Pierluigi COLLI **Anno Acc. 2006/07**

Equazioni a Derivate Parziali – 7 CFU – I Semestre
Programma della Parte b

Spazi di funzioni a valori vettoriali

Introduzione: domini spazio-temporali, problemi parabolici e iperbolici, equazioni del calore e delle onde, soluzioni regolari e non, trucco $v = e^{-\lambda t}u$. Spazi $C^k([0,T];X)$ e $\mathcal{D}(0,T;X)$. Funzioni misurabili e integrabili da $(0,T)$ in X : definizioni, proprietà, esempi. Spazi $L^p(0,T;X)$ e loro inclusioni. Definizione di $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Spazi $L^p(0,T;X)$: duali, separabilità, convergenze forti e deboli.

Tripla $V \subset H \equiv H' \subset V'$ di spazi per i problemi d'evoluzione. Definizione di derivata generalizzata e legami con derivata classica e nel senso delle distribuzioni. Lemma sulle convergenze deboli. Teorema fondamentale del calcolo.

Spazi $W^{1,p}(0,T;X)$: definizioni e assoluta continuità delle funzioni. $W^{1,\infty}(0,T;X) \subset C^{0,1}([0,T];X)$ e $W^{1,p}(0,T;X) \subset C^{0,1/p'}([0,T];X)$ per $1 < p < \infty$.

Se $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, e V, H, V' è una tripla di spazi, allora l'insieme $W := \{u \in L^p(0,T;V) \ : \ u' \in L^{p'}(0,T;V')\}$ è uno spazio di Banach e, nel caso $p = 2$, di Hilbert; poi $C^1([0,T];V)$ è denso in W, $W \subset C^0([0,T];H)$ e vale una formula fondamentale del calcolo.

Problemi parabolici

Impostazione di un problema parabolico astratto a partire da equazione del calore e condizioni al bordo del terzo tipo. Formulazione variazionale. Formulazioni equivalenti per l'equazione e il problema di Cauchy. Forme $a(\cdot,\cdot)$ bilineari continue e coercive in senso debole su $V \times V$; operatore $A : V \to V'$ associato.

Isomorfismo $u \mapsto (u' + Au, u(0))$? Lemma di Gronwall (versione continua). Stima a priori. Teorema di buona posizione del problema $u' + Au = f$ in V', q.o. in $(0,T)$; $u(0) = u_0$ in H. La stima a priori implica unicità e dipendenza continua.

Esistenza della soluzione: approssimazione con Faedo–Galerkin; esistenza di soluzioni approssimanti u_n; stima uniforme; passaggio al limite per convergenza debole di una sottosuccessione in $L^2(0,T;V)$.

Diverse osservazioni: convergenza debole di tutta la successione, debole star di $\{u_n\}$ anche in $L^\infty(0,T;H)$, limitatezza e conseguente convergenza debole di $\{u_n'\}$ in $L^2(0,T;V')$

nel caso di basi speciali di autovettori.

Caso di forma a e operatore A dipendente dal tempo, con esempio di un'equazione parabolica lineare con coefficienti variabili: modifiche al teorema di buona posizione (in particolare nella dimostrazione) per questa situazione.

Spazio $D(A)$ e sua caratterizzazione in casi particolari. Teorema di regolarità: se $u_0 \in V$, $f \in L^2(0,T;H)$ e A è simmetrico, allora la soluzione u sta in $H^1(0,T;H) \cap L^2(0,T;D(A))$.

Problemi iperbolici

Impostazione di un problema iperbolico astratto a partire dall'equazione delle onde con condizione di Neumann non omogenea. Metodo delle differenze finite con discretizzazione in tempo.

Teorema di esistenza di una soluzione u – con la regolarità $u \in W^{2,\infty}(0,T;H) \cap W^{1,\infty}(0,T;V)$ – di $u'' + Au = f$ in V', q.o. in $(0,T)$; $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$. Introduzione dello schema discreto; esistenza della soluzione del problema discreto; stima uniforme indipendente dal parametro di discretizzazione; passaggio al limite per compattezza debole star. Dimostrazione del lemma di Gronwall discreto utilizzato nella dimostrazione.

Teorema di unicità e dipendenza continua per soluzioni $u \in C^1([0,T];H) \cap C^0([0,T];V)$. A questo punto, risultato di buona posizione nel quadro di soluzioni con questa regolarità e dati $f \in W^{1,1}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$, $u_0 \in V$, $v_0 \in H$: approssimazione con dati più regolari per cui si possa applicare il precedente teorema di esistenza e in seguito passaggio al limite. Come ausilio, densità di $D(A)$ in V se A è simmetrico.

Esempio di problema non lineare: $u_{tt} - \Delta u = f(x,t)\beta(u, u_t)$ con β lipschiziana rispetto alla coppia di variabili. Schema di punto fisso e applicazione del teorema delle contrazioni passo dopo passo nel tempo.