Pierluigi COLLI **Programma del corso 2011/12**

Complementi di Analisi Matematica II – 6 CFU – I Semestre

Successioni e serie di funzioni

Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme. Definizioni, esempi, commenti. Proprietà che si conservano nella convergenza puntuale e/o uniforme: limitatezza, monotonia, continuità. Convergenza degli integrali nella convergenza uniforme. Convergenza uniforme e derivate, controesempi e teorema relativo. Serie di funzioni: convergenza totale e assoluta, criterio di Weierstrass. Derivazione e integrazione per serie. Serie di potenze ed esempi, raggio di convergenza, come si calcola. Teorema su raggio di convergenza. Teorema su derivazione e integrazione delle serie di potenze. Serie di Taylor: esempi, problematica della convergenza, funzione ultrapiatta, condizioni sufficienti per la convergenza. Cenni alle funzioni analitiche.

Serie di Fourier

Polinomi e serie trigonometriche, problematica convergenza puntuale e uniforme, periodicità. Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme. Calcolo dei coefficienti di Fourier per una funzione integrabile secondo Riemann. Lemma relativo alla disuguaglianza di Besel. Convergenza puntuale di serie di Fourier e teorema relativo. Teorema di convergenza uniforme della serie di Fourier. Teorema di integrazione termine a termine. Esempi espliciti di serie di Fourier.

Curve e forme differenziali

Curve nel piano: definizioni, sostegno, esempi. Curve semplici, chiuse, regolari. Retta tangente ad una curva, versore tangente, versore normale. Lunghezza di una curva. Curve regolari a tratti. Teorema di rettificabilità (senza dimostrazione). Curve equivalenti, classi di equivalenza, orientamento. Ascissa curvilinea. Integrale curvilineo di una funzione e indipendenza dalla parametrizzazione. Introduzione alle forme differenziali, esempi, differenziale di una funzione, integrale curvilineo di una forma. Integrale si conserva per parametrizzazioni con lo stesso orientamento. Forme esatte, teorema di caratterizzazione. Forme chiuse, teoremi riguardanti le relazioni tra forme esatte e forme chiuse. Domini semplicemente connessi, domini stellati. Curve tridimensionali ed estensione della teoria: curve regolari, integrali curvilinei, forme differenziali esatte e chiuse, aperti semplicemente connessi, campi vettoriali irrotazionali.

Integrale di Lebesgue

Richiami a spazi elementari di misura. Spazi di misura. Misura ordinaria sui rettangoli di $\mathbb{R}^N$ è $\sigma-$additiva. Misura esterna, insiemi trascurabili. Subadditività della misura esterna. Esempi di insiemi trascurabili, insieme di Cantor. Proprietà vere q.o. Definizione di funzione f integrabile e di $\int_A f \, \mathrm{d}m$: commenti, osservazioni, prime proprietà del nuovo integrale. Tre lemmi preparatori (senza dimostrazione) e poi giustificazione della definizione di integrale. Lemma: $\int_A |s_n - f| \mathrm{d}m \to 0$ se $\{s_n\}$ è una successione nelle condizioni della definizione di integrale. Teorema importante che (riletto a posteriori) sancisce la completezza di $L^1(A)$ e la convergenza q.o. per una sottosuccessione. Problematica del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Teorema di Beppo Levi – I parte; osservazioni e corollari. Lemma di Fatou con varianti. Teorema di Lebesgue. Teorema di Beppo Levi – II parte; caso delle serie. Integrabilità di $x^{-\alpha}$ in $(0,1)$ e $(1,\infty)$.

Funzioni e insiemi misurabili

Funzioni misurabili e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Proprietà delle funzioni misurabili: fra le altre, la chiusura rispetto a $\lim$, $\inf$, $\liminf$. Insiemi misurabili e loro proprietà, in particolare $\sigma-$additività e continuità della misura e dell'integrale su sottoinsiemi misurabili. Aperti e chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. Ancora sugli insiemi trascurabili, integrali di funzioni nulle q.o., continuità dell'integrale rispetto alla misura. Funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue. Integrabilità su unione crescente e unione disgiunta. Integrabilità di $|x|^{-\alpha}$ in più variabili. Integrale di Poisson. Confronti asintotici per valutare l'integrabilità. Teoremi di Fubini e Tonelli (senza dimostrazione) e applicazioni alla convoluzione. Misura del contare e misura di Dirac: caratterizzazioni.