

Elementi di Matematica e Statistica – 9 CFU – I Semestre

- **Insiemi.** Insiemi e operazioni con gli insiemi. Insiemi numerici: in particolare, importanza dei numeri naturali e dei numeri reali. Alcuni numeri irrazionali. Proprietà che caratterizzano i numeri razionali e irrazionali. Proprietà di continuità o completezza del sistema dei numeri reali. Prodotti cartesiani di insiemi. Il piano cartesiano. Confronti tra numeri frazionari e decimali.
- **Equazioni e disequazioni.** Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado con esempi. Calcolo algebrico con prodotti notevoli. Disequazione frazionaria. Valore assoluto e una disequazione con valore assoluto. Metodo grafico per le disequazioni.
- **Esponenziali e logaritmi.** Esponenziali e loro proprietà. Definizione di logaritmo e proprietà dei logaritmi. Numero e . Esempi ed esercizi sui logaritmi.
- **Richiami di geometria analitica.** Punti, distanza tra punti, rette, rette ortogonali, parabole e utilizzo delle parabole per risoluzione disequazioni di secondo grado. Equazione della circonferenza dati centro e raggio. Calcolo centro e raggio a partire dall'equazione di una circonferenza. Posizioni possibili di retta e circonferenza e di retta e parabola nel piano.
- **Funzioni.** Concetto di funzione: definizione, dominio, codominio, immagine, tanti esempi. Funzioni iniettive, suriettive, biettive, funzione inversa. Richiami sulle funzioni inverse di x^n con n pari e dispari. Funzioni x^a con a reale: proprietà, grafici, funzioni inverse. Funzione esponenziale e funzione logaritmo: una inversa dell'altra, proprietà di e^x e $\ln x$. Funzioni pari, dispari, periodiche: molti esempi. Misurazione di un angolo in radianti, in vista dei richiami sulle funzioni trigonometriche. Definizione e significato geometrico di seno e coseno, come coordinate del punto della circonferenza trigonometrica e come rapporto cateto-ipotenusa in un triangolo rettangolo. Angoli notevoli. Estensioni ad angoli non acuti. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$: grafici e proprietà. Definizione e proprietà di $\tan x$ e $\arctan x$. Trasformazione di grafici partendo da un grafico dato. Esempi di funzioni.
- **Limiti.** Definizione di limite in modo graduale, cominciando dal limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$. Estensioni agli altri limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ con esempi. Limite per x che tende a un numero finito: caso delle funzioni continue. Limite per x che tende a x_0 da destra e da sinistra. Limite finito bilatero di funzioni per $x \rightarrow x_0$. Esempi in cui il limite bilatero, per x che tende a valore finito oppure $+\infty$ oppure $-\infty$, non esiste. Proprietà algebriche e di composizione nei limiti: caso delle funzioni continue, esempi con estensione ai valori $+\infty$ e $-\infty$. Forme indeterminate. Molti esempi. In particolare, somma di una progressione geometrica. Successioni e limiti di successioni: convergenti, divergenti, indeterminate. Molti esempi. Progressione geometrica e comportamento in tutti i casi. Somme geometriche parziali e studio del limite. Serie geometrica, Achille e la tartaruga. Successione di Fibonacci e proprietà. Successioni dei tassi di accrescimento e convergenza alla sezione aurea. Introduzione del numero e come limite di una successione, dopo un lavoro preparatorio su altre successioni. Come conseguenza, esame di alcuni limiti notevoli per le funzioni. Limite di $\sin t/t$ per $t \rightarrow 0$ dedotto con considerazioni geometriche e, come conseguenza, limite di $(1 - \cos t)/t^2$.

- **Derivate.** Introduzione alle derivate come limite del rapporto incrementale e significato geometrico del coefficiente angolare della retta tangente. Calcolo derivate di funzione costante e di x^3 . Estensione a tutte le funzioni del tipo x^a con considerazioni sui domini delle funzioni e delle loro derivate. Derivata di a^x . Regole di derivazione di somme, prodotti, quozienti e composte di funzioni. Calcolo della derivata di $\sin x$. Breve digressione su infinitesimi e infiniti e loro confronti con gli ordini. Derivate di funzioni trigonometriche e logaritmiche. Osservazioni su legame tra segno derivata e crescita/decreta della funzione: posizione delle rette tangenti sul grafico della funzione in relazione alle loro derivate. Calcolo di derivate di funzioni composte. Studio della derivabilità di una funzione definita a tratti. Richiamo che derivabile implica continua in un punto ma non vale il viceversa. Enunciato del teorema di De l'Hopital e qualche applicazione.
- **Studi di funzione.** Definizione di punto di massimo e minimo (assoluto e relativo); punti stazionari. Non tutti i punti stazionari sono massimi o minimi: il caso del flesso a tangente orizzontale. Ricerca dei massimi/minimi liberi di una funzione tramite il calcolo della derivata e lo studio del suo segno. Ricerca dei massimi/minimi di una funzione alla frontiera di un dominio limitato. Descrizione grafica del concetto di convessità/concavità. Definizione di derivata seconda. Legame tra convessità/concavità della funzione e il segno della sua derivata seconda. Definizione di punto di flesso. Casi di non derivabilità: $|x|$ non e' derivabile in 0 ma ha un minimo in 0; $x|x|$ ha un flesso in 0 pur non essendo derivabile due volte. Asintoti verticali, orizzontali, obliqui: esempi. Studio completo di funzioni.
- **Integrali.** Significato fisico della derivata: velocità media come rapporto spazio-tempo, velocità istantanea come limite di un rapporto incrementale di questo tipo. Esempi. Problema inverso: dalla conoscenza della velocità risalire allo spazio percorso. Somme integrali. Problema dell'area e procedimento per la definizione di integrale. Somme superiori e somme inferiori convergono allo stesso limite (solo enunciato). Calcolo di integrale di x e x^2 su $[0, 1]$ usando il metodo delle somme: complessità dei calcoli. Definizione di primitiva. Richiamo delle definizioni di integrale definito e di integrale indefinito come famiglia delle primitive. Due primitive differiscono per una costante. Proprietà dell'integrale: linearità (anche per integrale indefinito), confronto, additività rispetto all'intervallo di integrazione, valor medio, integrale del modulo della funzione. Teorema fondamentale del calcolo con un'idea di dimostrazione. Tabella fondamentale delle funzioni primitive ed estensione all'integrazione di derivate di funzioni composte. Diversi esempi di integrazione per sostituzione, sia per integrali indefiniti che definiti. Calcolo di un'area delimitata da due funzioni. Regola di integrazione per parti sia nel caso di integrali definiti che indefiniti. Diversi esempi ed applicazioni della regola di integrazione per parti. La funzione $\arcsin x$ e la sua derivata. Integrali di funzioni razionali fratte (limitandosi al caso in cui denominatore sia un polinomio di secondo grado). Divisione polinomiale e analisi dei tre casi: denominatore con radici reali distinte, con radici reali coincidenti, e con nessuna radice reale. Esempi di calcolo esplicito per ciascun caso.
- **Statistica descrittiva.** Statistica: introduzione, statistica descrittiva e induttiva, popolazione statistica, campione, variabile quantitativa e qualitativa, unità statistiche, matrice dei dati, istogrammi con esempi, frequenza relativa, analisi dei dati statistici. Indici statistici: tendenza centrale, dispersione, forma. Media e media pesata con esempi; moda, distribuzione unimodale e distribuzione bimodale. Introduzione alla mediana, con esempio delle distanze percorse dai piccioni viaggiatori. Definizione ed esempio di calcolo.

Quantili: caso dei quartili e cenni ai decili e percentili. Indici di dispersione: campo di variazione, scarto, scarto medio assoluto, varianze. Sulla varianza ci soffermiamo più a lungo introducendo la formula più comoda per il calcolo e facendo esempi. Deviazione standard. Ancora sui quartili: calcolo nell'esempio delle altezze delle 120 ragazze e distanza interquartile. Deviazione standard ed esempio di calcolo: voti negli esami, peso delle caramelle prodotte. Come cambia la varianza per traslazione o dilatazione dei dati.

- **Calcolo combinatorio.** Conteggi e calcolo combinatorio, regola fondamentale dei conteggi. Disposizioni con ripetizioni e senza ripetizioni. Esempi vari. Permutazioni ed anagrammi possibili di una parola, anche con lettere ripetute. Combinazioni con esempi di mani possibili in un gioco di poker e coefficiente binomiale. Generalizzazione ai coefficienti multinomiali e numero di modi in cui dividiamo un gruppo di n elementi in sottogruppi di k_1, k_2, \dots elementi. Esempio dei gruppi di studio di una classe. Digressione sul coefficiente binomiale con binomio di Newton e rappresentazione di 2^n .
- **Probabilità.** Spazio campionario ed eventi: esempi del lancio di un dado, lanci ripetuti di una moneta, bersaglio circolare. Identificazione degli eventi come sottoinsiemi. Cinque diversi esempi di spazio campione e relativi eventi: lancio di un dado, lancio ripetuto di una moneta per 5 volte, estrazione da un mazzo di 52 carte, bersaglio di forma disco per un dardo, dispositivo elettronico. Identificazione evento-sottoinsieme. Operazioni sugli insiemi e loro proprietà. Importanza che la famiglia degli eventi-insiemi sia stabile rispetto alle operazioni insiemistiche. Introduzione della funzione probabilità con gli assiomi; costruzione della funzione nell'esempio del dado e possibili distribuzioni di probabilità nel caso del dispositivo elettronico. Assiomi, discussione di proprietà quali $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, distribuzioni uniformi (lancio di dadi, estrazioni di carte) e non uniformi (dispositivo elettronico). Esempi: lancio di due dadi e calcolo della probabilità di vari eventi; terno giocato al lotto, difetti dei pezzi prodotti da un macchinario. Probabilità condizionata o condizionale: definizione, esempio della roulette sapendo che esce dispari, esempio dei fumatori e non fumatori con malattia respiratoria. Formula delle probabilità totali ed esempio dell'urna con estrazioni ripetute. Formula di Bayes ed applicazioni ad esempio fumatori e non; esempio delle due urne di cui una scelta a caso; esempio dei cassetti con monete svolto per bene e con varianti. Eventi indipendenti. Lanci ripetuti di una moneta che può essere truccata. Estrazione di due assi dal mazzo di 52 carte con e senza reinserimento. Esempio dei fiori con geni indipendenti e svolgimento. Cenni alla distribuzione ipergeometrica, dapprima su un esempio (2 bianche e 3 rosse nell'urna, 3 estrazioni senza rimpiazzo) e poi in generale.
- **Variabili aleatorie.** Variabili aleatorie: definizione, esempi delle altezze delle 120 ragazze e del lancio ripetuto di 3 monete. Variabili aleatorie discrete: distribuzioni di probabilità e funzioni di ripartizione: esempio delle altezze delle ragazze, delle tre monete e dei lanci ripetuti con distribuzione binomiale. Richiami sulla distribuzione binomiale. Esercizi sulla confezione di 3 matite con percentuale di difetto di produzione e del problema di overbooking sull'aereo. Esercizi di verifica su possibili distribuzioni di probabilità. Valore atteso o media di una variabile aleatoria discreta: esempio del lancio di un dado e del lancio di due dadi con calcolo della distribuzione di probabilità e delle medie che vengono 3.5 e 7 (il doppio). Calcolo del valore atteso nel caso del numero di femmine nate in famiglie di 4 figli con probabilità $p = 0.5$ e $p = 0.55$. Richiamo su spazi campione. Esempio di lancio di una moneta truccata e variabili aleatorie relative: numero di teste e numero di variazioni. Media della somma e del prodotto. Leggi congiunte, marginali, variabili indipendenti. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, visto anche su

un caso particolare. $E(XY) = E(X)E(Y)$ se le variabili aleatorie sono indipendenti. Applicazione alla distribuzione binomiale. Varianza e sua rappresentazione, calcolo nel caso della distribuzione binomiale $B(1, p)$. Richiami di media e varianza. Proprietà della varianza nel caso di aX , $a + X$, $X + Y$ con introduzione della covarianza, che si annulla nel caso di variabili indipendenti. Caso della distribuzione binomiale $B(n, p)$ in cui il numero di successi si scrive come somma di n variabili aleatorie indipendenti $B(1, p)$. Calcolo della varianza. Esercizio del bersaglio (6 colpi, $1/5$ di probabilità di fare centro); esercizio dell'urna 2 rosse, 1 blu, 7 nere con rimpiazzo e due variabili aleatorie X (numero di estratte rosse) e Y (numero di estratte blu) non indipendenti, osservazioni sulla varianza. Introduzione delle variabili aleatorie continue sugli esempi del dispositivo elettronico e delle altezze. Densità di probabilità e funzione di distribuzione/ripartizione, proprietà. Tre esempi, tra cui la distribuzione esponenziale. Media, varianza, deviazione standard e applicazione alla distribuzione esponenziale. Media e varianza per combinazioni di variabili aleatorie: formule, con una sola dimostrazione. Moda e mediana: calcolo di queste nel caso della distribuzione esponenziale. Altro esempio con parabola ristretta all'intervallo $(-2, 1)$, calcolando media, moda, mediana. Distribuzione normale e sue proprietà": introdotto per bene l'argomento. Variabili aleatorie standardizzate. Caso della variabile normale. Funzione di distribuzione. Calcolo di alcune probabilità per la variabile normale standardizzata in opportuni intervalli utilizzando le tavole per la distribuzione normale. Tre esempi per variabili normali con calcoli in cui ci si riconduce alla variabile standardizzata e si usano le tavole. Enunciato del teorema del limite centrale. Intervalli di confidenza. Valori critici e grado di fiducia: i casi 95, 90, e 99 per cento. Come si trovano i coefficienti relativi. Esempi: campione di 100 persone, diametri casuali di 200 sferette, due partiti A e B in cui si suddivide una popolazione, lanci ripetuti di una moneta in cui occorre situare p , inquinamento atmosferico.