

trovo

$$N_k \leq C_4\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \tau N_i\right) + \frac{1}{2} \max_{1\leq i\leq m} N_i \quad \text{con } k\leq m.$$

Scegliendo δ ad hoc. Ora max rispetto a k, scelgo poi τ piccolo e applico infine il lemma di Gronwall discreto.

Si fa così

$$\frac{1}{2} N_m \le \frac{1}{2} \max_{1 \le i \le m} N_i \le C_4 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \tau N_i\right)$$

da cui, prendendo $\tau \le \dfrac{1}{4C_4}$, si trova

$$N_1 \le 4C_4 \,, \qquad N_m \le 4C_4 \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \tau N_i\right)$$

per $m \ge 2$.

Applichiamo ora il lemma di Gronwall che viene dimostrato alla pagina seguente e troviamo

$$N_m \le 4C_4\, e^{4C_4 T} \qquad \text{per } m \ge 1$$

con $\beta = 4C_4$, $\gamma = 4C_4 \tau$ e dunque

$$N_m \le 4C_4 \left(1 + \frac{4C_4 T}{n}\right)^{m-1}$$

$$\le 4C_4 \left\{\left(1 + \frac{4C_4 T}{n}\right)^{\frac{n}{4C_4 T}}\right\}^{4C_4 T}.$$

Gronwall discreto

$$S_1 \leq \beta, \quad S_m \leq \beta + \gamma \sum_{k=1}^{m-1} S_k \quad \text{per } m \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad S_m \leq \beta (1+\gamma)^{m-1}$$

Dim. Ok per $m=1$

Vera per m, la provo per $m+1$

$$S_{m+1} \leq \beta + \gamma \sum_{k=1}^{m} S_k \leq \beta + \beta\gamma \sum_{k=1}^{m} (1+\gamma)^{k-1}$$

$$\leq \cancel{\beta(1+\gamma} \; \beta + \beta\gamma \, \frac{1-(1+\gamma)^m}{1-(1+\gamma)}$$

$$= \beta (1+\gamma)^m$$

N.B. in generale γ per noi conterrà un τ.

Abbiamo dunque la stima

$$\|z_\tau\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + \tau \|\hat{z}'_\tau\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|v_\tau\|^2_{L^\infty(0,T;V)} + \tau \|\hat{v}'_\tau\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_5$$

per ogni τ sufficientemente piccolo.

Da queste condizioni e da un semplice confronto deduciamo anche

$$\|\hat{u}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \|u_0\|_V + T\|\hat{u}_\tau'\|_{L^\infty(0,T;V)}$$
$$\leq \|u_0\|_V + T\|v_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)}$$

$$\|\hat{v}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq$$
$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\|v^i\| + \|v^{i-1}\|\right)$$
$$\leq 2\|v_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|v_0\|_V$$

$$\|\hat{v}_\tau\|_{W^{1,\infty}(0,T;H)} \leq \text{Costante dipendente da } C_5 \text{ e } \|v_0\|_V.$$

Osserviamo anche che

$$\|f_\tau - f\|_{L^1(0,T;V')} = \sum_{i=1}^{n} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \left\| \int_t^{i\tau} f'(s)\,ds \right\| dt$$
$$\leq \tau \|f'\|_{L^1(0,T;V')}$$

$$\|u_\tau - \hat{u}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \tau\|v_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C\tau.$$

Ora possiamo passare al limite debole star e concludere la dimostrazione.

Teorema di unicità e dipendenza continua

Esiste una costante C, che dipende solo da T, λ, L, M, c_V e non mi sembra da altro, tale che

$$\|u\|_{C^1([0,T];H)} + \|u\|_{C^0([0,T];V)} \leq C\left(\|u_0\|_V + \|v_0\|_H + \|f_1\|_{W^{1,1}(0,T;V')} + \|f_2\|_{L^1(0,T;H)}\right).$$

Dimostrazione. Testo l'equazione per u' e ottengo

$$\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{L}{2}\|u(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}|v_0|^2 + \frac{1}{2}(\lambda+M)\|u_0\|^2$$

$$+ \lambda\int_0^t (u(s), u'(s))ds + \|f_1(t)\|_* \|u(t)\|$$

$$+ \|f_1(0)\|_* \|u_0\| + \int_0^t \|f_1'(s)\|_* \|u(s)\| ds$$

$$+ \int_0^t |f_2(s)|\,|u'(s)|ds$$

--- si prosegue poi in modo standard fino ad arrivare alla stima desiderata.

Oss.1 La stima effettivamente implica unicità e dipendenza continua dai dati.

<u>Oss. 2</u> Gap fra regolarità espressa dal teorema di esistenza e quello di unicità. Si può provare l'esistenza di una soluzione che ha la regolarità

$$u \in C^1([0,T];H) \cap C^0([0,T];V)$$

con $u'' = Au + f \in W^{1,1}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$?

<u>Teorema di esistenza e unicità in un quadro debole.</u>

Se $u_0 \in V$, $v_0 \in H$, $f = f_1 + f_2 \in W^{1,1}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$, allora esiste unica una soluzione

$$u \in C^1([0,T];H) \cap C^0([0,T];V)$$

del problema (P). Valgono inoltre uguaglianza e disuguaglianza dell'energia.

<u>Dim.</u> Il problema è approssimare i dati con dati più regolari a cui si possa applicare il teorema di esistenza precedente, poi usare la stima di unicità e dipendenza continua per provare che successioni $\{u_n\}$ e $\{u'_n\}$ sono di Cauchy in $C^0([0,T];V)$ e $C^0([0,T];H)$ rispettivamente, e passare al limite; anche in una versione di

$$u''_n + Au_n = f_n$$

integrata rispetto al tempo.

Come approssimare però?

$u_{0n} \in D(A)$ $\forall n$, $u_{0n} \to u_0$ in V;

è possibile perché $D(A)$ è denso in V, basta prendere

$$u_{0n} + \frac{1}{n}\left(\lambda u_{0n} + A u_{0n}\right) = u_0$$

e si prova che $u_{0n} \to u_0$ in V: (convergenza debole più convergenza delle norme danno convergenza forte; in generale se $x_n \to x$ debole e $\|x_n\| \to \|x\|$ si ha

$$((x_n - x, x_n - x)) = \|x_n\|^2 - 2((x_n, x)) + \|x\|^2 \to 0);$$

usando il prodotto scalare definito da $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ in V;

$$v_{0n} \in V \quad \forall n, \qquad v_{0n} \to v_0 \text{ in } H;$$

$$f_{2n} \in C^1([0,T];H) \ \forall n, \quad f_{2n} \to f_2 \text{ in } L^1(0,T;H)$$

(basta prolungamento triviale + convoluzione con successione regolarizz. + troncamento a $[0,T]$)

$$f_{1n} \in W^{2,1}(0,T;V') \ \forall n, \qquad f_{1n} \to f_1 \text{ in } W^{1,1}(0,T;V')$$
$$f_{1n}(0) \in H \ \forall n$$

Si può forse prendere $f_{01n} \in H$ con

$$f_{01n} \to f_1(0) \text{ in } V'$$

~~con f_{1n} definita da~~

$$\cancel{\frac{1}{n} f_{1n}' + f_{1n} = f_1 \text{ in } (0,T)}$$

$$\cancel{f_{1n}(0) = f_{01n}}$$

e f_{1n} definita da $\quad f_{1n}(t) = f_{01n} + \int_0^t g_n(s)\,ds$ con $g_n \to f_1'$ in $L^1(0,T;V')$.

Non abbiamo trattato fino ad ora alcun tipo di nonlinearità. Poniamoci dunque un problema, anche semplice in termini di nonlinearità, e vediamo come è possibile trattarlo.

Ω limitato e regolare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t)\,\beta(u, u_t) \qquad \text{in } \Omega \times (0,T)$$

$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,T)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = v_0 \quad \text{in } \Omega$$

dove $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziana rispetto alla coppia di variabili: $\exists\, \Lambda_\beta > 0$ tale che

$$\left|\beta(u_1, v_1) - \beta(u_2, v_2)\right| \leq \Lambda_\beta \left\{ |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| \right\}$$

$$\forall\, (u_i, v_i),\ i = 1, 2.$$

Qui $V = H^1_0(\Omega)$ e la forma è coerciva (per semplicità), grazie alle condizioni di Dirichlet e dis. Poincaré. Ancora $H = L^2(\Omega)$

Schema di punto fisso:

fisso w in qualche spazio, magari proprio

$$w \in C^1(H) \cap C^0(V) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{spazio in cui dovrebbe}\\ \text{vivere la soluzione } u\end{array}\right)$$

e osservo che $\beta(w, w_t) \in C^0(H)$. Se chiedo ora, a livello di ipotesi

$$f \in L^1(0,T; L^\infty(\Omega))$$

si trova che il prodotto

$$f(x,t)\,\beta(w(x,t), w_t(x,t)) \in L^1(0,T;H)$$

ogni volta che $w \in C^1([0,T];H)$ (basta fissare w in $C^1(H)$ per dar senso al secondo membro). Rientriamo allora nel nostro quadro astratto e veniamo a definire un'applicazione

$$\begin{array}{c} w \text{ assegnato in} \\ C^1([0,T],H) \end{array} \overset{\Psi}{\longmapsto} \begin{array}{l} u \text{ soluzione che sta in} \\ \qquad C^1([0,T];H) \cap C^0([0,T];V) \end{array}$$

dove $u = \Psi(w)$ risolve

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta u = f\,\beta(w, w_t) \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ & u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,T), \\ & u(0) = u_0, \; u_t(0) = v_0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

per $u_0 \in V$, $v_0 \in H$, $f \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega))$, e verifica la stima

$$\|u\|_{C^1([0,t];H)} + \|u\|_{C^0([0,t];V)}$$

$$\leq C\left(\|u_0\|_V + \|v_0\|_H + \|f\beta(w,w_t)\|_{L^1(0,t;H)}\right)$$

$$\forall\, t \in [0,T].$$

Una stima analoga vale per la differenza di due soluzioni u_1, u_2 corrispondenti ai dati w_1, w_2, più precisamente abbiamo

$$\| u_1 - u_2 \|_{C^1([0,t];H)} + \| u_1 - u_2 \|_{C^0([0,t];V)}$$

$$\leq C\Lambda_\beta \int_0^t \left(\int_\Omega |f(x,s)|^2 \left(|w_1 - w_2| + |w_1' - w_2'| \right)^2 (x,s)\, dx \right)^{1/2} ds$$

$$\leq \sqrt{2}\, C \Lambda_\beta \int_0^t \| f(s) \|_{L^\infty(\Omega)} \left(\| (w_1 - w_2)(s) \|_H + \| (w_1 - w_2)'(s) \|_H \right) ds$$

$$\left(\text{siccome } \sqrt{A^2 + B^2} \leq \sqrt{A^2} + \sqrt{B^2} \quad \text{per } A, B \in \mathbb{R} \right),$$

$$\leq \sqrt{2}\, C \Lambda_\beta \left(\int_0^t \| f(s) \|_{L^\infty(\Omega)} ds \right) \| w_1 - w_2 \|_{C^1([0,t];H)}$$

Applico ora il teorema delle contrazioni in piccolo: grazie all'assoluta continuità dell'integrale si può determinare un $\delta > 0$ tale che se I è un intervallino di tempo con misura $|I| \leqslant \delta$ allora

$$\int_I \| f(s) \|_{L^\infty(\Omega)} ds \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}\, C \Lambda_\beta}.$$

Quindi, applicando il teorema delle contrazioni nell'intervallino $[0, \delta]$, si deduce $\exists!$ u soluzione e punto fisso. Si riparte poi da δ e si risolve in $[\delta, 2\delta]$ e così via, fino ad arrivare a T.