Scritti assegnati dal Prof. Giulio Schimperna
negli anni 2009-2011

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 20 gennaio 2009

Esercizio 1. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = e^{-xyz}$ nella regione

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 2. Si ponga, per $x \geq 0$, $f_n(x) := x^n e^{-nx}$.

(a) Calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

(b) Determinare se la serie di funzioni $\sum f_n$, al variare di $x \in [0, +\infty)$, è convergente e specificare il tipo di convergenza (puntuale, uniforme, ecc.).

(c) Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 13 febbraio 2009

Esercizio 1. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{-2xy}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x^2}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}y$$

lungo la curva γ di equazione

$$\gamma(t) = \rho(t)\big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big), \qquad t \in [0,2],$$

dove

$$\rho(t) = t^2 - 2t + 2, \qquad \theta(t) = 2\pi t.$$

Esercizio 2. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{\log nx}{(x+1)^n}, \qquad x > 0.$$

(a) Determinare il limite puntuale f della successione.

(b) È vero o falso che $f_n \to f$ uniformemente in $(0,\infty)$?

(c) È vero o falso che, per ogni $a > 0$, $f_n \to f$ uniformemente in $[a,\infty)$?

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 16 giugno 2009

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(x, y, z) = (3x^2 + 2y^3 - 6z, 2x^3 + 3y^2 - 6z)$$

e sia $Z(\Phi)$ l'insieme degli zeri di Φ, ovvero

$$Z(\Phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x, y, z) = (0, 0)\}.$$

(a) Determinare se $Z(\Phi)$ contiene punti nei quali il teorema delle funzioni implicite non è applicabile (ovvero punti nel cui intorno $Z(\Phi)$ *potrebbe* non essere grafico di una curva regolare).

(b) Detta γ la curva implicitamente definita da $Z(\Phi)$ nell'intorno del punto $P = (2, 2, 14/3) \in Z(\Phi)$, determinare (a meno del modulo e del segno) il vettore tangente a γ in P.

Esercizio 2. Calcolare il

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n^{-2}} \left(x^{-1/2} - n^2\right) \log(nx) \, \mathrm{d}x$$

giustificando la risposta data.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 16 luglio 2009

Esercizio 1. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x^3}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x + \frac{y(x^2+y^2)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}y$$

lungo il cammino

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 2. *(a)* Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite puntuale per $n \to +\infty$ della successione di funzioni

$$u_{n,\alpha} : (0,1] \to \mathbb{R}, \qquad u_{n,\alpha}(x) = n^\alpha x^n \log(nx)$$

e determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha convergenza uniforme nell'intervallo $(0,1]$.

(b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^\alpha x^n \log(nx)\,\mathrm{d}x,$$

giustificando la risposta data.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 16 settembre 2009

Esercizio 1. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = e^{xyz}$$

sulla superficie sferica

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Esercizio 2. Si considerino le successioni di funzioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{\sin x^n}{x^n}, \qquad g_n(x) := \frac{\sin x^n}{x^{n+1}},$$

ove, in entrambi i casi, $x \in (0, +\infty)$.

(a) Determinare i limiti puntuali f di $\{f_n\}$ e g di $\{g_n\}$.

(b1) È vero che $f_n \to f$ uniformemente in $(0, +\infty)$?

(b2) È vero che $f_n \to f$ uniformemente in $(0, 1/2)$?

(b3) È vero che $f_n \to f$ uniformemente in $(2, +\infty)$?

(c1) È vero che $g_n \to g$ uniformemente in $(0, +\infty)$?

*(c2, *)* È vero che $g_n \to g$ uniformemente in $(0, 1/2)$?

(c3) È vero che $g_n \to g$ uniformemente in $(2, +\infty)$?

(d) Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

(e) Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

N.B.: la domanda contrassegnata con un asterisco è considerevolmente più difficile delle altre.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 18 gennaio 2010

Esercizio 1. Determinare il più grande insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ tale che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x e^{-n(x^2-4)+4}$$

converga uniformemente sui compatti di Ω.

Esercizio 2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$, dove f_n è definita da

$$f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{n^\alpha + x^2}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite puntuale della successione $\{f_n\}$.

(b) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha convergenza uniforme in $(0, +\infty)$[1].

(c) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x,$$

giustificando la risposta data.

Esercizio 3. È possibile trovare una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, integrabile secondo Lebesgue su $(0, +\infty)$ (eventualmente con integrale pari a $+\infty$ oppure a $-\infty$) e tale che

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1\ ?$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 16 febbraio 2010

Esercizio 1. Calcolare, al variare di $x \in (-1, 1)$, il

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (n + m) x^n.$$

Esercizio 2. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ sia data la funzione

$$F_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F_\lambda(x, y) := e^{xy} - \lambda xy - 1$$

e sia

$$Z_\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ F_\lambda(x, y) = 0\}.$$

Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, i punti irregolari di Z_λ, ovvero i punti in cui non è applicabile il Teorema delle funzioni implicite.

Esercizio 3. Si consideri la successione di forme differenziali $\{\omega_n\}$ definita da

$$\omega_n(x, y) := (x^n - y^{n-1})\, \mathrm{d}x + (x^{n-1} + y^n)\, \mathrm{d}y$$

e sia γ una parametrizzazione della circonferenza unitaria percorsa una volta in senso antiorario.

(a) Calcolare il

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\gamma \omega_n.$$

(b) Calcolare il

$$\lim_{n \to +\infty} n^{1/3} \int_\gamma \omega_n.$$

(c) Calcolare il

$$\lim_{n \to +\infty,\, n \text{ pari}} n^{2/3} \int_\gamma \omega_n.$$

Suggerimento: per i punti *(b)* e *(c)* può essere utile la disuguaglianza $1 - x^2/2 \leq \cos x \leq 1 - x^2/4$ valida per $x \in [0, 1]$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 14 luglio 2010

Esercizio 1. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = -x + 2\arctan(x - y)$$

sulla superficie sferica S di equazione

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Esercizio 2. Calcolare il

$$\lim_{n \nearrow +\infty} \int_0^n \big(\log(1 + nx) - \log nx \big) \, \mathrm{d}x,$$

giustificando la risposta data.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 9 settembre 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile secondo Lebesgue. Determinare condizioni su f sufficienti affinché esista il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh\left(nf(x)\right)\, \mathrm{d}x.$$

Inoltre, nel caso le condizioni siano verificate calcolare tale limite in funzione di f giustificando la risposta alla luce della teoria.

Esercizio 2. Si consideri la forma differenziale $\omega : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$ definita da

$$\omega(x,y) := 2xe^{x^2+y}\, \mathrm{d}x + e^{x^2+y}\, \mathrm{d}y.$$

Sia, inoltre, per ogni $R \in (1,+\infty)$, $\gamma_R : [0,R] \to \mathbb{R}^2$ il cammino definito da

$$\gamma_R(t) := \begin{cases} (t,0) & \text{se } t \in [0,1], \\ \left(\frac{\cos(t-1)}{t}, \frac{\sin(t-1)}{t}\right) & \text{se } t \in (1,R]. \end{cases}$$

Calcolare il

$$\lim_{R \nearrow +\infty} \int_{\gamma_R} \omega,$$

giustificando la risposta data.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 18 gennaio 2011

Esercizio 1. Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione qualsiasi.

(a) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x+n)} \sin(x + a_n).$$

Dimostrare che f è di classe C^∞ su $(0, +\infty)$.

(b) Sia ora $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x+n)} \sin(a_n x).$$

È sempre vero che g è di classe C^∞ su $(0, +\infty)$?

Esercizio 2. Si consideri la famiglia di forme differenziali

$$\omega(x, y, z) = 2xyz \, \mathrm{d}x + B(x, y, z) \, \mathrm{d}y + C(x, y, z) \, \mathrm{d}z.$$

(a) Determinare condizioni necessarie e sufficienti sulle funzioni B e C affinché ω sia esatta su tutto $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare B e C in modo tale che ω sia chiusa, ma non esatta, su $\mathbb{R}^3 \setminus \{y = z = 0\}$.

Esercizio 3. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e non negativa e si ponga

$$L := \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^n f(n^2 x) \, \mathrm{d}x.$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta data:

(a) Se f è sommabile su $(0, +\infty)$ allora L è finito.

(b) Se L è finito allora f è sommabile su $(0, +\infty)$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta dell'11 febbraio 2011

Esercizio 1. (*a*) Sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (non necessariamente sommabile) secondo Lebesgue. Determinare il

$$\lim_{n \nearrow +\infty} \int_0^1 \sin^{2n}(f(x))\, \mathrm{d}x.$$

(*b*) Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esistano costanti strettamente positive a e b tali che $a \leq f'(x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{n \nearrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin^{2n}(f(x))\, \mathrm{d}x = +\infty \tag{1}$$

(*c*) Sia ora $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esista una costante strettamente positiva b tale che $0 \leq f'(x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È ancora valida la proprietà (1)?

(*d*) Sia ora $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È ancora valida la proprietà (1)?

Esercizio 2. Si consideri la famiglia di curve $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_n(t) = \left(te^{-nt}\cos t, te^{-nt}\sin t\right)$$

e sia $\ell(\gamma_n)$ la lunghezza di γ_n. Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \ell(\gamma_n),$$

giustificando la risposta data.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 15 giugno 2011

Esercizio 1. Sia $\{f_n\}$, $f_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, una successione di funzioni integrabili (non necessariamente sommabili) e non negative.

(a) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \to +\infty$ puntualmente e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 \quad ?$$

(b) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \to +\infty$ puntualmente e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} f_n(x)\,dx = 1 \quad ?$$

(c) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \to 0$ puntualmente e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = +\infty \quad ?$$

(d) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \to 0$ puntualmente, $f_n(x)$ sia non crescente rispetto a n per ogni x in $(0,+\infty)$, e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} f_n(x)\,dx = +\infty \quad ?$$

Esercizio 2. Calcolare l'area della superficie S grafico della funzione di due variabili

$$f : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2,$$

dove $\overline{B}(0,1)$ è la bolla unitaria chiusa, ovvero $\overline{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 13 luglio 2011

Esercizio 1. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}$, $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = nx \sin\left(\frac{1}{nx}\right).$$

(a) Calcolare il limite puntuale della successione $\{f_n\}$. Stabilire quindi se la convergenza è uniforme sui compatti di $(0, +\infty)$ e se è uniforme su tutto $(0, +\infty)$.
(b) Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (1 - f_n(x))\, \mathrm{d}x,$$

giustificando la risposta data.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_{-1}^{1} (1 + 2t^2)e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Suggerimento: può essere utile considerare la funzione di due variabili $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 13 settembre 2011

Esercizio 1. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione non crescente e non negativa. Discutere l'esistenza del limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(x^n) \, \mathrm{d}x$$

distinguendo i vari casi possibili e giustificando le risposte date.

Esercizio 2. Siano date le superficie

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^3 + y^3 + z = 0\}, \qquad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = x + 1\}.$$

Posto $S := S_1 \cap S_2$, determinare il punto (o i punti) di S aventi minima distanza dall'origine $(0, 0, 0)$.