Pierluigi COLLI **Programma del corso 2010/11**

Analisi Matematica 3 – II modulo – 3 CFU – I Semestre

Integrale di Lebesgue

Richiami a spazi elementari di misura. Spazi di misura. Misura ordinaria sui rettangoli di $\mathbb{R}^N$ è $\sigma-$additiva. Subadditività, misura esterna, insiemi trascurabili. Proprietà della misura esterna: $m^*(B) = m(B)$ se B è unione finita di insiemi elementari, subadditività. Insieme di Cantor. Misura del contare e misura di Dirac. Proprietà vere q.o. Definizione di funzione f integrabile e di $\int_A f\,dm$: commenti, osservazioni, prime proprietà del nuovo integrale. Tre lemmi preparatori e poi giustificazione della definizione di integrale. Lemma: $\int_A |s_n - f|dm \to 0$ se $\{s_n\}$ è una successione nelle condizioni della definizione di integrale. Teorema importante che (riletto a posteriori) sancisce la completezza di $L^1(A)$ e la convergenza q.o. per una sottosuccessione. Problematica del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Teorema di Beppo Levi – I parte; osservazioni e corollari. Lemma di Fatou con varianti. Teorema di Lebesgue. Teorema di Beppo Levi – II parte; caso delle serie. Integrabilità di $x^{-\alpha}$ in $(0,1)$ e $(1,\infty)$.

Funzioni e insiemi misurabili

Funzioni misurabili e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Proprietà delle funzioni misurabili: fra le altre, la chiusura rispetto a $\lim$, $\inf$, $\liminf$. Insiemi misurabili e loro proprietà, in particolare $\sigma-$additività e continuità della misura e dell'integrale su sottoinsiemi misurabili. Aperti e chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. Misura del contare e misura di Dirac: caratterizzazioni. Se f è misurabile, allora le controimmagini di semirette sono misurabili. Ancora sugli insiemi trascurabili, integrali di funzioni nulle q.o., continuità dell'integrale rispetto alla misura. Funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue. Integrabilità su unione crescente e unione disgiunta. Integrabilità di $|x|^{-\alpha}$ in più variabili. Integrale di Poisson. Confronti asintotici per valutare l'integrabilità. Non integrabilità di $\frac{\sin x}{x}$ in $(\pi, +\infty)$.

Spazi normati

Richiami su spazi vettoriali e spazi normati: aperti, chiusi, successioni, struttura metrica, norme equivalenti. Spazi di Banach. Esempi: $\mathbb{R}^N$ con le norme $\|\cdot\|_p$; $C^0([0,1])$ con $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$, norme che non sono tra loro equivalenti. Completezza di $C^0([0,1])$

con norma $\|\cdot\|_\infty$ e non completezza rispetto a $\|\cdot\|_1$. Spazi $L^1(B)$ con classi di funzioni tra loro uguali q.o. e richiamo completezza. Introduzione degli spazi $L^p(B)$ per $1 \leq p \leq \infty$. $L^\infty(B)$ è normato completo. Disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowski con dimostrazione. Teorema di completezza degli spazi $L^p(B)$ per $1 < p < \infty$, con dimostrazione. Corollario per estratta convergente q.o. ed esempio di non convergenza q.o. per tutta la successione. Spazi prehilbertiani: prodotto scalare, disuguaglianza di Schwarz, norma e identità del parallelogramma. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert: $\mathbb{R}^N$ e $L^2(B)$. Norme hilbertiane. La regola del parallelogramma non vale in $L^1(0,1)$ e in $L^\infty(0,1)$. Inclusioni e controesempi per gli spazi $L^p(B)$, in particolare per insiemi B di misura finita. Spazi ℓ^p ; loro inclusioni; spazi c, c_0, c_{00} ; operatori di immersione; esempi di sottospazi chiusi e densi. Operatori lineari tra spazi normati sono continui se e solo se sono limitati. Esempi. Norme di operatori lineari e continui, spazio $\mathcal{L}(E,F)$, che è completo se F è completo (senza dimostrazioni). Duale di uno spazio normato.