Il concetto di funzione e il suo sviluppo a lungo termine nel curricolo scolastico. Aspetti nodali dal punto di vista della gestione didattica

Rosa Iaderosa

Pavia, 23 marzo 2017

INSEGNANTE – SCUOLA - RICERCA

- La **matematica** – la riflessione sui suoi concetti
- la **didattica della matematica**
- la **ricerca** in didattica della matematica

La ***progettazione didattica***:

- La ***trasposizione didattica***
- L'individuazione dei ***nodi concettuali***
- La ***costruzione dei concetti a lungo termine***
- Le ***metodologie***
- Le ***tecnologie***

Articolazione del seminario

1. Complessità del concetto di funzione e richiami storici
2. Il problema della trasposizione didattica
3. Le problematiche didattiche più rilevanti
4. Il concetto di grafico di una funzione
5. Le funzioni e la ricerca didattica
6. Spunti operativi

La funzione come "oggetto" della matematica

Il moderno concetto di funzione è il frutto di un processo lungo e articolato che storicamente ha avuto origine soprattutto inizialmente dallo **studio di curve** che rappresentavano fenomeni. Successivamente si è fatta strada l'idea di **relazione tra variabili**, concezione questa che ha condotto poi alla scrittura algebrica e alla visione ultima di un **particolare insieme di coppie ordinate**.

La funzione nella matematica attuale

Lo stratificarsi di queste concezioni molto diverse ha fatto sì che **in un unico concetto** confluissero **più visioni** della funzione, e soprattutto **più rappresentazioni** di essa.

Si pone quindi il **problema di conciliare questi vari aspetti del concetto di funzione**, soprattutto nell'insegnamento, che a volte trae vantaggio da un approccio storico ai concetti.

QUALI LE PROBLEMATICITA' DAL PUNTO DI VISTA DIDATTICO?

L'individuazione dei "nodi" didattici e delle problematicità nella costruzione di questo concetto così complesso, nell'ottica di un curricolo continuo, può essere guidata proprio dall'analisi di come esso si è evoluto storicamente

RICHIAMI STORICI SULLA NASCITA ED EVOLUZIONE DEL CONCETTO

Richiami storici

"La costituzione del concetto di funzione nella sua moderna accezione investe molti secoli. Le prime definizioni di funzione appaiono tra la fine del XVII e l'inizio del XVIII secolo e sono *originate dalle esplorazioni di curve.* Queste curve inizialmente vengono descritte da proporzioni tra segmenti ausiliari nell'ambito di specifici problemi (come documentato in Fermat, Descartes, Barrow, Newton, Lebnitz) ma non sono riguardate come grafici rappresentanti relazioni tra questi segmenti, al *contrario sono considerate per quello che appaiono: oggetti geometrici o traiettorie di punti in movimento.* Nel corso della soluzione dei problemi, le proporzioni usate vengono a perdere il loro significato e diventano pure espressioni algebriche su cui sono eseguite operazioni formali. Questo progressivo abbandono dei significati viene a determinare la visione di *funzione come espressione analitica. …"*

N.Malara, 2009

DEFINIZIONE CHE METTE IN RISALTO L'ARBITRARIETÀ DELLA COMPOSIZIONE DELLE OPERAZIONI TRA VARIABILI E COSTANTI.

Una prima definizione degna di nota è quella data da J. Bernoulli (1718):

Una funzione di una quantità variabile
è una quantità composta in un modo qualsiasi con questa variabile e con quantità costanti

PRIMI ELEMENTI ESSENZIALI: VARIABILI E COSTANTI

Una funzione di una quantità variabile è una espressione analitica *composta in modo qualsiasi da questa quantità e da numeri o costanti*

(Eulero, 1748)

Non più solo la visione procedurale e operativa

Il XVIII secolo e la prima metà del XIX secolo vedono svariati studi e dibattiti che portano a superare la concezione operativa e procedurale di funzione.

Si fa strada l'abbandono dell'idea che debba essere necessariamente una espressione analitica o più in generale una formula ad esprimere il legame tra le due variabili in gioco

La funzione vista come relazione tra variabili

"Se una variabile y è collegata ad una variabile x in modo che qualsiasi sia il valore numerico assegnato a x c'è una legge secondo cui risulta determinato un unico valore di y, allora si dice che y è funzione della variabile indipendente x."

(Dirichlet, 1837)

SI DEVE A DEDEKIND (1887), LA CONCEZIONE DI *FUNZIONE COME TRASFORMAZIONE AGENTE SU UN INSIEME ASTRATTO* NONCHÉ L'INTRODUZIONE DI SIMBOLOGIA E NOMENCLATURA UTILIZZATA TUTT'OGGI

Per trasformazione φ di un sistema S intendiamo una legge attraverso cui per ciascun definito elemento s di un sistema si determina un cosa completamente definita detta immagine *di s e denotata dal simbolo φ(s); la stessa situazione può essere espressa in vari modi: φ(s) corrisponde all'elemento s, o φ(s) si ottiene da s per mezzo della trasformazione φ, oppure s va in φ(s) per mezzo della trasformazione φ.*

QUALE PUO' ESSERE QUINDI LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA IN QUESTA COMPLESSITA' E MOLTEPLICITA' DI ACCEZIONI?

DALLE INDICAZIONI NAZIONALI PER IL PRIMO CICLO DI ISTRUZIONE UN' IMPORTANTE DECLINAZIONE NELLA COSTRUZIONE DEL CONCETTO

"Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di **matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione**. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni, …) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema."

Dalle Indicazioni Nazionali

…"Continuità ed unitarietà del curricolo

L'itinerario scolastico dai tre ai quattordici anni, pur abbracciando tre tipologie di scuola caratterizzate ciascuna da una specifica identità educativa e professionale, è progressivo e continuo. La presenza, sempre più diffusa, degli istituti comprensivi consente la progettazione di un unico curricolo verticale e facilita il raccordo con il secondo ciclo del sistema di istruzione e formazione…"

Continuità nella costruzione del concetto a lungo termine

ANCORA DALLE INDICAZIONI

"Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, **interpretare** e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani."

Oggettivazione della funzione generalizzazione

La presenza dei due aspetti: procedurale e **"strutturale"**

I TRAGUARDI ALLA FINE DEL PRIMO CICLO DI ISTRUZIONE (RELAZIONI, DATI, PREVISIONI)

- Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.
- Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale

Aspetto previsionale sia nella statistica che nella matematica
Livello delle previsioni anche avanzato

Le relazioni sono accomunate alle previsioni…

Obiettivi di apprendimento sul nucleo "Relazioni e funzioni"

- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.
- Esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa.

  $y = ax$ (il significato e il ruolo di ***a***)…..
- Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni empiriche o ricavate da tabelle, e per conoscere in particolare le funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$, $y=ax^2$, $y=2^n$ e i loro grafici e collegare le prime due al concetto di proporzionalità.
- Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.

legame con le equazioni…

Il rischio della **frammentarietà**

La didattica delle funzioni

Il concetto di funzione va costruito a lungo termine, attraverso tutto il percorso scolastico, a vari livelli, affinché tutte queste esperienze, per quanto ricche, non restino slegate e frammentarie.

Per questo motivo esso rappresenta un interessantissimo oggetto di studio, dal punto di vista didattico, sia per le difficoltà che pone il concetto stesso, sia per la **necessità di scandire sapientemente i vari livelli di competenza a cui tattarlo nei diversi segmenti scolari.**

Aspetti nodali da analizzare dal punto di vista di un apprendimento significativo

- il **riconoscimento di variabili e costanti** (e conseguentemente il ruolo della lettera nella formalizzazione algebrica)
- il **coordinamento** tra **vari registri di rappresentazione**
- il **significato del grafico** cartesiano
- **l'aspetto funzionale** delle equazioni
- il **ruolo** fondamentale che le funzioni hanno **nella modellizzazione**.

Approcci concreti

Per la costruzione del concetto, molto complesso, di funzione, vengono messi in atto didatticamente esempi tratti da vari **contesti**, in cui costruire i vari significati.

Dovrebbe poi essere proprio la ricchezza di queste esperienze a favorirne lo sviluppo corretto.

Le esperienze più diffuse

I contesti più frequenti sono quelli dei fenomeni fisici, e la variabile in ascissa più frequente è il tempo…

Altre esperienze frequenti dalle quali si recuperano i contesti sono quelle di tipo economico…

RIFLESSIONE SUL SIGNIFICATO DI GRAFICO

Il fatto che i traguardi di apprendimento unifichino vari tipi di grafici è rischioso, sul piano dei concetti:

La parola **grafico** è molto frequente nel linguaggio comune e nelle esperienze degli studenti, a tutti i livelli scolari, ed è da riguardarsi con un' accezione ben più ampia

dell' oggetto determinato e rigorosamente formalizzato che la Matematica ci presenta. Questa stessa parola viene ad assumere **significati diversi** in funzione delle varie **situazioni da rappresentare**.

I GRAFICI

A scuola, le esperienze culturali e comunicative dei ragazzi hanno inizio generalmente con le **rappresentazioni grafiche**, i cui oggetti sono comunemente detti grafici.

Giornali, libri, messaggi televisivi comunicano molte informazioni attraverso rappresentazioni grafiche. E' opportuno quindi, nell'insegnamento, chiarire le varie accezioni del termine "grafico", e presentare, tenendo conto del percorso evolutivo dello studente e graduando le difficoltà, varie attività, esperienze, formalizzazioni che conducano ad una visione corretta dei grafici, soprattutto in ambito scientifico.

E' NECESSARIO TORNARE PIÙ VOLTE SUGLI ASPETTI COGNITIVI E COSTRUTTIVI DI UN GRAFICO PER CLASSIFICARLO E COMPRENDERLO

Naturalmente, le esperienze più precoci e più semplici affrontano il problema di "leggere" una rappresentazione grafica, nelle sue varietà.

Ideogrammi, grafici in geografia, grafici statistici, grafici di orientamento, grafici di andamento…

C'è un primo livello rappresentativo, ideografico, che può consentire la comunicazione di dati numerici anche in mancanza di strumenti culturali specifici. Si tratta, in questo caso, di grafici rappresentativi di dati, qualitativi o quantitativi, provenienti dalla realtà nelle sue situazioni più svariate, nella forma di diagrammi a barre, a torta, istogrammi, ecc. Questi grafici colpiscono l'attenzione dei potenziali lettori proprio per la loro immediatezza e semplicità.

Non sempre però, in questo primo approccio cognitivo, per la loro comprensione è richiesta un' adeguata consapevolezza dei significati e delle loro modalità di costruzione

GRAFICI DI FUNZIONI

Al metodo delle coordinate è legato fortemente un altro aspetto del grafico, quello più importante: *la rappresentazione della variazione congiunta di due diverse grandezze*. **In questo caso, anche se si posseggono solo coppie di dati isolati delle due grandezze, la rappresentazione grafica consente di esprimere la loro co-variazione**

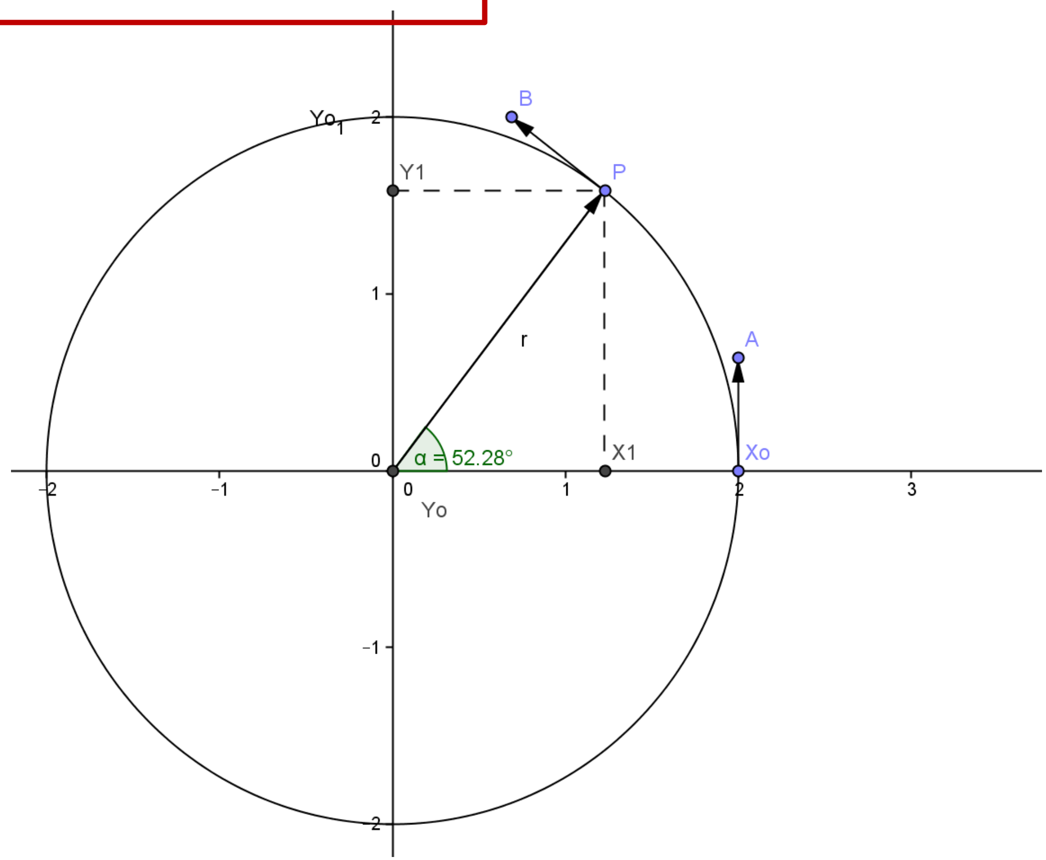
(il loro variare assieme) e di evidenziare il tipo di legame tra la variabilità dell'una e quella dell'altra. Molto spesso i fenomeni naturali, o quelli dell'economia, vengono rappresentati in questa forma, anche a livelli molto semplici. In questi casi, c'è da porre attenzione però agli insiemi in cui varia ciascuno dei valori, in ascissa e in ordinata: a volte si tratta di quantità discrete, a volte di misure di grandezze continue.

A volte però.....

La concezione meccanica, in contesti concreti, può essere predominante e favorire una visione della funzione (del suo grafico) come curva di spostamento, di traiettoria, impedendo la visione più astratta del legame tra variabili di qualunque altro genere......

Una situazione
che può
confondere

Curva traiettoria del
moto circolare uniforme



Rosa Iaderosa - Pavia, 23/3/2017

UN ESEMPIO SIGNIFICATIVO… (PER LA RAPPRESENTAZIONE E QUINDI LA CONCETTUALIZZAZIONE)

Qui non c'è moto, né traiettoria…

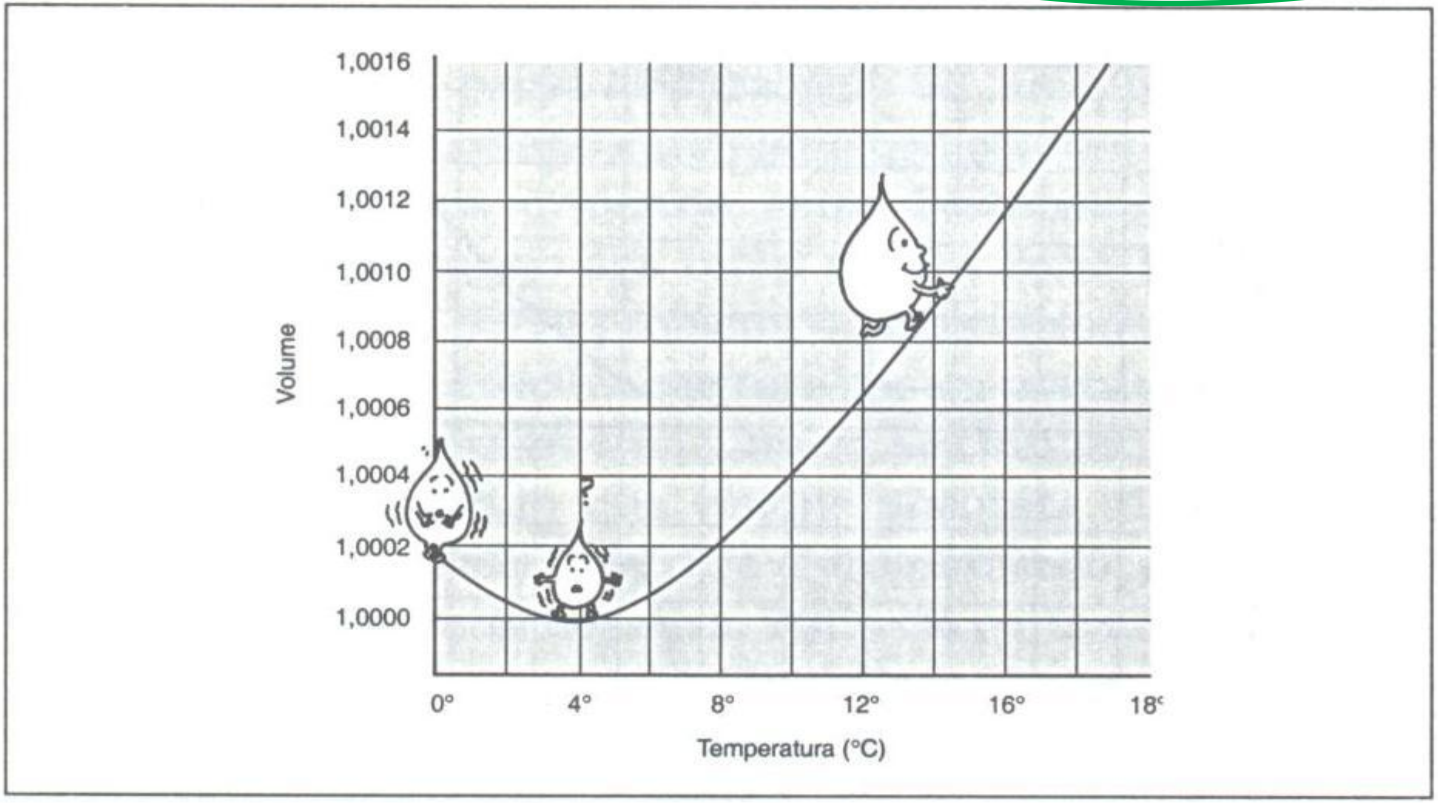
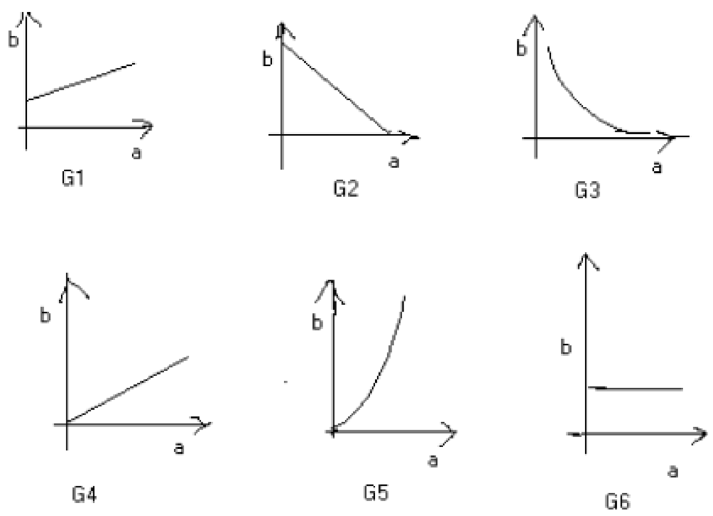


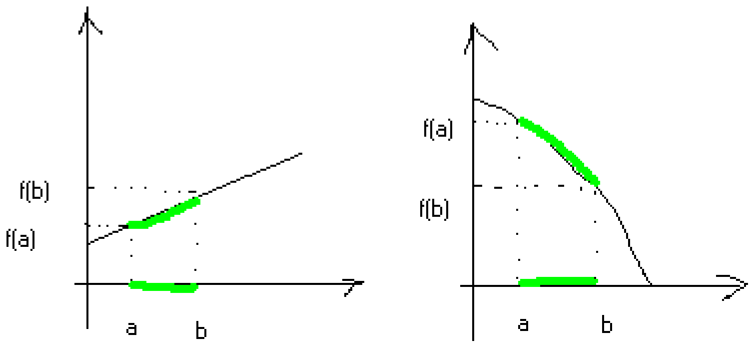
Fig.2.2. Variazione del volume dell'acqua al crescere della temperatura.

Grafici di andamento:
importanti per cominciare ad esplicitare il significato del grafico di una funzione



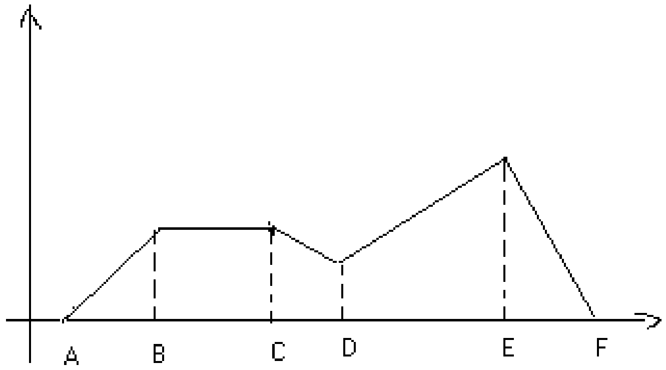
- Descrivi verbalmente in ciascuno dei 6 grafici precedenti come varia b al variare di a
- Qual è la differenza secondo te tra il grafico G1 e il grafico G4?
- Prova ad immaginare per il grafico G6 quali potrebbero essere due grandezze possibili per a e per b.

Per imparare a coordinare la scrittura algebrica e il grafico:
1)Stabilire intuitivamente se il grafico è crescente o decrescente e poi esplicitare il significato
2) Collegare il tipo di grafico alla sua scrittura algebrica



PROVOCARE CONFLITTI…

Il grafico rappresenta la variazione della velocità di un ciclista, durante un percorso le cui tappe sono riportate sull'asse orizzontale. Descrivi il percorso, precisando le variazioni di velocità e prova ad immaginare le caratteristiche del percorso che hanno determinato queste variazioni. Come pensi potrebbe essere il tratto da A a B, in salita o in discesa?…



Esistono anche ostacoli epistemologici: alcuni rilevanti, come questo…

in un approccio "concreto" alla funzione attraverso il concetto di *curva*:

da ***oggetto geometrico***, o ***traiettoria di punti in movimento*** (concezione meccanica) non è automatico il passaggio a ***grafico di una relazione tra variabili***

ANCHE LA FISICA…E' UN'ARMA A DOPPIO TAGLIO!

A volte ***le variabili*** diventano ***le immagini stereotipate tra grandezze:***

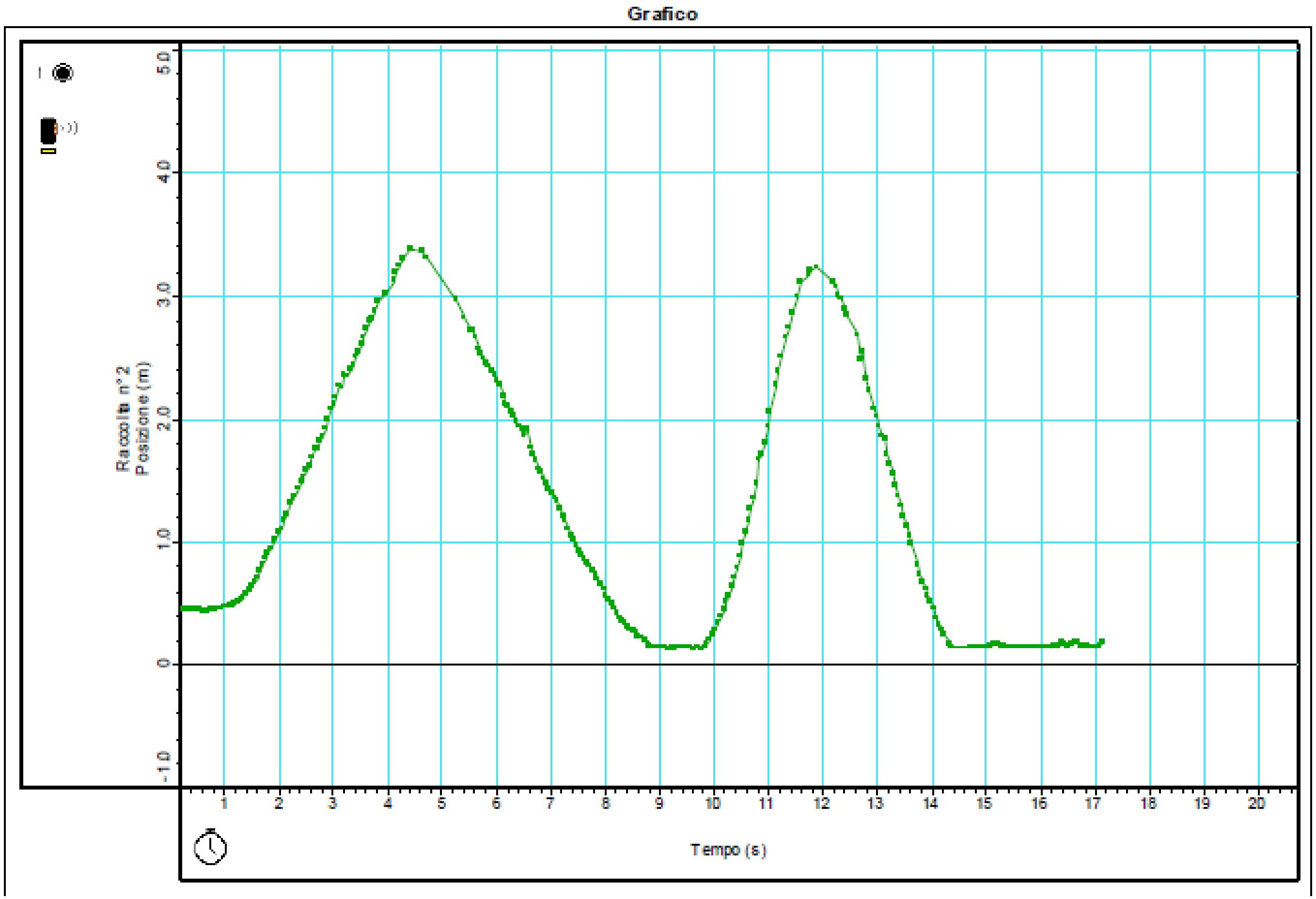
si crea una sorta di fissità sulla visione di alcune variabili come indipendenti, altre dipendenti…

Anche in questo caso, l'utilizzo di **sensori online** può aiutare a visualizzare contemporaneamente, in tempo reale rispetto alla percezione visiva di un fenomeno, più grafici di più funzioni legate al fenomeno, scegliendo ogni volta coppie opportune di variabili

L'utilizzo dei sensori di moto può consentire un intervento didattico forte sui conflitti da superare in merito alla concettualizzazione del grafico di una funzione

I sensori di moto: la passeggiata:

Ascisse: tempo - ordinate: distanze dal sensore

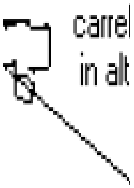


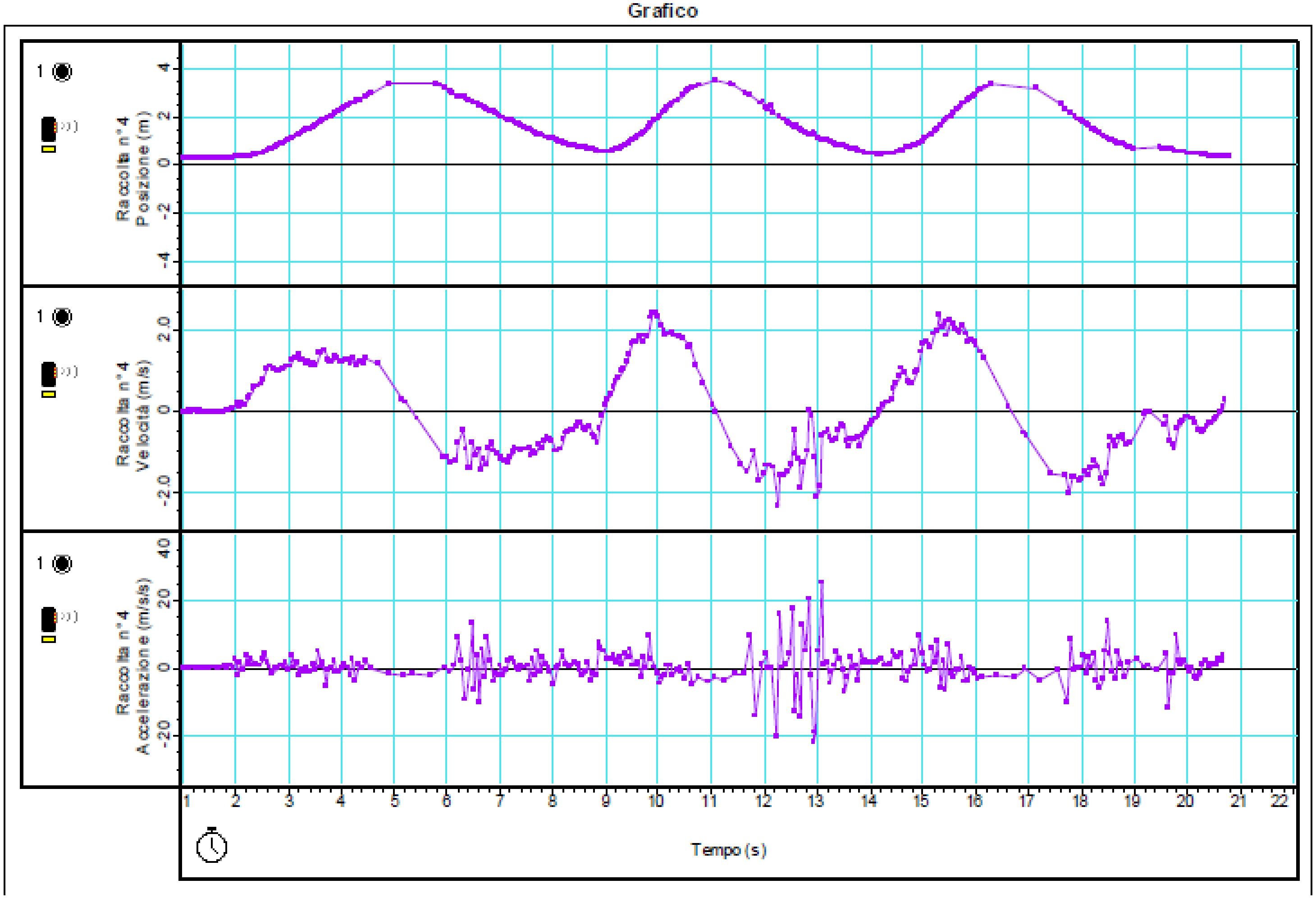
Grafici e sensori

I sensori effettuano una raccolta di dati che trasmettono ad una interfaccia capace di rielaborarli in tempo reale e restituirne la traduzione attraverso tabelle e grafici.

Il fenomeno e' quindi analizzato attraverso il grafico, ed e' il grafico stesso, come rappresentazione matematica del fenomeno, che offre maggiori possibilita' di comprensione per esso, ma nello stesso tempo promuove una piu' significativa interiorizzazione degli aspetti matematici in gioco. Il passaggio dal globale al locale consente quindi un progressivo raffinamento dell'analisi del fenomeno e della riflessione sul grafico.

Grafici di moto





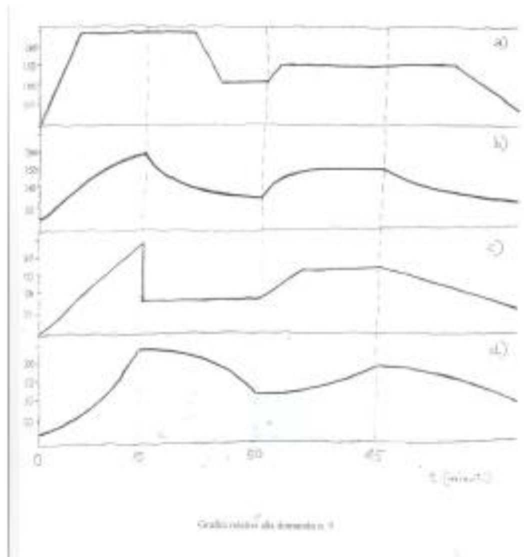
Sintesi su alcune misconcezioni

- Identificazione tra funzione e "curva"
- Identificazione dell'oggetto matematico con le sue molteplici rappresentazioni (la funzione non è il suo grafico…)
- Incapacità di coordinare lo stesso oggetto in più registri rappresentativi
- Identificazione tra formule e funzioni

…………………………………………………………

EPPURE I CONTESTI…

Nonostante le numerose misconcezioni offerte da una contestualizzazione delle funzioni in vari ambiti, soprattutto fenomenologici, ***contestualizzare la relazione funzionale, interpretarla come modello prima concreto e poi astratto in una teoria è un'operazione necessaria*** perché l'apprendimento corretto del concetto di funzione passa attraverso la comprensione e la ***capacità di riconoscerla nelle esperienze dirette e nella molteplicità delle sue rappresentazioni.***



Storia di un grafico

UN ESEMPIO DI RITORNO ALLA CONTESTUALIZZAZIONE---

LE SCIENZE SPERIMENTALI “PER LA MATEMATICA”:

Un esempio di come ampliare l’esperienza concreta del fenomeno ai fini di una corretta concettualizzazione del grafico

Scheda:

Facciamo scaldare su un fornellino elettrico varie quantità di acqua, alla temperatura iniziale di 10°. Rileviamo la temperatura ogni minuto, prima lasciando invariata la quantità, poi variandola, e raccogliamo i dati in una tabella come la seguente:

quantità (cc)	Tempo (minuti)	Temperatura (° centigradi)
………….	…………..	…………..
…………..	…………..	……………
………….	……………	……………

Assumendo come variabili tempo e temperatura (e tenendo fissa la quantità), oppure abbinando quantità e temperatura, agli stessi intervalli di tempo, oppure ancora rappresentando in ascissa i tempi e in ordinata le quantità, oppure in ascissa le temperatura e in ordinata le quantità, si potranno osservare *grafici di funzioni empiriche di forma diversa, relativi allo stesso fenomeno analizzato:* ciò potrà contribuire a rafforzare l'idea che *si possono avere grafici e quindi* ***funzioni diverse per lo stesso fenomeno***, a seconda delle coppie di *variabili che si considerano e del tipo di relazione* che si studia.

Il **problema del coordinamento di più rappresentazioni**:
a parole, a frecce, in tabella, in formula, con il grafico

ANCORA SUL GRAFICO CARTESIANO DI UNA FUNZIONE

Inizialmente il grafico facilita la visione della funzione nel suo complesso, tuttavia ci sono molte difficoltà legate al coordinamento tra questa e le altre rappresentazioni

Il coordinamento

Un apprendimento significativo si ottiene solo **imparando a coordinare i vari registri rappresentativi**

Attraverso le varie teorie, sempre più complesse, si impara a codificare, decodificare, interpretare, reinterpretare…

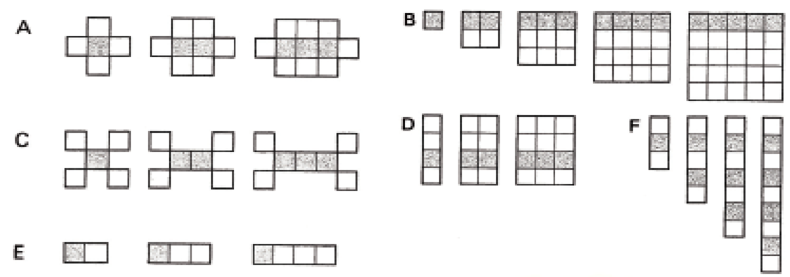
UN ESEMPIO DI ATTIVITA' DIDATTICHE MIRATE A COSTRUIRE SIN DALL'INIZIO QUESTE CAPACITA'

La seguente scheda illustra semplici situazioni di variabilità in cui sono richiesti:

- il riconoscimento di regolarità
- la codifica verbale di queste
- la codifica numerico-algebrica
- la codifica grafica cartesiana

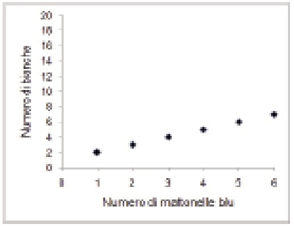
(Malara,NA, 2012, Il caso dell'algebra. Mutamenti di prospettiva, convergenze e consolidamenti, *Insegnare matematica oggi, dossier 3, pp.52-59)*

CONFIGURAZIONI DI MATTONELLE

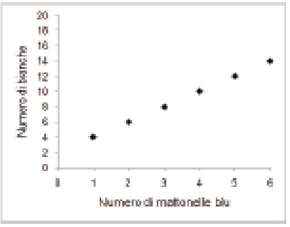


GRAFICI

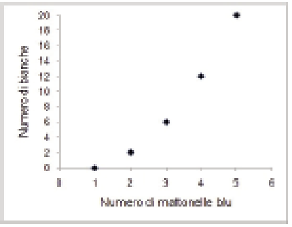
a)



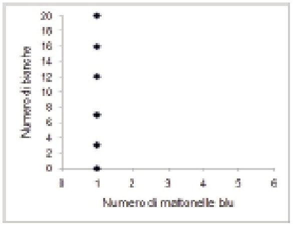
b)



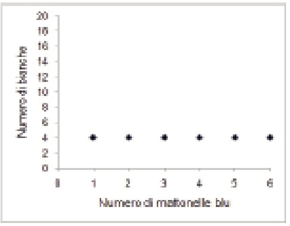
c)



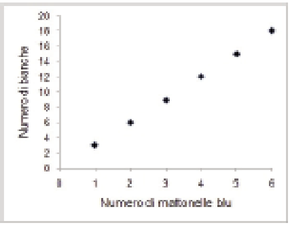
d)



e)



f)



LEGGI A PAROLE

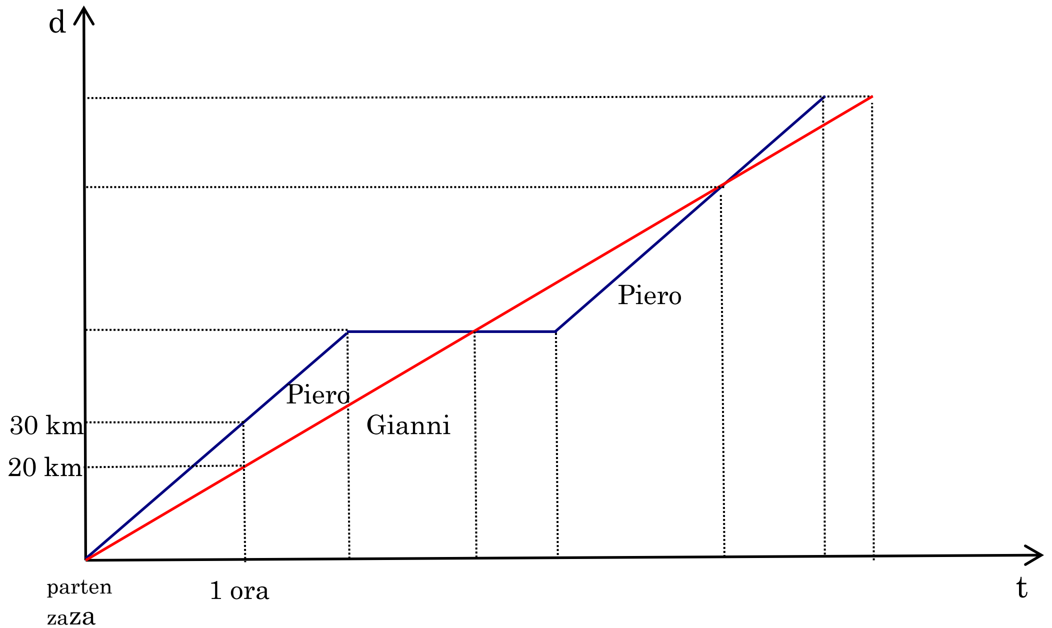
1) Numero di mattonelle bianche = numero di mattonelle blu + 1
2) Numero di mattonelle bianche = numero di mattonelle blu x 3
3) Numero di mattonelle bianche = 4 (non importa quante sono quelle blu)
4) Numero di mattonelle blu = 1 (non importa quante sono quelle bianche)
5) Numero di mattonelle bianche = (numero di mattonelle blu x 2) + 1
6) Numero di mattonelle bianche = numero di mattonelle blu x (numero di mattonelle blu - 1)

LEGGI IN LETTERE

a) $m = (n \times 2) + 2$ b) $m = 4$ c) $m = n \times (n - 1)$ d) $m = n \times 3$ e) $n = 1$ f) $m = n + 1$

Un esempio di coordinamento tra registro verbale e grafico

L'ESCURSIONE CICLISTICA (cat. 7, 8, 9, 10 - Un problema del Rally Matematico Transalpino)
Due amici, Gianni e Piero, partono insieme una domenica alle 8 per un'escursione di 100 km. Gianni viaggia a 20 km/h e Piero a 30 km/h. Piero fora al 50-esimo km e deve trovare una gomma da sostituire. In tutto la riparazione dura 1h 20 min.
Lo schema descrive sommariamente le distanze percorse da uno e l'altro in funzione del tempo.
Completate questo schema con le distanze e le ore mancanti.
A che ora Gianni supererà Piero che è in vantaggio?
A che ora ciascuno arriverà alla fine dei 100 km?
Piero avrà raggiunto Gianni? Se sì a che ora?



ANCORA SUL GRAFICO

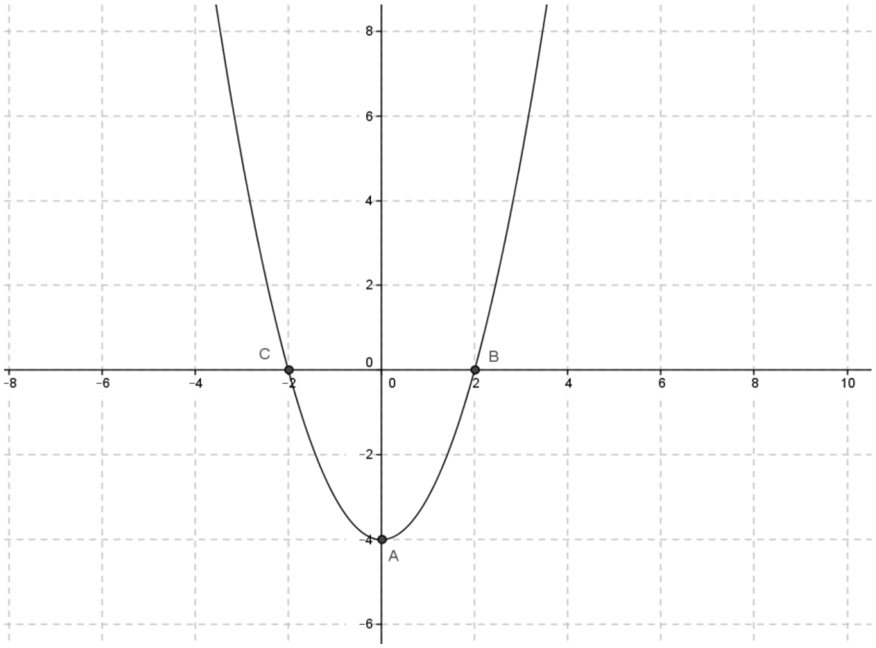
Altre difficoltà nell' evoluzione del concetto di grafico cartesiano di una funzione:

- La rappresentazione nel piano cartesiano ***ampliata dal primo quadrante all'intero piano***
- La difficoltà ***di coordinare rappresentazioni algebriche e grafiche nella doppia direzione,*** cogliendo attraverso il grafico la ***variabilità congiunta*** dell'ascissa e dell'ordinata

IL **PUNTO NODALE** SUL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

La maggiore difficoltà, che continua a manifestarsi soprattutto nella scuola superiore, dove diventa più evidente, è appunto la necessità di **interiorizzare che ogni punto del grafico ha come ordinata il valore della funzione stessa, e che ogni punto del grafico è una sintesi delle due variabilità di cui la funzione esprime il legame**.

(questa difficoltà emerge anche a livello colto, ad esempio, nell'approccio al concetto di ***limite***…)



Esiste già la difficoltà a vedere il punto come coppia

I punti B e C : “2 e -2”
Il punto A: “-4”
(prevale la coordinata diversa da 0 e il punto non è visto come coppia)
Gli “zeri” della funzione? “A”…..

Il concetto di funzione e la ricerca didattica

La funzione essenzialmente come:

- **procedura**
- **relazione tra variabili**

Si richiede, concettualmente, e didatticamente, il passaggio da una concezione *operazionale* ad una *strutturale*.

<u>*La ricerca didattica, con i suoi studi, può aiutare l'insegnante nel guidare questo delicato passaggio*</u>

Le tre fasi (Sfard)

- *interiorizzazione* (il soggetto apprende il significato della variabile e sa applicare le formule per calcolare valori numerici)
- *condensazione* (il processo viene visto in maniera globale)
- *reificazione* (la funzione diventa un oggetto matematico da definire, da trasformare,da rappresentare con varie modalità)

Fasi finalizzate alla concettualizzazione della funzione

E’ possibile scandire scolasticamente e integrare gradualmente le tre fasi di Sfard ?

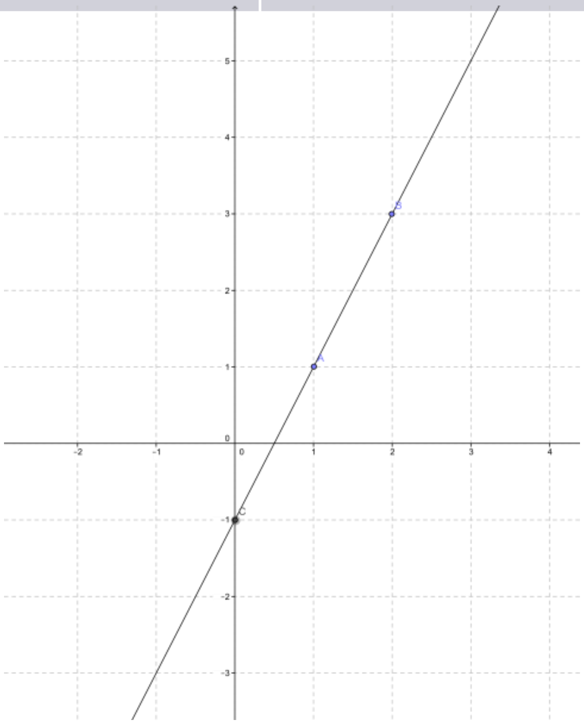
A mio giudizio è questa una vera “sfida didattica” rivolta agli insegnanti.

L’insegnante dovrà curare sistematicamente,

sin dalle prime esperienze, l’attenzione alla ***metacognizione , e curare l’aspetto interpretativo***

La rappresentazione di un funzione lineare

x	y
1	1
0	-1
2	3



$y=2x-1$

È opportuno rappresentarla così anche in terza liceo?

Quali i principali punti di attenzione in una DIDATTICA DI BASE

DUE I PUNTI NODALI

• la comprensione del ruolo del simbolo letterale come variabile (*abituare a cambiare i nomi delle variabili*)
• il grafico come rappresentazione sintetica di una relazione tra due grandezze variabili (*esperienze dal basso*)

Il termine ***variabile*** ha un duplice significato:
•la grandezza variabile,
•i dati numerici correlati alla variabile che si osserva

Nella scuola media

E' essenziale che l'allievo acquisisca, per arrivare a *vedere il grafico come insieme di coppie di una relazione di tipo funzionale*, competenze quali:

- riconoscere variabili e costanti;
- individuare relazioni binarie tra insiemi e relazioni di tipo funzionale, e rappresentarle in varie forme (tabulare, sagittale,..)
- rappresentare mediante coppie ordinate gli elementi di una relazione;
- identificare un punto del piano cartesiano come coppia ordinata di numeri reali (in virtu' della corrispondenza biunivoca che e' possibile definire tra tali insiemi)

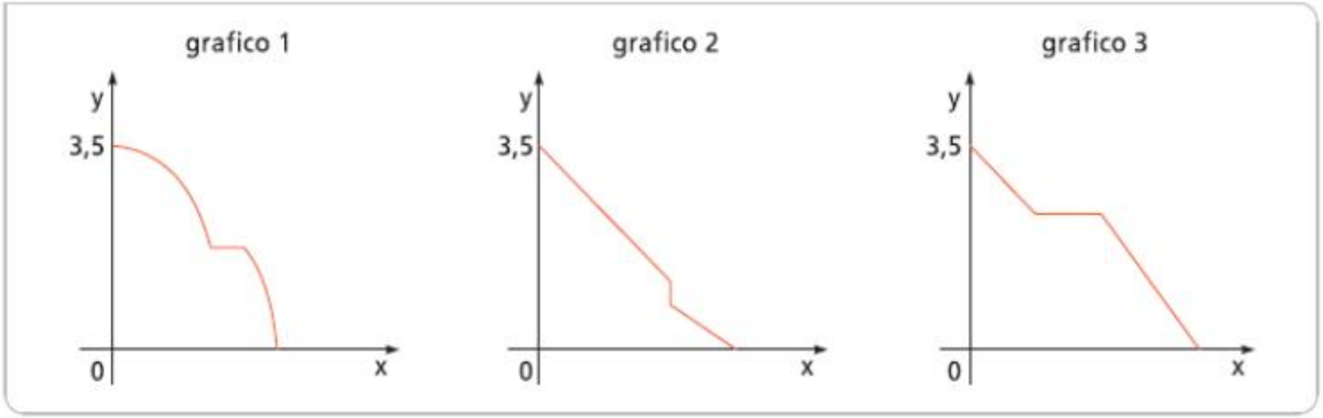
Esperienze significative nella scuola media

- educare i ragazzi alla ***lettura qualitativa*** di grafici (grafico come strumento interpretativo di fenomeni…)
- utilizzare l'insegnamento integrato della matematica e delle scienze al fine di favorire un approccio di tipo storico-epistemologico (prestando attenzione alle degenerazioni di cui sopra…), e anche sfruttando l'esperienza dei fenomeni fisici per favorire la concettualizzazione degli aspetti matematici della funzione
- sfruttare il più possibile le potenzialità delle nuove tecnologie (visualizzazione rapida e dinamica dei processi, della costruzione del grafico (Geogebra), uso di sensori…)

Importanza dei grafici di andamento (come base esperienziale per il successivo studio analitico della funzione)

11 Al parco giochi

Giorgio si è recato in un parco giochi con alcuni amici: subito sale su uno scivolo alto 3,5 m. Dopo essere scivolato per 1 m, improvvisamente si blocca. Gli amici lo incoraggiano e Giorgio, rassicurato, completa la discesa. In ciascuno dei tre grafici seguenti, sull'asse x è riportato il tempo trascorso durante la discesa e sull'asse y l'altezza a cui si trova Giorgio lungo la discesa.
Quale dei tre illustra meglio la discesa di Giorgio? Giustifica la tua risposta.



NEL COMPILARE UN GRAFICO RELATIVO AD UNA LEGGE DI PROPORZIONALITÀ…

L'allievo esamina rappresentazioni di queste relazioni attraverso tabelle in cui diversi valori delle variabili sono disposti **entrambi verticalmente**, oppure **entrambi orizzontalmente**; a volte continua la compilazione di queste tabelle utilizzando una formula, ma quanto tali rappresentazioni contribuiscono a rafforzare nella sua mente l'idea che **tra le due variabili esiste realmente un legame**? Siamo certi che **la rappresentazione simbolica** di tale legame attraverso una **formula** a questo livello scolare, rappresenti davvero per l'allievo **l'esplicitazione di questo legame**? (rappresentazione di una variabile mediante l’altra, anche invertendo, quando è possibile)…

FUNZIONI PROPORZIONALI

Nella scuola media si lavora realmente sulla costruzione del concetto di funzione proporzionale?

- di solito, i manuali scolastici trascurano anche la fase di individuazione delle variabili…
- molto spesso ci si limita a compilare tabelle numeriche, non evidenziando adeguatamente il legame di corrispondenza tra le due righe (o colonne) della tabella…
- non viene curato il passaggio graduale dalle sequenze numeriche alla formalizzazione algebrica della relazione
- si salta quasi sempre l'esplicitazione verbale della relazione, che risulterebbe estremamente utile per favorire il coordinamento tra le varie rappresentazioni…

E ANCORA, SULLA REALE COMPRENSIONE DEL GRAFICO CARTESIANO DI UNA RELAZIONE FUNZIONALE…

C'è un aspetto che non va sottovalutato: **il grafico cartesiano mostra la variabilità delle due grandezze attraverso l'osservazione della variabilità dei due insiemi di valori ad essi relativi secondo direzioni diverse, mentre le tabelle mostrano tali variabilità lungo la stessa direzione**.

ULTERIORI DIFFICOLTÀ DI COMPRENSIONE DEL SIGNIFICATO DEL GRAFICO…

Spesso l'attenzione dell'allievo è catturata soprattutto dalla variabilità lungo la direzione orizzontale, mentre il generico punto della retta esprime una **sintesi** della variabilità di entrambi i valori, quello in ascissa e quello in ordinata.

Spesso, inoltre, questo legame è mentalmente di tipo **discreto**, anche per la povertà, a quel momento, di concettualizzazione di esperienze sul ragionamento proporzionale, e conseguentemente sui sistemi numerici dei razionali e dei reali.

LE *LEGGI DI PROPORZIONALITA'* COSTITUISCONO UN CAMPO DI ESPERIENZA DI GRANDE RILEVANZA PER L'ACQUISIZIONE DEL CONCETTO DI FUNZIONE, NELLA SCUOLA MEDIA.

Con esse si costruisce il coordinamento tra registri tabulare – algebrico -grafico

MA ANCHE…

NEL COSTRUIRE UN GRAFICO PER LA RELAZIONE DI PROPORZIONALITA', GRANDE RILEVANZA HA L'UTILIZZO DEL CODICE ALGEBRICO

Il problema della **messa in formula** e della **gestione simbolica di variabili e costanti**

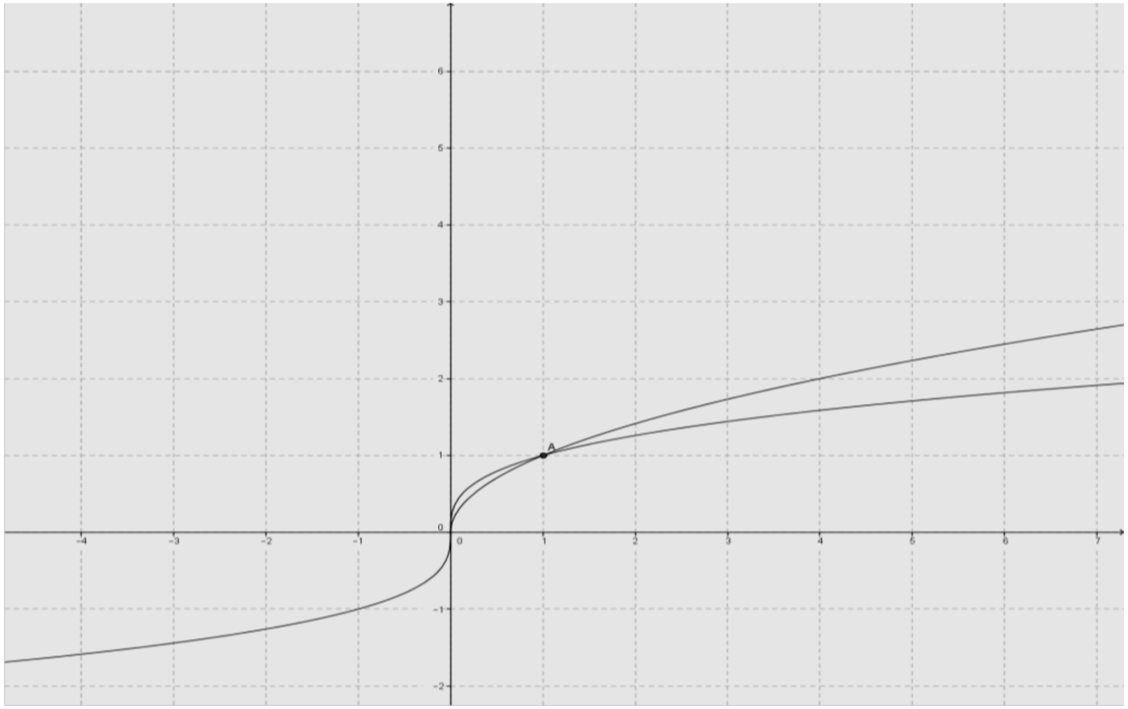
Ruolo fondamentale dell'insegnante

favorire il coordinamento tra almeno due registri rappresentativi (ad esempio formula – grafico cartesiano…), **puntare ad un' acquisizione corretta del simbolo, non vuoto di significati, ma ricco di una molteplicità di interpretazioni e quindi solo successivamente svuotato di significato**

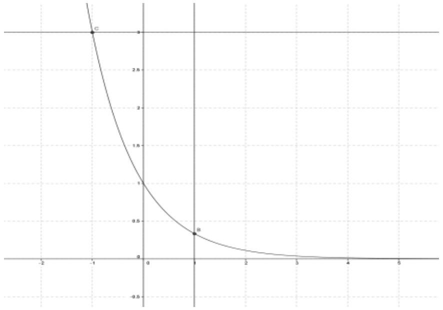
E NEL TRIENNIO DELLA SCUOLA SUPERIORE?

Ricompaiono incertezze e conflitti legati al coordinamento tra vari registri e al significato di grafico

Nella figura qui sotto sono tracciati i grafici delle due funzioni :
y = $\sqrt{x}$ e y= $\sqrt[3]{x}$

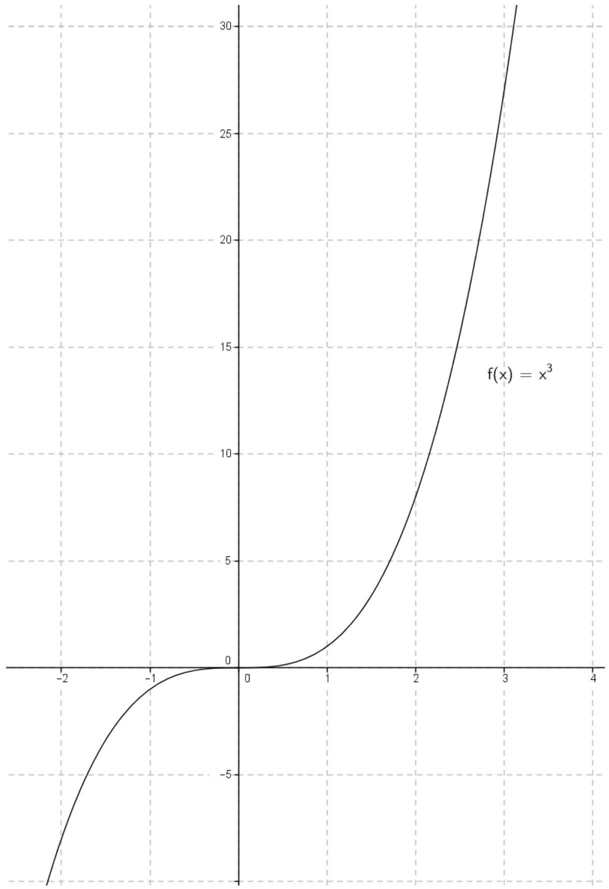


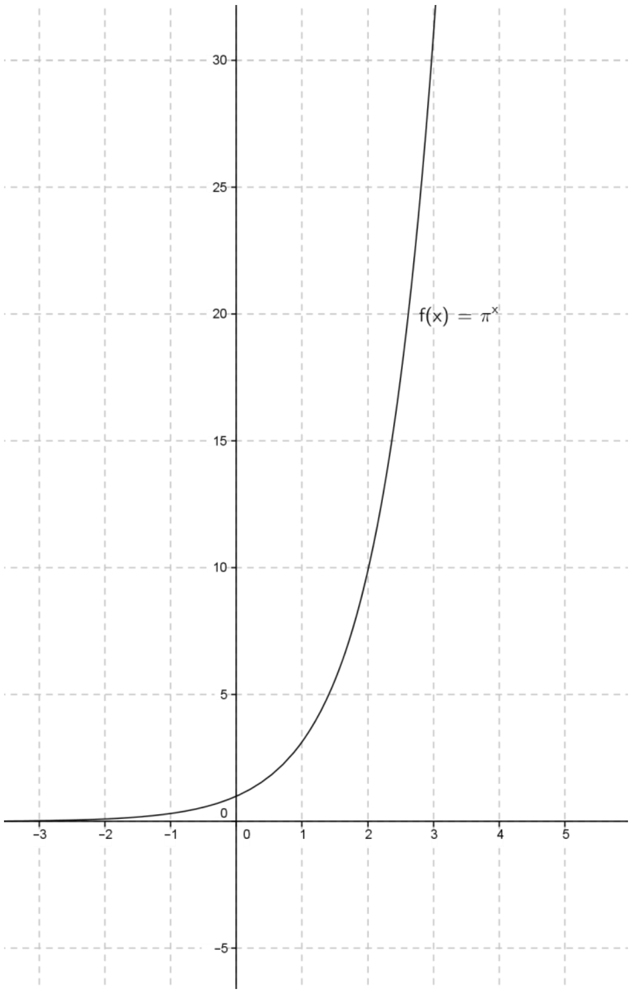
•evidenzia il rosso il grafico della prima e in blu il grafico della seconda. C’è differenza tra i due domini? se sì, quale?
•Quante soluzioni ammette l’equazione $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$



Osserva il seguente grafico, che rappresenta la funzione $y = (1/3)^x$
scrivi le coordinate del punto B
trova le coordinate del punto C, intersezione del grafico con la retta tracciata in figura (x=1)

Trova su entrambi i grafici il punto di ordinata Π^3





Ultime considerazioni…

Il concetto di limite!

Un test pericolosissimo…

(forza il coordinamento tra le due direzioni di variabilità)

Approccio grafico al concetto di limite

10 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

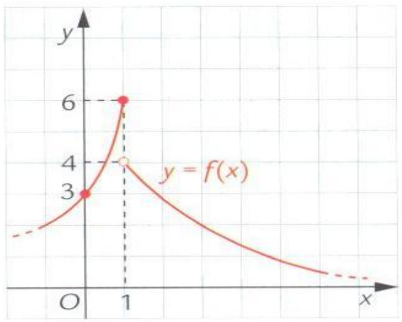
a. $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ....

b. $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ ....

c. $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ ....

d. $\lim_{x \to 1} f(x) =$ ....

e. $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ....



11 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ....

b. $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ ....

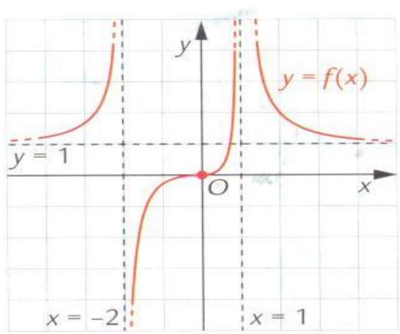
c. $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ ....

d. $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ....

e. $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ ....

f. $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ ....

g. $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ....



12 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ....

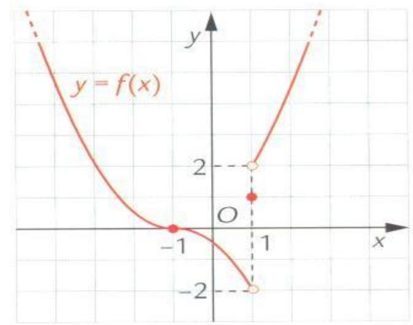
b. $\lim_{x \to -1} f(x) =$ ....

c. $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ ....

d. $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ ....

e. $\lim_{x \to 1} f(x) =$ ....

f. $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ....



13 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ....

b. $\lim_{x \to -1^-} f(x) =$ ....

c. $\lim_{x \to -1^+} f(x) =$ ....

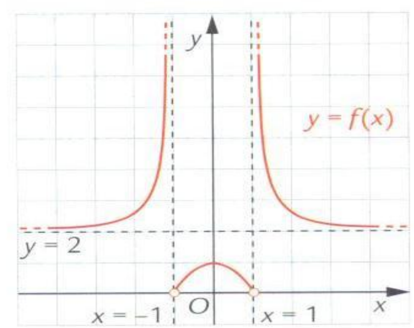
d. $\lim_{x \to -1} f(x) =$ ....

e. $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ ....

f. $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ ....

g. $\lim_{x \to 1} f(x) =$ ....

h. $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ....



BIBLIOGRAFIA

- Bazzini L., Iaderosa R.(2000), *Approccio all'Algebra, Riflessioni didattiche,* Franco Angeli, Milano
- Malara NA (2009), Il concetto di funzione: aspetti epistemologici e didattici, in D'Amore, B., Sbaragli, S. (a cura di), *Pratiche matematiche e didattiche in aula*, atti 23° Conv. Naz. Incontri con la Matematica. Castel S. Pietro (BO), Pitagora editrice, Bologna 19-27
- Iaderosa R., Malara N. (2001) Un aspetto di un percorso di approccio al concetto di funzione: l'interpretazione qualitativa di un grafico, *L'insegnamento della matematica e delle Scienze integrate,* Vol.24° N.4, luglio 2001
- AAVV (2006), Progetto Ar-Al Unità 9: Verso le funzioni.