ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 gennaio 2013

Esercizio 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e di misura finita. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili e tali che

1) $\displaystyle\int_\Omega |f_n(x)|^2 dx < 8$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

2) f_n converge a f q.o. in Ω.

La funzione limite f è misurabile? è integrabile in Ω?

Esercizio 2. La funzione $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 2/\pi \\ x\sin(1/x) & \text{se } 2/\pi < x \le 4/\pi \\ \cos x & \text{se } 4/\pi < x \le \pi \end{cases}$$

è a variazione limitata? è assolutamente continua?

Esercizio 3. Introdotto l'insieme

$$Y = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \ : \ f,\, f' \text{ sono limitate in } \mathbb{R} \text{ e } f(0) = 0 \right\},$$

controllare che Y è uno spazio vettoriale e dimostrare che

$$\|f\|_c = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|\,, \qquad \|f\|_d = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$$

sono entrambe norme in Y ma non sono equivalenti.

Esercizio 4. Posto, l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue,

$$a(u,v) = \int_{(0,1)} t^{-1/2} u(t) v(t) dt \qquad (*)$$

per tutte le funzioni u, $v : (0,1) \to \mathbb{R}$ misurabili e tali che la funzione $t \mapsto t^{-1/2}u(t)v(t)$ sia integrabile in (0,1),

(i) provare che $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ verifica tutte le proprietà di un prodotto scalare;

(ii) $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ definisce effettivamente un prodotto scalare in $L^2(0,1)$?

(iii) Siete in grado di individuare classi di funzioni X tali che per u, $v \in X$ l'integrale in $(*)$ ha senso?

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 febbraio 2013

Esercizio 1. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue μ. Introdotta la funzione di insieme

$$\nu(A) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\in A\cap\mathbb{Z}\cap[-k,k]} 2^{-|n|}, \quad \text{per } A \in \mathcal{L},$$

provare che ν è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$. Inoltre, ν è σ-finita? è assolutamente continua o singolare (oppure né assolutamente continua né singolare) rispetto alla misura μ?

Esercizio 2. Per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (0, +\infty)$ si consideri la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{-2/\pi} & \text{se } 0 < x \le (n+3)^{-1} \\ \pi^{-(n+2)x} & \text{se } x > (n+3)^{-1} \end{cases}$$

Discutere la convergenza di $\{f_n\}$ in $(0, +\infty)$ quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in $L^1(0, +\infty)$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio c_0 delle successioni $u = (u_1, u_2, \ldots)$ reali e infinitesime, munito della norma $\|u\|_{c_0} := \sup\{|u_k|,\ k \in \mathbb{N}\}$. Sia $a = (a_1, a_2, \ldots)$ una successione reale tale che

$$\text{la serie } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ converge e ha per somma 1.}$$

a) Provare che il funzionale $F : c_0 \to \mathbb{R}$, $F(u) := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$, è ben definito, lineare e limitato.

b) Calcolare esplicitamente la norma $\|F\|_{(c_0)'}$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio $L^2(-1,1)$ delle (classi di) funzioni $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ misurabili e di quadrato sommabile in $(-1,1)$. Sia inoltre $C \subset L^2(-1,1)$ il sottoinsieme delle funzioni f tali che

$$\|f-1\|_{L^2(-1,1)} \le 3, \qquad f \ge 0 \text{ q.o. in } (-1,1), \qquad \int_{(-1,1)} xf(x)dx = 0.$$

(i) Provare che C è non vuoto, convesso e chiuso in $L^2(-1,1)$.

(ii) Ricorrendo alla proprietà di distanza minima, trovare la proiezione su C della funzione $g(x) = -1-x$, $x \in (-1,1)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 1 luglio 2013

Esercizio 1. Perché l'insieme

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \begin{array}{c} (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \le \left| x\, 3^{-x^2} \right| \ \text{ se } \ 2k \le x \le 2k+1, \\ 0 < y < 2\, x\, 3^{-x^2} \ \text{ se } \ 2k+1 \le x \le 2k+2 \end{array} \right\}$$

è misurabile rispetto alla misura bidimensionale μ di Lebesgue e di misura finita in $\mathbb{R}^2$? Calcolare $\mu(A)$.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}, \quad x \in (0,1), \ \ n \in \mathbb{N},$$

a) discutere la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $(0,1)$;

b) le funzioni f_n sono integrabili in $(0,1)$?

c) esiste finito il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)dx\,?$$

Esercizio 3. Per $f \in L^1(\mathbb{R})$ si consideri la funzione misurabile

$$g(x) = \int_{(x,+\infty)} f(t) \arctan t \, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Provare che g è ben definita e che $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Sia ora $T : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ l'operatore definito da $Tf = g$: si chiede se T è lineare oppure no.

c) L'operatore T è continuo? Motivare per bene la risposta.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = L^2(-2,2)$

$$X = \{u \in H : \ u(x) = a + bx^2, \ x \in (-2,2), \ \text{per una coppia } (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{if } \ -2 \le x < 0 \\ 0 & \text{if } \ x = 0 \\ x-1 & \text{if } \ 0 < x \le 2 \end{cases} .$$

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un sottospazio di H.

b) X è chiuso in H?

c) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi positivi e sia $\# : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la funzione di insieme definita da

$$\#(E) = \text{cardinalità di } E, \quad E \subseteq \mathbb{N},$$

intendendo naturalmente che $\#(E) = +\infty$ se E è infinito.

a) Verificare che $\#$ è una misura σ-finita su $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

b) Considerato lo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$, si precisino le condizioni perché una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sia misurabile. E quando invece $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è integrabile?

Esercizio 2. Sia $f \in L^1(0, +\infty) \cap C^1([0, +\infty))$. Calcolare, giustificando la risposta, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\ln(n+1)}^{\sqrt{n+5}} f(x)dx.$$

Esercizio 3. Introdotto lo spazio $X = C^0([-1, 1])$ e posto

$$\|f\| := \max\{|f(-1)|, |f(1)|\} + \int_{-1}^{1} |f(x)|dx, \quad |||f||| := \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|, \qquad \text{per } f \in X,$$

a) dimostrare che $\| \cdot \|$ e $||| \cdot |||$ definiscono effettivamente due norme in X;

b) discutere l'equivalenza delle due norme, soffermandosi sulla validità o meno delle due proprietà

$$\text{esiste una costante } C > 0 \text{ tale che } \|f\| \le C\,|||f||| \text{ per ogni } f \in X; \tag{1}$$

$$\text{esiste una costante } D > 0 \text{ tale che } |||f||| \le D\|f\| \text{ per ogni } f \in X. \tag{2}$$

Esercizio 4. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - y = 2z\}.$$

a) Mostrare che X è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. È chiuso?

b) Individuare ed esplicitare il sottospazio $Y = X^\perp$.

c) Calcolare la proiezione del vettore $(2, 2, 3)$ su X.

d) Calcolare la proiezione del vettore $(2, 2, 3)$ su Y.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 novembre 2013

Esercizio 1. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue λ. Consideriamo le funzioni di insieme

$$\mu(A) = \lambda(\{x \in A : \ x \leq 0\}), \quad \nu(A) = \lambda(\{x \in A : \ x \geq 0\}) \quad \text{per } A \in \mathcal{L}.$$

a) Provare che μ, ν sono misure su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$. Sono σ-finite?

b) Valutare se μ, ν sono assolutamente continue o singolari (oppure né assolutamente continue né singolari) rispetto alla misura λ.

c) λ è assolutamente continua o singolare rispetto a μ?

d) μ è assolutamente continua o singolare rispetto a ν?

Esercizio 2. Utilizzando l'estensione del teorema fondamentale del calcolo, provare che la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1, 1]$, è assolutamente continua.

Esercizio 3. Considerata la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-1/n} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1],$$

studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi $L^p([-1, 1])$, per $1 \leq p \leq \infty$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio di Hilbert $H = \ell^2$ delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Si definisca

$$K = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in H : \quad 0 \leq x_n \leq n^{-3} \ \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si chiede di rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme K potrebbe essere vuoto? Provare che K è un sottoinsieme convesso e chiuso di H.

b) Mostrare che l'elemento $w = (w_1, w_2, \ldots)$, con $w_n = (-1)^n/n$ per $n \in \mathbb{N}$, appartiene ad H.

c) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento w su K.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 gennaio 2014

Esercizio 1. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata.

a) Provare che se f è continua in $[-1,1]$, il suo grafico

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1, \ y = f(x)\}$$

ha misura bidimensionale di Lebesgue nulla.

b) Se f è continua nei punti dell'intervallo aperto $(-1,1)$, possiamo ancora concludere che $G(f)$ è misurabile secondo Lebesgue e ha misura nulla?

Esercizio 2. Sia $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 non crescente e non negativa. Ci interessiamo alla successione di funzioni $f_n(x) = g\big(x^n\big)$, $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, e al limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx, \tag{L}$$

dove naturalmente l'integrale qui sopra può anche essere uguale a $+\infty$ per qualche indice n.

a) Dire se esistono (finiti o infiniti) i limiti $L_0 = \lim_{t\to 0^+} g(t)$, $L_\infty = \lim_{t\to+\infty} g(t)$ e quanto possono valere (fare esempi di funzioni g).

b) Provare che se $L_\infty > 0$, allora il limite in (L) vale $+\infty$.

c) Provare che se $L_\infty = 0$ ma $L_0 = +\infty$ allora il limite in (L) vale ancora $+\infty$.

d) Nel caso in cui $L_\infty = 0$ e L_0 è finito e diverso da 0, discutere separatamente il comportamento dei due integrali $\int_{(0,1)} f_n(x)dx$, $\int_{(1,+\infty)} f_n(x)dx$ al tendere di n a ∞ e conseguentemente trovare il valore del limite in (L).

Esercizio 3. Dare un esempio di operatore lineare e continuo da $L^2(\mathbb{R})$ in ℓ^1 che non sia iniettivo e che abbia norma esattamente uguale ad 1.

Esercizio 4. Nello spazio di Hilbert $X = L^2(\mathbb{T})$ si consideri il sistema ortonormale completo $S = \big\{\sqrt{2}/2, \ \cos(kx), \ \sin(kx); \ k \in \mathbb{N}, \ k \neq 0\big\}$ rispetto al seguente prodotto scalare $(f,g)_X := \pi^{-1}\int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx$, $f,g \in X$. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π e tale che

$$u(x) = 1 \ \text{ se } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [0, \pi/2], \qquad u(x) = -1 \ \text{ se } x \in (-\pi/2, 0) \cup (\pi/2, \pi).$$

a) Osservato che $u \in X$, sviluppare la funzione u in serie di Fourier rispetto al sistema S.

b) Utilizzare il risultato trovato per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 febbraio 2014

Esercizio 1. Posto $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ e $f_n(x) = g(nx)\,\chi_{[-n,n]}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ (ove, al solito, χ_A indica la funzione caratteristica dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$), per la successione $\{f_n\}$ si studino le convergenze

a) quasi ovunque, quasi uniforme e in misura su tutto $\mathbb{R}$;

b) in $L^1(\mathbb{R})$ e in $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

Esercizio 2. Posto $f(x) = \text{segno}(\sin(2x))$ per $x \in [-\pi, \pi]$, dove $\text{segno}(t)$ è la funzione che vale 1 per $t > 0$, -1 per $t < 0$, 0 per $t = 0$,

a) calcolare la variazione totale di f in $[-\pi, \pi]$.

b) Esprimere f come differenza di due funzioni monotone non decrescenti.

c) Calcolare la derivata quasi ovunque di f e dire se per f vale il teorema fondamentale del calcolo in $[-\pi, \pi]$.

d) Sviluppare f in serie di Fourier rispetto al sistema ortonormale completo $S = \left\{\sqrt{2}/2,\ \cos(kx),\ \sin(kx);\ \ k \in \mathbb{N},\ k \neq 0\right\}$ quando si consideri il prodotto scalare

$$(f, g) := \pi^{-1} \int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in X.$$

Esercizio 3. Dare un esempio di operatore lineare e continuo da $\mathbb{R}^3$ in $L^\infty(-1, 1)$ che sia iniettivo e che abbia norma esattamente uguale ad 3.

Esercizio 4. Posto $H = L^2(\mathbb{R})$, sia $F : H \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$F(u) = \int_{(1,2)} u(x)dx - \int_{(0,1)} u(x)dx, \quad u \in H,$$

gli integrali essendo intesi nel senso di Lebesgue.

a) F è lineare e continuo? In caso affermativo, si calcoli $\|F\|_{H'}$.

b) Determinare tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $E_\alpha = \{u \in H : \ F(u) = \alpha\}$ è chiuso, è convesso, è un sottospazio.

c) Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che E_α è sottospazio chiuso di H. Controllato che la funzione $w(x) := e^{-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$, individua un elemento di H, determinare la proiezione di w su E_α.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 settembre 2014

Esercizio 1. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione, $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili tale che $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ q.o. in Ω, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sappiamo che

$$u_n \to u \ \text{ q.o. in } \ \Omega, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^2 dx = 100.$$

Utilizzando queste informazioni, dimostrare che

a) $u \in L^2(\Omega)$;

b) $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 10$;

c) $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$.

Esercizio 2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $(\Omega, \mathcal{L}, \lambda)$ lo spazio di misura caratterizzato dalla σ-algebra $\mathcal{L}$ dei sottoinsiemi di Ω misurabili secondo Lebesgue e dalla misura λ di Lebesgue.

a) Provare che l'insieme X delle misure relative definite su $(\Omega, \mathcal{L})$ è un spazio vettoriale.

b) Dare almeno un esempio di sottospazio proprio di X di dimensione infinita.

c) Provare che data una misura relativa φ su $(\Omega, \mathcal{L})$ esistono sempre due misure relative μ e ν tali che μ è λ-assolutamente continua, ν è λ-singolare e inoltre $\varphi = \mu + \nu$.

d) Le misure relative μ λ-assolutamente continua e ν λ-singolare tali che $\varphi = \mu + \nu$ sono univocamente determinate? oppure può esistere una decomposizione diversa di φ?

Esercizio 3. Posto $E = \{f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = 0\}$, si definisca $\|f\|_E = \max\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.

a) Si provi che E è uno spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_E$ è effettivamente una norma.

b) Rispetto alla norma $\|\cdot\|_E$, E è uno spazio di Banach?

c) Si consideri l'operatore lineare $L : E \to C^0([0,1])$ definito da $(Lf)(x) = e^x f'(x)$, $x \in [0,1]$. Si provi che L è continuo.

d) Dimostrare che L è sia iniettivo che suriettivo e fornire una rappresentazione esplicita dell'operatore inverso.

Esercizio 4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione $2\pi-$periodica f definita da

$$f(x) = \cos(4x)\cos x + 3 - \sin(2x) - \sin x \, \sin(4x), \quad x \in [0, 2\pi],$$

rispetto al sistema ortonormale completo

$$\left\{(2\pi)^{-1/2}, \, \pi^{-1/2}\sin(nx), \, \pi^{-1/2}\cos(nx)\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 12 dicembre 2014

Esercizio 1. Studiare l'integrabilità (secondo Lebesgue) della funzione

$$f_\alpha(x) = |\ln x|^\alpha, \ \ x \in (0,1),$$

sull'intervallo $(0,1)$ per tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dare un esempio di misura relativa φ sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi([1,2]) = 3 \ \text{ e } \ \varphi((0,+\infty)) = -2.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}$ munito dell'ordinaria misura di Lebesgue. Ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ genera un operatore $M_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ definito da $M_f(g)(x) := f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Verificare linearità e continuità di M_f.

b) Provare che $\|M_f\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R});L^1(\mathbb{R}))} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$.

c) Se fissiamo invece $f \in L^4(\mathbb{R})$, lo stesso operatore M_f è ancora ben definito da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$?

Esercizio 4. Sia $f(x)$ la funzione $2\pi-$periodica tale che $f(x) = x$ per $-\pi < x \le \pi$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

rispetto al prodotto scalare $(f,g) := \pi^{-1} \int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx, \ \ f,g \in L^2(\mathbb{T})$.

b) Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(\pi)$.

c) Calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 febbraio 2015

Esercizio 1. Per $n \in \mathbb{N}$ si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Trovare un intero $k \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq k$ la funzione f_n sia integrabile in $\mathbb{R}$.

b) Calcolare, motivando opportunamente le risposte, il limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx.$$

Esercizio 2. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione così definita: $f(0) = 0$; per $n = 1, 2, \dots$ la restrizione di f all'intervallo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ha come grafico il segmento di estremi

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{(-1)^n}{n+1}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

a) Tale funzione f è a variazione limitata in $[0, 1]$?

b) Se $\{z_n\}$ è una successione di funzioni continue e a variazione limitata in $[0, 1]$ che converge uniformemente a una funzione z in $[0, 1]$, è possibile concludere che z è a variazione limitata in $[0, 1]$?

Esercizio 3. Si considerino l'intervallo $(0, 1)$ della retta reale (munito dell'ordinaria misura di Lebesgue) e gli spazi $L^p(0, 1)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Dire, motivando per bene le risposte, se esistono (oppure non possono esistere) delle successioni $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ tali che g_n, h_n, u_n, $v_n \in L^\infty(0, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e inoltre, per $n \to \infty$,

a) $g_n \to 0$ in $L^1(0, 1)$ ma $\|g_n\|_{L^\infty(0,1)} \to +\infty$;

b) $h_n \to 0$ in $L^\infty(0, 1)$ ma $\|h_n\|_{L^1(0,1)} \to +\infty$;

c) $u_n \to 0$ in $L^1(0, 1)$ ma $\|u_n\|_{L^2(0,1)} \to +\infty$;

d) $v_n \to 0$ in $L^2(0, 1)$ ma $\|v_n\|_{L^1(0,1)} \to +\infty$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme

$$X = \left\{ f \in L^2(0, +\infty) \ : \ f(x) = 1/x \ \text{ per q.o. } \ x \in (2, +\infty) \right\}.$$

a) Provare che X è un convesso contenuto in $L^2(0, +\infty)$.

b) Dire se X è un sottospazio di $L^2(0, +\infty)$.

c) Dire se X è chiuso in $L^2(0, +\infty)$.

d) Posto $g(x) = e^{-x}$ per $x > 0$, calcolare la proiezione di g su $\overline{X}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 15 giugno 2015

Esercizio 1. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue e tali che $-2 \le f_n(x) \le 1$ q.o. in Ω, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, la successione $\{f_n\}$ converge a una funzione f in misura.

a) Dimostrare che, per ogni $1 \le p < \infty$, si ha $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$.

b) Se Ω è ora la palla aperta di centro l'origine e raggio 1, costruire un esempio di successione $\{f_n\}$ nelle condizioni dell'enunciato e tale che $f_n \not\to f$ in $L^\infty(\Omega)$.

Esercizio 2. Nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A \frac{\sin x}{1+x^2} d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e μ è la misura unidimensionale di Lebesgue.

a) Provare che φ è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

b) Per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) Calcolare $\varphi(B)$, dove $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \ge \pi/2\}$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio di Hilbert ℓ^2 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2$ converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Inoltre, per ogni intero $n \ge 1$ sia T_n l'operatore da ℓ^2 in sè che a $x = (x_k)$ associa $y = T_n x$ con

$$y_k = x_k \text{ per } k < n, \quad y_k = x_{k+1} \text{ per } k \ge n.$$

a) Provare che per n fissato T_n è lineare e continuo.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2;\ell^2)}$.

c) Studiare iniettività e suriettività dell'operatore T_3.

d) La successione di operatori $\{T_n\}$ risulta convergente nello spazio $\mathcal{L}(\ell^2;\ell^2)$?

Esercizio 4. Si consideri la funzione $2\pi-$periodica f definita da

$$f(x) = \cos(2x+1) - \sin(4-3x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a) Sviluppare f in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) discutere la convergenza puntuale, uniforme e in $L^2(\mathbb{T})$ della serie trovata.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino 6 luglio 2015

Esercizio 1. Posto, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{se } \ n < x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Perché le funzioni f_n sono (misurabili e) integrabili in $\mathbb{R}$?

b) Studiare la convergenza q.o. della successione $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

c) È possibile applicare alla successione $\{f_n\}$ i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se si, quali? Se no, perché?

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = L^2(-1,1)$

$$X = \{u \in H : \ u(x) = a + bx^2, \ x \in (-1,1), \text{ per una coppia } (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } \ -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{if } \ x = 0 \\ 1 & \text{if } \ 0 < \chi \leq 1 \end{cases}.$$

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un sottospazio di H.

b) X è chiuso in H?

c) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 3 settembre 2015

Esercizio 1. Nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A \frac{x}{1+x^4}\, d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e μ è la misura unidimensionale di Lebesgue.

a) φ è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$?

b) Per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) Calcolare $\varphi(B)$, dove $B = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \geq 1\}$.

Esercizio 2. Siano X lo spazio $\mathbb{R}^2$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e Y lo spazio $\mathbb{R}^5$ munito della norma $\|\cdot\|_1$. Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : X \to Y \quad \text{tale che} \quad T(1,1) = (1, 0, -2, 0, 1).$$

Una volta scritto l'operatore, controllare esplicitamente che tale operatore è limitato da X in Y.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 4 dicembre 2015

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + (nx)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

per $n \in \mathbb{N}$.

a) Studiare misurabilità e integrabilità in $\mathbb{R}$ di queste funzioni.

b) La successione f_n converge q.o. in $\mathbb{R}$?

c) Esaminare anche la convergenza quasi uniforme, in misura e in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Dare un esempio di misura relativa φ sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi([-1,1]) = -1, \quad \varphi((-\infty, 0]) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi((0, +\infty)) = 1.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

Esercizio 3. Nello spazio c_0 delle successioni $a = (a_1, a_2, \ldots)$ reali e infinitesime poniamo

$$\|a\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|, \quad |||a||| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|a_n|, \quad \text{per } a \in c_0.$$

a) Dimostrare che $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ definiscono effettivamente due norme in c_0.

b) Discutere l'equivalenza delle due norme, soffermandosi sulla validità o meno delle due proprietà

$$\text{esiste una costante } C > 0 \text{ tale che } |||a||| \le C\|a\| \text{ per ogni } a \in c_0; \tag{3}$$

$$\text{esiste una costante } D > 0 \text{ tale che } \|a\| \le D\,|||a||| \text{ per ogni } a \in c_0. \tag{4}$$

Esercizio 4. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = x + y\}.$$

a) Mostrare che X è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. È chiuso?

b) Individuare ed esplicitare il sottospazio $Y = X^\perp$.

c) Calcolare la proiezione del vettore $(1, 1, 1)$ su X.

d) Calcolare la proiezione del vettore $(1, 1, 1)$ su Y.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 18 gennaio 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$. Consideriamo le successioni di funzioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ definite da $u_n(x) = f(x/n)$ e $v_n(x) = f(nx)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

a) Le successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ convergono q.o. in $\mathbb{R}$?

b) Esistono i seguenti limiti $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(x)dx$ e nel caso quanto valgono?

Giustificare per bene le risposte date.

Esercizio 2. Dare un esempio di funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

- che sia a variazione limitata;
- che non sia né continua né monotona in $[-1, 1]$;
- la cui variazione totale nell'intervallo $[-1, 1]$ valga 5.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $E = \{u \in C^0([-1, 1]) : u(0) = 0\}$ munito della norma

$$\|u\|_\infty = \max_{-1\leq t\leq 1} |u(t)|, \qquad u \in E.$$

a) Dire perché lo spazio E è uno spazio di Banach.

b) Verificare che

$$\|u\|_a := \max_{-1\leq t\leq 1} \frac{|u(t)|}{1 + t^2}, \quad \|u\|_b := \max_{-1\leq t\leq 1} t^2|u(t)|, \quad u \in E,$$

definiscono altre due norme in E.

c) Provare che $\|\cdot\|_a$ è equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ e che invece $\|\cdot\|_b$ non è equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = L^2(-1, 1)$ (munito di prodotto scalare e norma usuali)

$$X = \big\{u \in H : \ u(x) = ax + bx^2, \ x \in (-1, 1), \ \text{per una coppia } (a, b) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 < x \leq 0 \\ \frac{11}{12}\, x^{-1/4} & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}.$$

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un sottospazio di H.

b) X è chiuso in H?

c) A partire dalle funzioni $w(x) = x$, $z(x) = x^2$, $x \in (-1, 1)$, costruire un sistema ortonormale che fornisca una base in X.

d) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 16 febbraio 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $\mathbb{R}$ rispetto alla misura unidimensionale μ di Lebesgue. Posto $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \ n-1 \le |f(x)| < n\}$ per $n \in \mathbb{N}$,

a) controllare la misurabilità degli insiemi A_n e provare che $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$;

b) discutere la convergenza o meno delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$;

c) trovare un esempio di funzione f integrabile su $\mathbb{R}$ tale che la relativa successione $\{\mu(A_n)\}$ non sia monotona.

Esercizio 2. Siano $f_n : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f_n(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{y-x}} & \text{se } x \neq y \end{cases}, \quad 0 \le x,\, y \le 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione $\{f_n\}$.

b) Posto $Q = [0,1] \times [0,1]$ e osservato che le funzioni f_n sono integrabili secondo Lebesgue (non si richiede dimostrazione), calcolare i due limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \int_Q f_n(x,y) dxdy, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_Q |f_n(x,y)| dxdy,$$

Esercizio 3. Sia ℓ^1 lo spazio di Banach delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Dare un esempio di due sottospazi X, $Y \subset \ell^1$, diversi da ℓ^1 e dal sottospazio costituito dal solo vettore nullo, tali che X sia un chiuso di ℓ^1 mentre Y sia denso in ℓ^1, controllando esplicitamente chiusura per X e densità per Y.

Esercizio 4. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $2\pi-$periodica definita da $u(x) = x|x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$.

a) Sviluppare u in serie di Fourier della forma $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$;

b) discutere la convergenza in $L^2(\mathbb{T})$ della serie trovata.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 13 giugno 2016

Esercizio 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\,, \qquad x \geq 0,$$

a) dire se la serie converge quasi ovunque in $[0,+\infty)$;

b) studiare la convergenza quasi uniforme e in misura della serie in $[0,+\infty)$;

c) detta $f(x)$ la somma della serie, valutare la misurabilità e l'integrabilità della funzione f in $[0,+\infty)$;

d) è possible scambiare l'operazione di serie con quella di $\int_{[0,+\infty)}$?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di funzioni

$$V = \left\{ u \in C^0([-1,1]) \ : \ \int_{[-1,1]} u(x)\,dx = 0 \right\}$$

e si definisca

$$\|u\| = \int_{[-1,1]} u^+(x)dx, \qquad u \in V, \tag{$\diamond$}$$

dove $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$, $x \in [-1,1]$, denota la parte positiva di u.

a) Dire perché V è uno spazio vettoriale.

b) Verificare che $\|\cdot\|$ è effettivamente una norma in V.

c) Dare un esempio di funzione $u \in V$ tale che $\|u\| = 5$.

d) Discutere l'equivalenza della norma definita in $(\diamond)$ con la norma

$$\|u\|_1 = \int_{[-1,1]} |u(x)|\,dx, \qquad u \in V.$$

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2016

Esercizio 1. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue λ. Consideriamo le funzioni di insieme

$$\mu(A) = \lambda(\{x \in A : \ 0 < x \leq 1\}), \qquad \nu(A) = \lambda(\{x \in A : \ |x| \geq 1\}) \quad \text{per } A \in \mathcal{L}.$$

a) Provare che μ, ν sono misure su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$. Sono σ-finite?

b) Valutare se μ, ν sono assolutamente continue o singolari (oppure né assolutamente continue né singolari) rispetto alla misura λ.

c) λ è assolutamente continua o singolare rispetto a μ?

d) μ è assolutamente continua o singolare rispetto a ν?

Esercizio 2. Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5 \quad \text{tale che} \quad T(3, -2) = (1, 2, -6, 0, -3).$$

Una volta fornito l'esempio e dunque scritto l'operatore T, determinare una costante $C > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{5} |y_i| \leq C \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = T(x_1, x_2).$$

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 27 settembre 2016

Esercizio 1. Posto, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } \; n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Perché le funzioni f_n sono (misurabili e) integrabili in $\mathbb{R}$?

b) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme, in misura della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

c) È possibile applicare alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se si, quali? Se no, perché?

Esercizio 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x + y + z \geq 0\}.$$

a) L'insieme X è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$?

b) Provare che X è chiuso in $\mathbb{R}^3$.

c) Esiste la proiezione del vettore $(-1, 1, -1)$ su X? Nel caso calcolare esplicitamente tale proiezione.

d) Individuare l'insieme ortogonale $X^{\perp}$.