# COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

## Prova scritta del 30 gennaio 2012

**Esercizio 1.** Sia $f(x)$ la funzione $2\pi-$periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(3x) & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{se} \quad x = 0 \\ \cos(3x) & \text{se} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Dire poi in quali punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la serie di Fourier converge puntualmente e per tali punti indicare il valore della somma della serie.

**Esercizio 2.** È possibile determinare funzioni $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ tale che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\, \mathrm{d}x + \frac{h(y) - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, \mathrm{d}y$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Se la risposta è affermativa, dare un'espressione esplicita per tali funzioni.

**Esercizio 3.** Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \max\{1 - |x|, 0\}, \quad f_n(x) = g(nx),$$

si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

a) Studiare la convergenza puntuale della serie in $\mathbb{R}$.

b) Individuare eventuali sottoinsiemi $S$ di $\mathbb{R}$ su cui la serie converge uniformemente, motivando per bene la risposta.

c) Indicata con $u$ una funzione definita in $\mathbb{R}$ tale che $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$, discutere misurabilità e integrabilità secondo Lebesgue della funzione $u$.

# COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 27 febbraio 2012

**Esercizio 1.** Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$,

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{x+n},$$

a) studiare la convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ in $[0,+\infty)$;

b) la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$ o almeno in intervalli contenuti in $[0,+\infty)$?

c) studiare la convergenza uniforme della successione delle derivate $\{f'_n\}$ in $[0,+\infty)$;

d) come si colloca l'esempio proposto in questo esercizio nel quadro del teorema che lega la convegenza uniforme della successione delle derivate alla convergenza della successione di funzioni?

**Esercizio 2.** Dire se la seguente forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \big(2x(y-1)^2+y(z+1)^2\big)dx + \big(x(1+2xy)+2x(z-x)+xz^2\big)dy + (2xyz+2xy)dz$$

è esatta in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,1,-1)\}$.

**Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $\mathbb{R}$ e tale che

$$0 \leq f(x) \leq 5 \quad \text{per q.o.} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Si consideri la successione di funzioni

$$u_n(x) = n^2 \sin^2 \frac{f(x)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Provare l'integrabilità delle funzioni $u_n$ per ogni $n \geq 1$.

b) Studiare la convergenza q.o. della succcessione $\{u_n\}$ in $\mathbb{R}$.

c) Dire se il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx$$

esiste e assume valore finito oppure infinito, giustificando la risposta data.

[*Suggerimento:* potrebbe essere utile cercare opportune maggiorazioni per la funzione $t \mapsto |\sin t|$]

# COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

## Prova scritta del 25 giugno 2012

**Esercizio 1.** Nell'insieme $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| > 1, \ |y| > 1\}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (x^2 + 2xy)\, dx + 2xy\, dy.$$

Si discuta se $\omega$ è esatta e, nel caso, se ne calcoli una primitiva.

**Esercizio 2.** Per $\alpha > 0$ si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha e^{-nx}, \quad x \in [0, +\infty).$$

a) Controllare che per $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 0$ fissati la funzione $f_n$ è integrabile secondo Lebesgue in $[0, +\infty)$.

b) Per $\alpha > 0$ e per $\varepsilon > 0$ fissati, studiare le convergenze puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$ in $[\varepsilon, +\infty)$.

c) Per quali $\alpha > 0$ **esiste finito** il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} f_n(x) dx \ ?$$

Motivare per bene la risposta data.

**Esercizio 3.** Fornire tre esempi di serie di potenze reali, del tipo $\sum a_n (x - x_0)^n$, rispettivamente con le seguenti caratteristiche:

a) con raggio di convergenza infinito e centro nel punto $x_0 = -2$;

b) con raggio di convergenza 5 e tale che **non converga** per $x = 0$;

c) con raggio di convergenza $3/2$ e tale che **converga uniformemente** nell'intervallo chiuso $[1, 4]$.

**Esercizio 4.** Sia $f$ una funzione **continua in $\mathbb{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.** Si ponga $h_n(x) = f(x + n)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

a) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato studiare l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione $h_n$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

b) Calcolare, giustificando per bene la risposta,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,1]} h_n(x) dx.$$

# COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

## Prova scritta del 24 settembre 2012

**Esercizio 1.** Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (\tanh x)^n$,

a) studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $f_n$ in $\mathbb{R}$.

b) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, provare l'integrabilità su tutto $\mathbb{R}$ della funzione

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

c) Esiste il $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx$? Motivare per bene la risposta.

**Esercizio 2.** Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{2x}{y+1}\,dx - \frac{x^2}{(y+1)^2}\,dy$$

dove $\gamma$ è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, contenuta nel semipiano superiore e percorsa in senso orario.

**Esercizio 3.** Sia $f(x)$ la funzione $2\pi$−periodica tale che $f(x) = |x| - \frac{\pi}{2}$ per $x \in [-\pi, \pi)$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) Dire poi in quali punti $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier converge puntualmente.

c) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

**Esercizio 4.** Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni (misurabili e) integrabili secondo Lebesgue sull'intervallo $(-1,1)$ tali che $f_n \to f$ q.o. in $(-1,1)$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) \geq -x^4 \quad \text{per q.o. } x \in (-1,1), \qquad \int_{(-1,1)} f_n(x)dx \leq 10.$$

a) Dire perché la funzione limite $f$ è misurabile.

b) Mostrare che $f$ è anche integrabile in $(-1,1)$.