Analisi Matematica 4 – 9 CFU – I Semestre

- **Misura di Lebesgue.** Introduzione. Definizione di algebra, proprietà ed esempi. Funzioni finitamente additive. Misure e σ-algebre. Esempi: misura del contare e misura di Dirac. Definizioni di spazio misurabile, spazio di misura, σ-algebra generata, insiemi di Borel, misure finite e σ-finite, insiemi trascurabili. Continuità della misura ed esempi. Misura esterna: definizione in $\mathbb{R}^N$ e controllo delle proprietà. Misura esterna degli intervalli. Insieme di Cantor: trascurabile, potenza del continuo. Risultati che preparano la definizione di insieme misurabile e definizione stessa. Famiglia degli insiemi misurabili è un'algebra. Proprietà vere quasi ovunque. I misurabili formano una σ-algebra, con dimostrazione. Caratterizzazione dei misurabili come famiglia generata da boreliani ed insiemi trascurabili. Misura degli insiemi misurabili.

- **Funzioni misurabili.** Definizione e proprietà. Controimmagini di semirette varie; chiusura della classe rispetto a varie operazioni. Funzioni semplici. Approssimabilità di una funzione tramite funzioni semplici.

- **Integrale di Lebesgue.** Definizione di integrale e di funzione integrabile. Prime proprietà dell'integrale. Esempio della misura del contare: caratterizzazione funzioni misurabili e integrabili. Costruzione di una misura a partire da f integrabile e non negativa. Integrabilità di funzioni misurabili dominate da funzioni integrabili. Teorema di Beppo Levi e lemma di Fatou. Integrale della somma di funzioni integrabili. Estensione di Beppo Levi alle serie e alle successioni di funzioni con segno qualunque. Lemma di Fatou con estensioni ed esempi. Teorema di Lebesgue della convergenza dominata. σ-additività dell'integrale per funzioni integrabili. Integrabilità di $x^{-\alpha}$ in $(0,1)$ e $(1,\infty)$. Funzioni misurabili e integrabili per la misura di Dirac e la misura del contare. Confronti asintotici per valutare l'integrabilità. Non integrabilità di funzioni tipo $\frac{\sin x}{x}$ in $(\pi,+\infty)$. Integrabilità di $|x|^{-\alpha}$ in più variabili. Riemann-integrabile implica Lebesgue integrabile e i due integrali coincidono. Convergenza quasi uniforme e convergenza in misura: relazioni con la convergenza q.o. ed esempi.

- **Misure e integrali su spazi prodotto.** Misure prodotto e σ-algebra prodotto nel caso di misure σ-finite: schema della dimostrazione sviluppando in dettaglio solo alcuni punti. Controesempio per la misura prodotto nel caso che una delle misure non sia sigma-finita. Teoremi di Tonelli e Fubini con dimostrazioni e osservazioni varie. Applicazione alla convoluzione di funzioni L^1.

- **Misure relative.** Decomposizione di Hahn. Proprietà elementari. Rappresentazione di Jordan. Variazione superiore, inferiore, totale di una misura relativa. Teorema di decomposizione di Hahn con dimostrazione. Misure assolutamente continue e singolari. Definizione della derivata di Radon-Nikodym. Teorema di Radon-Nikodym. Se una misura è μ-singolare la sua derivata di Radon-Nikodym è nulla quasi ovunque rispetto a μ. Enunciato del teorema di decomposizione di Lebesgue (senza dimostrazione). Misure di Lebesgue-Stieltjes: introduzione, funzioni monotone continue da sinistra, intervalli semiaperti superiormente, sigma-additività della misura di questi intervalli. Misura esterna associata. Enunciato del teorema di Caratheodory. Controllo della sigma-additività per intervalli semiaperti, misure di punti, come si ottengono le misure di Lebesgue e di Dirac con le relative sigma-algebre.

- **Spazi normati.** Richiami su spazi vettoriali e spazi normati: spazi metrici, aperti, chiusi, successioni, funzioni continue tra spazi, norme equivalenti e topologie indotte. Esempi di $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{R}^N$ ed esempio di $C^0(K)$ con $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$, norme che non sono tra loro equivalenti. Spazi di Banach. Completezza di $C^0([-1,1])$ con norma $\|\cdot\|_\infty$ e non completezza rispetto a $\|\cdot\|_1$.

- **Spazi $\mathbf{L^p}$.** Spazio $L^1(\Omega)$ con classi di funzioni tra loro uguali q.o. Introduzione degli spazi $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p \leq \infty$. Disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowski con dimostrazione. Teorema di completezza degli spazi $L^p(B)$ per $1 \leq p \leq \infty$, con dimostrazioni. Corollario per estratta convergente q.o. ed esempio di non convergenza q.o. per tutta la successione. Inclusioni fra spazi L^p e conseguenze. Convergenza in $L^p(\Omega)$ implica la convergenza in misura. Convergenza in misura più successione dominata garantiscono la convergenza in $L^p(\Omega)$.

- **Spazi prehilbertiani.** Prodotto scalare, disuguaglianza di Schwarz, norma e identità del parallelogramma. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert: $\mathbb{R}^N$ e $L^2(B)$, norme hilbertiane. La regola del parallelogramma non vale per norme non hilbertiane.

- **Operatori e funzionali lineari e continui.** Spazi ℓ^p, loro inclusioni, operatori di immersione, esempi di sottospazi chiusi e densi. Operatori lineari tra spazi normati sono continui se e solo se sono limitati. $\mathcal{L}(E, F)$ è uno spazio normato ed è completo se F è completo. Duale di uno spazio normato ed esempi. Duali degli spazi ℓ^p. Qualche calcolo di norme di operatori.

- **Spazi di Hilbert.** Convessi chiusi non vuoti di uno spazio normato. Teorema delle proiezioni su un convesso chiuso non vuoto di uno spazio di Hilbert. Osservazioni ed esempi-controesempi. Operatori di proiezione. Proiezioni su sottospazi. Ortogonale di un sottoinsieme e teorema di decomposizione ortogonale. Teorema di rappresentazione di Riesz, commenti e osservazioni.

- **Funzioni a variazione limitata.** Definizione ed esempi. In vista dell'estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale, proprietà delle funzioni a variazione limitata, anche se non è questa la classe giusta. Enunciato del teorema di Jordan. Funzione di Vitali. Funzioni assolutamente continue: motivazione della definizione tramite la dimostrazione che, se una funzione f si può ricostruire - a meno di una costante - integrando la sua derivata, allora f assolutamente continua. Enunciato del teorema inverso, con cenno di uno schema di dimostrazione. Funzioni assolutamente continue sono uniformemente continue; funzioni lipschitziane sono assolutamente continue.

- **Risultati di densità.** Densità delle funzioni semplici misurabili a supporto compatto in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Densità di $C^0_c(\mathbb{R}^N)$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ e poi in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $1 < p < \infty$. $C^0_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$ se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$.

- **Serie di Fourier.** Spazi di Hilbert e sistemi ortonormali: esempi in ℓ^2 e in $L^2(-\pi, \pi)$, con controllo delle condizioni. Teorema con disuguaglianza di Bessel: dimostrazione completa. Serie di Fourier. Migliore approssimazione in sottospazi di dimensione finita generati dai primi n vettori del sistema. Teorema di convergenza della serie di Fourier con le quattro condizioni equivalenti. Basi ortonormali. Spazi separabili. Sistemi linearmente indipendenti. Legami tra esistenza di una base ortonormale e separabilità dello spazio. Base ortonormale in ℓ^2. Sistema fondamentale dei seni e coseni in $L^2(-\pi, \pi)$. Polinomi trigonometrici. Teorema di Weierstrass di densità dei polinomi trigonometrici: lemma ausiliario e dimostrazione completa. Densità dei polinomi trigonometrici in L^2 e convergenza delle serie di Fourier relative. Osservazioni varie sulle serie di Fourier: estensione a intervallo qualunque, deduzione del teorema di Stone-Weierstrass, modifica del prodotto scalare potrebbe semplificare conti, coefficienti di Fourier e identità di Parseval, convergenza dei polinomi trigonometrici, polinomi trigonometrici in ambito complesso. Convergenze q.o., puntuale e uniforme delle serie di Fourier: problematica e prime osservazioni. Enunciato di condizioni per convergenza puntuale e uniforme di serie di Fourier: funzioni regolari a tratti. Convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier nel caso di una funzione di classe C^1 e 2π-periodica: dimostrazione completa. Esempi di serie di Fourier nel caso reale con le serie di seni e coseni. Applicazioni al calcolo della somma di serie numeriche.