ANALISI MATEMATICA 3

esercizi assegnati per la prova scritta del 31 gennaio 2011

Esercizio 1. Per $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ si ponga $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(n^5 x\right)}{3 + n^4 x^2}$.

a) Provare l'integrabilità delle funzioni f_n in $(0, +\infty)$.

b) Studiare la convergenza quasi ovunque della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
Inoltre, indicato con $C \subseteq (0, +\infty)$ l'insieme degli x in cui la serie converge, e con $s : C \to \mathbb{R}$ la somma della serie, si chiede se C è misurabile e se la funzione s è integrabile su C.

c) Discutere la validità della seguente uguaglianza

$$\int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 2. Per $1 \leq p \leq \infty$ si consideri l'operatore $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ definito da

$$(Tu)(x) := \int_{[x, x+500]} u(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Per quali $p \in [1, \infty]$ l'operatore T risulta ben definito? Per tali valori di p stabilire se T è lineare e/o continuo.

b) Nei casi in cui $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}); L^\infty(\mathbb{R}))$, calcolare la norma dell'operatore.

c) Sia ora $p = 1$: per $u \in L^1(\mathbb{R})$ ci chiediamo se la funzione $x \mapsto (Tu)(x)$ ha ulteriori proprietà: per esempio, è non negativa? è continua? ammette limite per $x \to -\infty$ e/o per $x \to +\infty$?

d) Sempre per $p = 1$, l'operatore T è suriettivo?

ANALISI MATEMATICA 3

esercizi assegnati per la prova scritta del 21 febbraio 2011

Esercizio 1. Posto, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u(x) = \dfrac{x}{|x|} \max\big\{0\,,\,1 - |x|\big\}$ e indicata con χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $[-n, n]$, si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \chi_n(x) \int_0^x (u(t))^n \, dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{per} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Dire se la successione $\{f_n\}$ è ben definita e discutere la convergenza quasi ovunque di f_n in $\mathbb{R}$;

b) provare l'integrabilità delle funzioni f_n in $\mathbb{R}$ e studiare la limitatezza o meno della successione degli integrali $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$.

c) Vale un risultato di passaggio al limite sotto il segno di integrale per la successione f_n?

Esercizio 2. Motivando per bene le risposte, dire se ciascuna delle seguenti $N_i(f)$, $i = 1, \ldots 4$, è una norma in $C^1([-1,1])$ e, in caso affermativo, valutare se $C^1([-1,1])$ risulta uno spazio di Banach rispetto a tale norma.

a) $N_1(f) = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |f'(x)|$;

b) $N_2(f) = |f'(1/2)| + \max\limits_{-1 \le x \le 1} |f(x)|$;

c) $N_3(f) = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |f'(x)| + \displaystyle\int_{-1}^{1} |f((x)| dx$;

d) $N_4(f) = \max\limits_{-1 \le x \le 1} \Big(|f(x)|^2 + |\arctan(f'(x))| \Big)$.

Esercizio 3 (in più per gli studenti di Analisi C). Nello spazio di Hilbert $H = L^2(-\pi, \pi)$ si considerino i due sottoinsiemi

$$X = \big\{ a\cos x + bx^2 :\ a, b\ \in \mathbb{R} \big\},$$

$$Y = \{ u \in H :\ u \text{ è una funzione dispari} \}.$$

a) X e Y sono ben definiti? risultano sottospazi di H? sono chiusi?

b) Scrivere esplicitamente una funzione $v \in L^2(-1,1)$ diversa dall'elemento nullo di H che appartenga a $X^\perp$, ortogonale di X.

c) Scrivere esplicitamente una funzione $w \in L^2(-1,1)$ diversa dall'elemento nullo di H che appartenga all'ortogonale $Y^\perp$.

d) Sapete dire quale relazione sussiste tra X e $Y^\perp$? e tra Y e $X^\perp$?

ANALISI MATEMATICA 3

Prova scritta del 30 giugno 2011

Esercizio 1. Posto, per $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = (x-2) \ln x \sin^2 \dfrac{1}{x+1}$,

a) discutere la validità o meno delle inclusioni $f \in L^p(0, +\infty)$ per $p = 1,\, 2,\, \infty$;

b) calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{(n,+\infty)} |f(x)|^2 dx$,

giustificando la risposte date.

Esercizio 2. Per $p \in [1, +\infty)$ si indichi con ℓ^p lo spazio delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che la serie $\|x\|_p^p := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converga. Inoltre, sia ℓ^∞ lo spazio delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ limitate, munito dell'usuale norma $\|x\|_\infty := \sup\limits_{n\geq 1} |x_n|$. Si consideri l'applicazione T definita per $x \in \ell^\infty$ da

$$T : x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto y = (y_1, y_2, \ldots), \quad \text{con } y_n = x_n\, 3^{-n^2}.$$

a) T è lineare?

b) Per quali $p \in [1, +\infty)$ l'applicazione T è ben definita da ℓ^∞ in ℓ^p?

c) Posto ora $p = 1$, si chiede se l'operatore $T : \ell^\infty \to \ell^1$ è continuo.

e) L'operatore $T : \ell^\infty \to \ell^1$ è iniettivo? è suriettivo?

Esercizio 3 (aggiuntivo per gli studenti di Analisi C). Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad |x| + |z| \leq 1\}.$$

a) Mostrare che K è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^3$. È chiuso?

b) K è anche un sottospazio?

c) Individuare ed esplicitare l'insieme $K^\perp$ costituito dai vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono ortogonali a tutti gli elementi di K.

d) Calcolare le proiezioni dei vettori $(5, 5, 5)$ e $(3, 1, 0)$ su K.

Esercizio 4. Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$. Si consideri il problema di Cauchy:

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = y + t^2 g(y) \\ y(0) = a\,. \end{cases}$$

a) Per quali valori di $\gamma > 0$ la condizione $\lim_{|y|\to+\infty} g(y)/|y|^\gamma = 1$ assicura l'esistenza globale per il problema (P)?

b) Si studi il comportamento qualitativo della soluzione di (P) nel caso in cui $g(y) = y^2$ e $a > 0$. Che cosa si può dire per $a < 0$ con $|a|$ sufficientemente grande?

Esercizio 5. Si risolva il sistema lineare

$$x' = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 6 \\ -3 & -9 & -2 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si specifichi la natura dell'origine come punto di equilibrio e si individui la varietà stabile e quella instabile.

Esercizio 6 (aggiuntivo per gli studenti di Equazioni differenziali). Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = xy^2 + xy - 2y\,. \end{cases}$$

Individuare le eventuali traiettorie rettilinee passanti per l'origine. Si individuino poi i punti di equilibrio del sistema studiandone la stabilità.

ANALISI MATEMATICA 3

Prova scritta dell'8 settembre 2011

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sia data una successione $\{E_n\}$ di insiemi misurabili, di misura finita e non necessariamente disgiunti tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = 8,$$

dove m denota proprio la misura tridimensionale di Lebesgue. Posto ora $F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$ per ogni $k \geq 1$, provare che l'insieme $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad x \in F_k \text{ per tutti i } k \geq 57\}$ è misurabile. È possibile calcolare la misura di G o quantomeno fornirne una stima?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di funzioni

$$V = \left\{ u \in C^0([-1,1]) \ : \ \int_{[-1,1]} u(x)dx = 0 \right\}$$

e si definisca

$$\|u\| = \int_{[-1,1]} u^+(x)dx, \qquad u \in V, \tag{1}$$

dove $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$, $x \in [-1,1]$, denota la parte positiva di u.

a) Dire perché V è uno spazio vettoriale.

b) Verificare che $\| \cdot \|$ è effettivamente una norma in V.

c) Dare un esempio di funzione $u \in V$ tale che $\|u\| = 2$.

d) Se al posto di (1) si considera la quantità

$$M(u) = \max_{t \in [-1,1]} u^+(t), \qquad u \in V,$$

M è ancora una norma in V?

Esercizio 3 (in più per gli studenti di Analisi C). Indicato con ℓ^2 lo spazio di Hilbert delle successioni reali $x = (x_n)$ tali che la serie $\|x\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converga, sia X il sottoinsieme di ℓ^2 tale che i suoi elementi $x = (x_n)$ verificano

$$x_k = 0 \ \text{ per ogni } k \text{ dispari.}$$

a) L'insieme X è un sottospazio di ℓ^2? è chiuso in ℓ^2?

b) Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione $a^{(\lambda)} := \left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$ appartiene a ℓ^2?

c) Posto ora $\lambda = 1$, si chiede: esiste ed è unica la proiezione di $a^{(1)}$ su X? se la risposta è sì, determinare esplicitamente tale proiezione.

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - (t^2 - 1)^2 \\ \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

a) Studiare l'andamento qualitativo della soluzione (esistenza globale e comportamento agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza) nel caso $\alpha = 0$. La soluzione presenta simmetrie?

b) La soluzione corrispondente al dato $\alpha = 1$ è monotona in un intorno di $t = 0$? Dimostrare che per la soluzione corrispondente al dato iniziale $\alpha = 2$ non vi è esistenza globale per $t > 0$ (può essere utile considerare la soluzione del problema di Cauchy $u' = u^2/2$, con $u(0) = 2$).

Esercizio 5. Risolvere il seguente sistema lineare:

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ -3 & -14 & -3 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $x(0) = \overline{x}$ la corrispondente soluzione verifica la condizione

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty?$$

Esercizio 6 (in più per gli studenti di Equazioni differenziali). Determinare le funzioni u di classe C^1 su un intervallo il cui grafico interseca ortogonalmente le linee di livello della funzione $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.