

ANALISI C – 6 CFU – I Semestre

Integrale di Lebesgue

Introduzione: classi di funzioni integrabili secondo Riemann, esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann, integrali impropri con conti per $x^{-\alpha}$ in $(0, 1)$ e $(1, \infty)$, problematica del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Spazi di misura. Misura ordinaria sui rettangoli di \mathbb{R}^N è σ -additiva. Subadditività, misura esterna, insiemi trascurabili. Proprietà della misura esterna: $m^*(B) = m(B)$ se B è unione finita di insiemi elementari, subadditività. Insieme di Cantor. Misura del contare e misura di Dirac. Proprietà vere q.o. Definizione di funzione f integrabile e di $\int_A f dm$: commenti, osservazioni, prime proprietà del nuovo integrale. Tre lemmi preparatori e poi giustificazione della definizione di integrale. Lemma: $\int_A |s_n - f| dm \rightarrow 0$ se $\{s_n\}$ è una successione nelle condizioni della definizione di integrale. Teorema importante che (riletto a posteriori) sancisce la completezza di $L^1(A)$ e la convergenza q.o. per una sottosuccessione. Teorema di Beppo Levi – I parte; osservazioni e corollari. Lemma di Fatou con varianti. Teorema di Lebesgue. Teorema di Beppo Levi – II parte; caso delle serie. Funzioni misurabili e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Proprietà delle funzioni misurabili: in particolare, chiusura rispetto a \lim , \inf , \liminf . Insiemi misurabili e loro proprietà, in particolare σ -additività e continuità della misura e dell'integrale su sottoinsiemi misurabili. Aperti e chiusi di \mathbb{R}^N sono misurabili. Misura del contare e misura di Dirac: caratterizzazioni. Se f è misurabile, allora le controimmagini dei boreliani sono misurabili. Ancora sugli insiemi trascurabili, integrali di funzioni nulle q.o., continuità dell'integrale. Funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue. Integrabilità su unione crescente e unione disgiunta. Integrabilità di $|x|^{-\alpha}$ in più variabili. Integrale di Poisson. Confronti asintotici per valutare l'integrabilità. Non integrabilità di $\frac{\sin x}{x}$ in $(\pi, +\infty)$.

Spazi di Banach e di Hilbert

Richiami su spazi vettoriali e spazi normati: aperti, chiusi, successioni, funzioni continue tra spazi, sottospazi, operatori lineari, norme equivalenti. Spazi di Banach. Esempi di $\|\cdot\|_p$ in \mathbb{R}^N ed esempio di $C^0(K)$ con $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$, norme che non sono tra loro equivalenti. Completezza di $C^0([0, 1])$ con norma $\|\cdot\|_\infty$ e non completezza rispetto a

$\|\cdot\|_1$. Spazi $L^1(B)$ con classi di funzioni tra loro uguali q.o. e richiamo completezza. Introduzione degli spazi $L^p(B)$ per $1 \leq p \leq \infty$. Prova che $L^\infty(B)$ è normato completo. Spazi prehilbertiani: prodotto scalare, disuguaglianza di Schwarz, norma e identità del parallelogramma. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert: \mathbb{R}^N e $L^2(B)$, norme hilbertiane. La regola del parallelogramma non vale in $L^1(0,1)$ e in $L^\infty(0,1)$. Disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowski con dimostrazione. Teorema di completezza degli spazi $L^p(B)$ per $1 < p < \infty$, con dimostrazione. Corollario per estratta convergente q.o. ed esempio di non convergenza q.o. per tutta la successione. Inclusioni e controesempi per gli spazi $L^p(B)$. Spazi ℓ^p , loro inclusioni, operatori di immersione, esempi di sottospazi chiusi e densi. Operatori lineari tra spazi normati sono continui se e solo se sono limitati. $\mathcal{L}(E, F)$ è completo se F è completo. Duale di uno spazio normato. Convessi chiusi non vuoti di uno spazio normato. Teorema delle proiezioni su un convesso chiuso non vuoto di uno spazio di Hilbert. Osservazioni ed esempi-controesempi. Operatori di proiezione. Proiezioni su sottospazi. Ortogonale di un sottoinsieme e teorema di decomposizione ortogonale. Teorema di rappresentazione di Riesz, commenti e osservazioni.

Serie di Fourier

Sistemi ortonormali completi. Esempi. Coefficienti di Fourier astratti. Problematica e teorema di Fisher-Riesz. Dimostrazione di alcuni lemmi preliminari. Teorema della migliore approssimazione, disuguaglianza di Bessel. Procedimenti di ortonormalizzazione; teorema di Schmidt. Caratterizzazioni dei sistemi completi e spazi separabili. Esistenza di un sistema completo per spazi separabili, con esempi. Funzioni periodiche e densità di $C^0(\mathbb{T})$ in $L^2(\mathbb{T})$ (senza dimostrazione). Polinomi trigonometrici e serie di Fourier con sistema di seni e coseni. Nucleo di Dirichlet. Nucleo di Fejer e sua rappresentazione senza dimostrazione. Proprietà del nucleo di Fejer e teorema di convergenza uniforme di $K_n * f$ a $f \in C^0(\mathbb{T})$, densità dei polinomi trigonometrici, completezza del sistema $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Esempi di serie di Fourier: identità di Parseval e applicazioni al calcolo della somma di serie numeriche.