Somme hilbertiane

$\{E_n\}$ successione di sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert H.

Diciamo che $H = \bigoplus_n E_n$ somma hilbertiana degli E_n

se

(i) Gli E_n sono a due a due ortogonali,

$$(u,v)=0 \quad \forall\, u \in E_n,\ \forall\, v \in E_m,\quad n \neq m;$$

(ii) $\operatorname{span}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ $\boxed{= \text{combinazioni lineari finite}}$

è denso in H.

__Teorema__. Se $H = \bigoplus_n E_n$ e $u \in H$, posto

$$u_n = P_{E_n} u, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

abbiamo

$$s_n \longrightarrow u \text{ in } H, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2 \quad \text{(Bessel-Parseval)}.$$

__Dim__. Abbiamo $(u,v) = (u_n, v)$ $\forall\, v \in E_n$ dunque $(u,u_n) = \|u_n\|^2$ e $(u, s_n) = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2$. Ma, tenendo presente l'ortogonalità degli E_n, ho $\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2$. Dunque $(u,s_n) = \|s_n\|^2$ e

$$\|s_n\|^2 \leq \|u\|\,\|s_n\| \Rightarrow \|s_n\| \leq \|u\|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Notiamo che $\{s_n\}$ è di Cauchy in H in quanto

$$n>m \quad \|s_n - s_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} u_k\Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|u_k\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

e pertanto s_n converge a un certo elemento s, con

$$\|s\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2.$$

Sia ora $F = \operatorname{span}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ e vogliamo controllare che $s = P_F u$: infatti, se $v \in E_m$ con $m \leq n$,

$$(u - s_n, v) = (\underbrace{u - u_m}_{u - P_{E_m}u} \underbrace{- \sum_{k\neq m} u_k}_{\in E_m^{\perp}}, v) = 0$$

e, passando al limite per $n\to\infty$,

$$(u - s, v) = 0 \quad \forall v \in F \text{ e, per densità, } \forall v \in \overline{F}$$

Anche $s \in \overline{F}$ e dunque $s = P_{\overline{F}} u$. Se ora $\overline{F} = H$, si trova $s = u$ e dunque anche Bessel - Parseval. $\square$

<u>Sistema ortonormale</u> $\{e_n\}$ in H se $(e_n, e_m) = 1$ se $n = m$, $= 0$ se $n \neq m$; è detta <u>base hilbertiana</u> se $\operatorname{span}(\{e_n\})$ è denso in H.

<u>Oss.</u> Se $E_n = \{\lambda e_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$, ogni u di H si scrive

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k) e_k \quad \text{e} \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, e_k)|^2.$$

Isomorfismo $\Psi : H \to \ell^2$, $(\Psi(u))_k = (u, e_k) \ \forall k$

<u>Teorema</u>. Ogni spazio di Hilbert separabile ammette una base hilbertiana.

<u>Dim.</u> Sia $\{v_n\}$ un sottoinsieme denso in H. Indico con F_n il sottospazio generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$: allora $\mathrm{span}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$ è denso in H. Costruisco una base hilbertiana: se $v_1 \neq 0$ prendo $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$; se poi v_2 non è multiplo scalare di v_1, prendo $e_2 \in F_2$ con $e_2 \in F_1^{\perp}$ e di norma unitaria, ecc. costruisco una base hilbertiana.