Pierluigi COLLI **Anno Acc. 2009/10**

Equazioni di Evoluzione – 6 CFU – II Semestre
Programma del I Modulo

- Introduzione: discussione generale su equazioni di evoluzione, modelli, problematiche, tipi di risultati, metodi di risoluzione.

- Equazioni differenziali $u'(t) = F(t, u(t)))$ in spazi di Banach, con F uniformemente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy. Dimostrazione esistenza col metodo delle contrazioni iterate. Soluzione esiste in tutta la semiretta $[0, +\infty)$.

- Operatori lineari non limitati che siano massimali monotoni in uno spazio di Hilbert H: definizioni e primi esempi, tra cui la derivata $u \mapsto u_x$ in una dimensione spaziale e $u \mapsto -\Delta u$ in dimensione N. Proprietà degli operatori massimali monotoni A: dominio denso, grafico chiuso, $(I + \lambda A)$ risulta suriettivo e $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ è lineare limitato con norma ≤ 1 per tutti i $\lambda > 0$. Risolvente J_λ e regolarizzato Yosida $A_\lambda := (I - J_\lambda)/\lambda$ con tutte le proprietà.

- Teorema di Hille-Yosida con tutta la dimostrazione nel caso dell'equazione omogenea $u'(t) + Au(t) = 0,\ t > 0$, e dato iniziale $u_0 \in D(A)$. Complementi e osservazioni: in particolare proprietà di semigruppo e soluzione generalizzata nel caso di $u_0 \in H$. Semigruppi continui ed estensione ad equazioni non omogenee con secondo membro $f(t)$.

- Richiami su spazi di Sobolev: derivate deboli e derivate nel senso delle distribuzioni. Distribuzioni, derivate di distribuzioni, altre operazioni su distribuzioni. Convergenza nel senso delle distribuzioni. Spazi di Sobolev: definizioni e proprietà di $W^{k,p}(\Omega)$ per k intero positivo e $p \in [1, \infty]$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ con cenno alle proprietà, $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $H^{-k}(\Omega)$. Disuguaglianza di Poincaré. Enunciato teorema di inclusione per $W^{1,p}(\Omega)$, commenti ed esempi in dimensioni $N = 1, 2, 3$. Caratterizzazione di $f \in H^{-1}(\Omega)$.

- Formulazioni variazionali per problemi ai limiti ellittici. Problema di Dirichlet omogeneo con operatore $A = -\Delta$ sia da $H_0^1(\Omega)$ a $H^{-1}(\Omega)$, che in $L^2(\Omega)$ con dominio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Problema di Neumann e massimale monotonia di $-\Delta$ anche in questo caso. Esempio di u_x in $L^2(0, +\infty)$ con dominio $H_0^1(0, +\infty)$. Operatore associato all'equazione delle onde visto sia in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ che in $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$: controllo che $(u, v) \mapsto (-v, -\Delta u) + \lambda(u, v)$ è massimale monotono per $\lambda \geq 1/2$.

- Osservazioni sull'equazione $u' + Au + \lambda u = f$ che si riconduce a $w' + Aw = g$ con la trasformazione $w(t) = e^{\lambda t} u(t)$.

- Regolarità per la soluzione del problema di Cauchy $u' + Au = 0$, $u(0) = u_0$ con dato iniziale $u_0 \in D(A^k)$, $k \geq 2$.

- Operatore aggiunto: definizioni e proprietà. Operatori simmetrici e autoaggiunti, esempi. Operatori anti-aggiunti. Se A è massimale monotono e simmetrico, allora è autoaggiunto. Esistenza, unicità, regolarità per la soluzione del problema di Cauchy $u' + Au = 0$, $u(0) = u_0$ con A autoaggiunto e $u_0 \in H$. Osservazioni su effetto regolarizzante e sull'equazione non omogenea.

- Equazione del calore: introduzione, teoremi di esistenza e unicità della soluzione nei casi Dirichlet e Neumann omogenei per un dato in $L^2(\Omega)$, effetto regolarizzante, identità dell'energia. Osservazioni ed estensioni: dato in $H^{-1}(\Omega)$, cenni a secondo membro non nullo, dato in $H^1_0(\Omega)$ per il problema di Dirichlet e in $H^1(\Omega)$ per il problema di Neumann con ulteriore regolarità $u_t \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)$. Principio del massimo per equazione del calore.

- Equazione delle onde: significato fisico, teorema di esistenza e unicità della soluzione nel caso Dirichlet omogeneo con dati in $(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times H^1_0(\Omega)$, identità dell'energia. Osservazione su dati (meno regolari) in $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con l'equazione che ha significato in $H^{-1}(\Omega)$. Regolarità della soluzione in corrispondenza a maggiore regolarità sui dati. Per l'equazione delle onde non c'è l'effetto regolarizzante: esempio in $\mathbb{R}$ con soluzione esplicita.

- Equazione di trasporto $u_t + u_x = 0$ in $L^2(0, +\infty)$ con dato $u_0 \in H^1_0(0, +\infty)$: teorema di esistenza e unicità, soluzione esplicita, qualche commento.

- Equazione non omogenea $u'(t) + Au(t) = f(t)$, $t > 0$, e relativo problema di Cauchy con condizione iniziale $u(0) = u_0$: soluzione classica e soluzione generalizzata, condizioni sui dati u_0 ed f, esistenza della soluzione u e rappresentazione in termini del semigruppo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associato ad A. Funzioni di $W^{1,p}(0, T; H)$ con cenni alle proprietà, in particolare regolarità hölderiana. Problema di Cauchy per $u' + Au = F(u)$: con F lipschitziana da H in H: esistenza e unicità della soluzione classica.