Conferenza Mathesis - Università di Pavia 16 febbraio 2017

Early Algebra

Aspetti relazionali, linguistici e metacognitivi nell'insegnamento dell'aritmetica per un approccio costruttivo all'algebra in continuità tra i diversi ordini di scuola

Nicolina A. Malara
Dip. di Scienze Fisiche Informatiche e Matematiche
Università di Modena & Reggio E.

- Sulla nascita dell'early algebra
- indirizzi educativi attuali
- Lo spostamento di attenzione dagli aspetti procedurali agli aspetti relazionali per l'avvio alla early algebra
- Esplorazioni numeriche
- La risoluzione di problemi
- La visione funzionale

Sulla nascita dell'Early Algebra

L'affacciarsi dell'Early Algebra come campo di studi si può far risalire alla seconda metà degli anni '80

A I congresso ICME 6 (Adelaide, Australia, 1984) uno specifico gruppo di lavoro (Davis 1985) dibatte sulla opportunità di

operare nella scuola primaria

per tentare di:

superare diffuse difficoltà di apprendimento in algebra messe in luce dalla ricerca

Sulla nascita dell'Early Algebra

I successivi survey di Kieran (1989, 1992), classici della letteratura sulle difficoltà di apprendimento in algebra, rendono trasparente

la negatività dell'usuale insegnamento dell'aritmetica

- essenzialmente rivolto al calcolo
- poco attento agli aspetti relazionali e strutturali della disciplina

Sulla nascita dell'Early Algebra

In un commento al primo survey di Kieran, Both (1989) scrive:

Si è generalmente supposto che le difficoltà degli studenti in Algebra siano in buona parte

difficoltà di apprendimento della sintassi

Nell'ultimo decennio tuttavia l'accumularsi dei risultati della ricerca, ha messo in luce che

molti studenti hanno una poverissima comprensione delle relazioni e delle strutture matematiche che sono alla base delle rappresentazioni algebriche.

Sulla nascita dell'Early Algebra

Both (1989)

La capacità di lavorare in modo significativo in algebra, e dunque di maneggiare le notazioni convenzionali con facilità, comporta che

gli studenti sviluppino innanzi tutto una comprensione semantica dell'aritmetica

Sulla nascita dell'Early Algebra

Both (1989)

Un compito per la ricerca è quello di esaminare l'intera questione

- del riconoscimento e dell'uso di strutture da parte degli studenti
- di come questo riconoscimento si possa sviluppare

Un secondo compito è usare queste informazioni per

- ideare nuove attività di apprendimento
- creare ambienti per aiutare gli studenti in questo sviluppo

Sulla nascita dell’Early Algebra

Nella seconda metà degli anni ‘80 vengono proposti interessanti progetti per l’educazione matematica per allievi dagli 11 ai 16 anni (Bell & Al., 1985; Harper, 1987) dove:

è promosso l’uso delle lettere

- come strumento di rappresentazione di espressioni verbali esprimenti regolarità osservate nel reale
- come strumento di sintesi per relazioni numeriche analoghe

Bell introduce il costrutto de

il ciclo algebrico essenziale

Caratterizzato da tre tipologie di attività algebriche

Sulla nascita dell'Early Algebra

Un importante momento di evoluzione

Il dibattito nell'Algebra Working Group ad ICME 7 (Laval, Quebec 1992) (Lincheviski, 1995)

Si concorda che:

nell'aritmetica della scuola elementare

vi sia un'ampia gamma di opportunità

per lo sviluppo del pensiero algebrico

Sulla nascita dell'Early Algebra

Nello sfondo della teoria della reificazione di Lincheviski & Sfard (1991) nel working group viene concepita

La Pre-algebra

come nuovo spazio di insegnamento in ambito artimetico finalizzato allo sviluppo di concetti aritmetici evoluti, di tipo relazionale e strutturale, come pre-concetti utili all'algebra

Sulla nascita dell'Early Algebra

All'ICME VIII (Siviglia 1996) Kieran stigmatizza l' ampliamento dell'insegnamento dell'algebra attraverso l'articolazione di tre componenti:

- **Le attività generative**
- Le attività trasformazionali
- **Le attività algebriche di tipo meta** (problem solving, modeling, dimostrazione, …)

Sulla nascita dell'Early Algebra

La seconda metà degli anni novanta vede a livello internazionale un fiorire di studi teorico – sperimentali rivolti i ad allievi di 11-13 anni

Alcuni di tali studi si distinguono per la formulazione di

modelli di sviluppo concettuale in algebra di tipo socio-costruttivo nel quadro di una visione di approccio all'algebra come linguaggio. In essi

- è enfatizzata l'influenza dell'ambiente classe sull'apprendimento
- è promosso l'uso di mezzi fisici come strumenti di mediazione semeiotica

(Da Rocha Falcão 1995, Meira 1990, 1996, Radford & Grenier 1996, Malara & Navarra 2000, Radford 2000)

Sulla nascita dell'Early Algebra

Dal 2000, l'evolversi degli studi studi porta al consolidarsi di un corpus di risultati che è legittimato a livello internazionale come specifica area disciplinare denominata

Early Algebra

Ciò è documentato da

•studi rivolti alla comparazione dei curricoli in questa area (Caj *et al*. 2005)

•di innvazione per le classi (Carpenter et al 2003, Malara & Navarra 2003, Kaput *et al*. 2008, Caj & Knut 2011, Russell et al.).

•I contributi ai congressi internazionali a partire dal 2001 (Studio ICMI 12 Il Futuro dell'Ins/appr Algebra

•Lo spazio di autonomia riconosciuto al recente congressi internazionale ICME 13

Sulla nascita dell’Early Algebra

In questo quadro si maturano importanti mutamenti di concezioni nell’insegnamento che si riflettono nei curricoli di vari paesi:

•Il passaggio dall’algebra **all’algebraic thinking**

•L’enfasi rivolta alla **generalizzazione ed alla rappresentazione algebrica**

•Il **functional thinking** caratterizzato dallo
lo studio di relazioni funzionali e di successioni nel quandro più generale della modellizzazione matematica

L’affermarsi di queste concezioni vede anche la realizzazione di specifici progetti di innovazione nell’insegnamento della scuola primaria

In questo quadro si colloca Il nostro

Progetto ArAl

www.progettoaral.it

Gli interessati possono chiedere l'iscrizione al *Gruppo Progetto ArAl* su facebook

Pitagora Editrice Bologna

Progetto ArAl

Libri per insegnanti e per le classi

Mutamenti sociali e nuove concezioni di insegnamento

(Freudenthal, ICME Lione, 1969)

La matematica è più di una tecnica.

Apprendere la matematica significa conquistare l'attitudine ad un comportamento matematico

Mutamenti negli indirizzi di insegnamento

•Ragioni sociali
la complessità delle nostre società richiede nelle nuove generazioni **capacità di adattamento ai rapidi cambiamenti** e **capacità di lavorare in team**.

Il lavoro di squadra richiede :

•capacità di **relazione, ascolto e dialogo** con gli altri,

•**Capacità di analisi di problemi e di progettazione di strategie risolutive**,

•**capacità di argomentazione inglobando nelle proprie idee punti di vista altrui**,

•Capacità di appropriazione ed uso di nuovi strumenti tecnologici e di linguaggi nuovi

Mutamenti negli indirizzi di insegnamento

Si punta a promuovere

Una visione evolutiva della matematica

come disciplina strettamente correlata alle attività umane che si sviluppa a partire dallo studio esplorativo di fenomeni in molteplici contesti

Si vuole che gli studenti ripercorrano

la dinamica 'processo-oggetto'

propria dello sviluppo della matematica

Mutamenti negli indirizzi di insegnamento

Si **valorizzano i processi di matematizzazione**
Attraverso esplorazioni si raccolgono ed organizzano dati, si individuano relazioni, si formulano problemi e si attivano rappresentazioni che ne consentono la soluzione o la loro riduzione ad altri più semplici
Si ridimensionano gli aspetti meccanici a vantaggio di un **forte controllo dei significati** dando un grande spazio alle **attività metacognitive**

La ricerca sociologica ha provato la stretta correlazione tra ***insegnamento metacognitivo*** per l'acquisizione di flessibilità di ragionamento e la ***capacità di adattamento ai cambiamenti***

I nuovi indirizzi per la matematica

Si propone come elemento centrale dell'insegnamento

l'esplorazione di opportune situazioni problematiche

realizzate mediante

pratiche sociali condivise

- **lavoro a piccoli gruppi**
- **discussione matematica di classe**

Focus su:

argomentazione, **giustificazione**, **verbalizzazione**

comunicazione

Il ruolo del linguaggio

In questo quadro

il linguaggio viene ad avere un ruolo centrale

•**dal punto di vista metodologico-didattico**

per l'enfasi data all'esplicitazione dei processi di pensiero degli allievi nella argomentazione e nella verbalizzazione scritta

- **dal punto di vista disciplinare**

- come ***principale strumento di rappresentazione*** per la messa a fuoco e la descrizione del sistema di relazioni fra gli elementi di una situazione problematica

  - come ***principale mediatore*** nei processi di costruzione dei diversi linguaggi (insiemistico, aritmetico-algebrico, geometrico, grafico-cartesiano, probabilistico, …) che compongono il linguaggio della matematica.

Mutamenti negli indirizzi di insegnamento

Carla Melazzini, 2011, ***Insegnare al principe di Danimarca,*** a cura di Cesare Moreno, Sellerio

Il preadoloscente diffida dell'insegnante non perché parla italiano, ma in prima istanza perché parla, e in genere parla troppo, mentre lui è intasato da emozioni e conflitti che si esprimono con il silenzio, con il corpo, con il gesto, con l'urlo. La parola dell'insegnante, invece di aiutarlo a mettere ordine in quel caos dandogli pian piano una forma, troppo spesso vi sovrappone una gabbia di regole, oppure parla d'altro. L'insegnamento linguistico è prima di tutto dialogo, e nel dialogo viene prima di tutto l'ascolto: sennò è vero quello che dicono i ragazzi, che usiamo le parole per avere sempre ragione noi. ***Solo se impara ad ascoltare l'insegnante può avere la pretesa di essere ascoltato****. (pag 66)*

Mutamenti negli indirizzi di insegnamento

Carla Melazzini, 2011, ***Insegnare al principe di Danimarca*, a cura** di Cesare Moreno, Sellerio

« ***l'assioma della significanza*** » (pag.76)

insegnare significa dare significato alla parola (e a tutte le attività che se ne servono). Se il significato, per essere tale, non può essere imposto ma deve essere condiviso da insegnante e alunno, ne deriva il corollario della reciprocità, nella relazione personale come nella didattica: che significa accogliere i silenzi, i veti, ma anche gli indizi, i suggerimenti, gli orientamenti da parte degli alunni, pena la perdita, appunto, della significanza. E quanto ha da imparare un insegnante da questo gioco di restituzione reciproca di significati!

avvio all'early algebra

Il passaggio dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Il passaggio dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Si gioca

- sullo **spostamento di attenzione**

•Dal risultato al ***processo*** che lo determina

•dal calcolare al ***giustificare,*** ossia **esprimere le ragioni** che garantiscono la correttezza di un calcolo

Dall'aritmetica procedurale all'artmetica relazionale

Si opera per

➔Imparare a **rappresentare in più modi** una data quantità

8 = 2+6 = 6+2; 8 = 1+7 = 7+1 ; 5 + 3 = 3+5 ; 4+4

ma anche 6+2 = 1+7 ; 6+2 = 7+1 ; 2+6 = 1+7 ;

6+2= 5+3 ; 6+2 = … ; continua tu

6+2 = 5+3 ; …. Continua tu

6+2 = 4+4 …

ma anche 4+4 = 5+3 = 8 = 2+6 = 7+1

ma anche 2(3+1) = 3x3 -1 = 4x2 = 1 + 2x4

ma anche ….

Sono tutte rappresentazioni del numero 8 Interscambiabili ed utilizzabili a seconda dei bisogni

Dall’aritmetica procedurale all’artmetica relazionale

➔Imparare a **rappresentare in più modi** una data quantità

Nel ‘Progetto ArAl’ si distingue tra

- **rappresentazione canonica di un numero**
- (il simbolo associato al nome: 0 - zero, 1 - uno, 2- due, 3-tre ecc)
- **rappresentazione non canonica**
- (ogni altra espressione che individua il numero, es 2x3+5 , 15-4, 3x3+2 ecc)

Dall’aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Si gioca

- sulla concettualizzazione della

simmetria dell’uguaglianza

Superando la visione del segno “uguale” come operatore direzionale (‘dà luogo a’ - ‘fa’)

Un’attività significativa: il completamento di uguaglianze

cosa manca nella scrittura 8+4 = □ + 7, perché sia una uguaglianza?

Gli allievi devono porre il primo membro in relazione al secondo ed attivare delle strategie di comparazione e/o di conteggio

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

- cosa manca nell'uguaglianza 8+4 = □ + 7

azione

riflessione

- Risposta procedurale: è 5, da 7 a 12 **conto 5**
- Risposta relazionale: **8 è 1 più di 7** allora **il numero che manca è 1 più di 4**

Questa attività consente nel prosieguo **l'identificazione di uguaglianze o disuguaglianze senza effettuare calcoli**

- cosa manca nell'uguaglianza 27 + □ = 8+29

- risposta **relazionale** ottenibile: **il numero che manca è 10 perché** 29 è 2 in più di 27 **per pareggiare 8 si deve aggiungere 2**

Domina la riflessione

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Un primo esempio di attività

5+7 = 12, perché

Giustificazione procedurale

•**ho contato da 5 in poi** aggiungendo 7 e **sono arrivato** a 12

Giustificazione a cavallo tra procedurale e relazionale

•**ho pensato** che 5+7 è come 7 + 5, da 7 ad arrivare a 10 mancano 3, li **prendo** dal 5 e mi resta 2, allora lo aggiungo al 10

Giustificazione relazionale

•ho pensato che 5 e 5 dà 10 ma

più allora il risultato è 2 più di 10 e

Occorre discutere e condividere con la classe le varie strategie

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Si opera per

➔ Imparare a confrontare quantità ad argomentare ed ad esprimere formalmente l'esito del confronto

Quale è il numero più grande tra 7 e 13? Perché?

•Perché 7 viene prima del 13 nella linea dei numeri

•Perché se conto fino a 7 il 13 nor

•Perché il 13 viene dopo del 7

•Perché 13 è più grande di 10 e 7

•Perché 13 è 3 più di 10, 10 è 3 più unità in più per arrivare a 13 da 7

•**7 < 13 perché 13 = 7+6**

Sono tutte giustificazioni legittime che fanno riferimento a frame concettuali diversi

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Si opera in aritmetica per
➔ Imparare a confrontare numeri espressi in forma non canonica ed a giustificare la risposta

Senza fare i calcoli confronta i numeri 96+2 e 100-2. Possiamo dire che sono uguali? Argomenta la risposta

•non sono uguali perché 100 è maggiore di 96 e anche se gli tolgo 2 è maggiore (*)
•sono uguali perché il primo è 2 unità in più di 96, il secondo è due unità in meno di 100 e sulla linea dei numeri 6+2 e 10-2 coincidono, son
•sono uguali perché 100 ha 4 unità
togliendo 2 rimangono 2 unità in p
proprio il primo numero

Iniziano le prime argomentazioni di giustificazione di uguaglianze

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

➔ Imparare ad usare notazioni che evidenziano l'aspetto esplorativo

Cosa puoi dire di questa (ipotesi di) ugu

?

7+5 = 15 - 3.

Argomenta la risposta

- Se faccio le operazioni scopro che son
- 15 è 10 + 5; 7+5 non è uguale a 10+5 p maggiore di 7 di 3 unità; ma togliendo 10-3 è una rappresentazione non cano scrivendo 15-3 = (10-3) + 5 la nostra ugu diventa 7 + 5 = (10-3) + 5 ; si vede chio vera: in entrambi i lati c'è lo stesso num 5 e 7.

Spostarsi dal calcolare a ragionare sulle relazioni tra i dati

Questo tipo di attività, oltre a favorire il pensiero relazionale e pre-algebrico è fondamentale per lo sviluppo di abilità di calcolo mentale.

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

- **Riconoscere e verificare uguaglianze senza far di conto**

- Giustifica perché **21 + 54 + 37 = 37 + 21 + 54**

Risposta scarna, tipica del fare: gli addendi sono uguali

Risposta argomentata, propria del riflettere:
l'uguaglianza vale perché:

1) da un lato c' è (21+54) + 37

(1) Entra in atto la **prop. associativ**

2) dall'altro, c'è 37 + (21+54)

(2) Entra in atto la **prop. associativa**

3) questi due numeri sono uguali

(3) Entra in atto la **prop. commutativa**

E'compito dell'insegnante guidare gli allievi alla esplicitazione delle proprietà su cui si basano le giustificazioni di una uguaglianza o disuguaglianza

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Riconoscere e verificare uguaglianze senza far di conto

- Giustifica perché 7 x 8 = 21 + 35

E' vero perché

(1) 21 è 3x7 e 35 è 5x7 allora

(2) 21+35 = 3x7 + 5x7, ma

(3) 3 volte 7 più 5 volte 7 è 8 volte 7 cioè

(4) 8x7 = 7x8 allora

(5) 21 + 35 = 7 x 8

Entrano in scena:

- **la proprietà distributiva** 3x7+5x7 = (3+5)x7
- **La proprietà commutativa della moltiplicazione** 7x8 = 8x7
- **La simmetria dell'uguaglianza**
- 21 + 35 = 7 x 8 equivale a 7 x 8 = 21 + 35

L'iniziazione all'uso delle lettere

- la lettera per rappresentare un numero sconosciuto

•L'uguaglianza è vera. La lettera d rappresenta un numero. Quale numero è? Perché?

$$234+578= 234 +576 +d$$

- L'uguaglianza è vera. La lettera c rappresenta un numero. Quale numero è, perché

$$67-49 = c - 46$$

Messa in atto della proprietà invariantiva

L’iniziazione all’uso delle lettere, facilitazione per i problemi

Nella classe della maestra Clara ci sono 2 librerie uguali una rossa ed una blu. Le librerie hanno 3 mensole ciascuna. Nella libreria rossa ci sono 9 libri sulla prima mensola in bassi, 7 libri sulla seconda mensola e altri nella terza mensola in alto. Nella libreria blu ci sono solo 12 libri nella prima mensola in basso e 13 libri nella seconda.
Chiara guardando le librerie esclama: le librerie hanno lo stesso numero di libri.
Rappresenta la situazione in modo che Brioshi o un bambino di un’altra classe possa stabilire quanti libri ci sono nella mensola in alto della libreria rossa

9 + 7 + ? = 12 +13

9 + 7 + ? =   (9+3) + (7+6)

? = 3 + 6

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Non tutte le uguaglianze sono vere, spiega perché

137 + 156 = 139 + 154

471 - 382 = 474 - 385

94 +87-38 = 94+85 -39 + f

60x48 = 6x480

37x54 = 38 x 53

Le proprietà
delle operazioni aritmetiche

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Le proprietà delle operazioni aritmetiche

Nell'insegnamento, sin dai primi livelli, occorre portare i bambini a concettualizzare le proprietà aritmetiche , attraverso riflessioni su ciò che accade ***nel loro reale*** (giochi o simulazioni di situazioni del quotidiano)

Le proprietà non vanno date direttamente in astratto ma fatte vivere ai bambini attraverso la loro immersione in situazioni diverse e fatte sorgere dalla riflessione sulla esperienza, confrontando azioni e procedimenti attraverso opportune rappresentazioni.

Dall’aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

La proprietà distributiva

La sequenzialità del testo di un problema o la illustrazione grafica inducono nei bambini una o l’altra delle procedure

$(a+ b)\times c$ oppure $(a \times c)+(b \times c)$

L’insegnante dovrà costruirsi un percorso per situazioni problematiche anche interne alla matematica che portino gradualmente gli studenti alla concettualizzazione della proprietà

Esempio

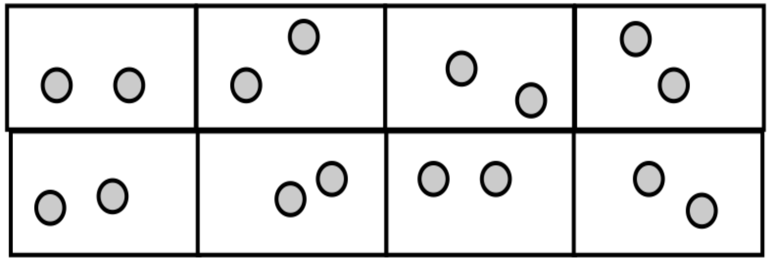
Il problema … ella 2a strategia

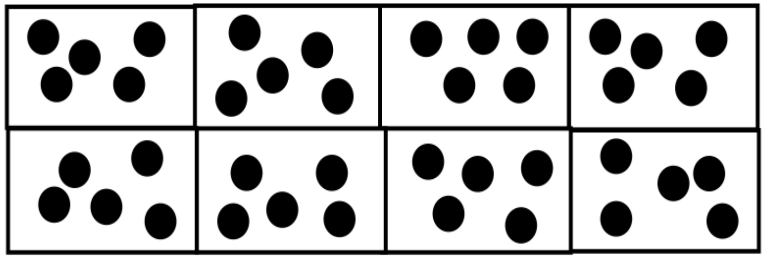
Luisa h… a cinque
grani t… to in figura:

ooooo◆◆ooooo◆◆ooooo◆◆ooooo◆◆ooooo◆◆

Spiega a parole e con frasi matematiche come hai ragionato per trovare il numero dei grani usati da Luisa per comporre la sua collana

Marina colleziona biglie rosse e verdi e le dispone dentro delle scatole come in figura. Rappresentate la situazione in linguaggio matematico in modo da trovare il numero delle biglie della collezione.



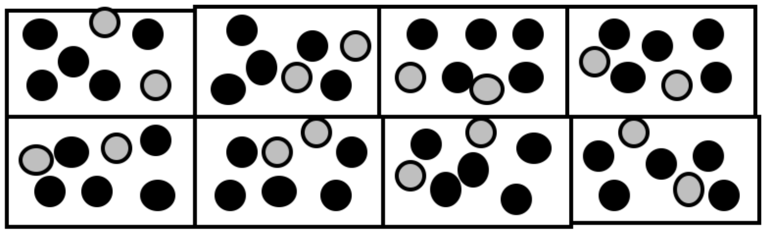


Si trascrivono le traduzioni degli alunni e si inizia la discussione:

(a) $16\times40=n$ (b) $2\times4+5\times4$ (c) $n=5\times8$; $n=2\times8$ (d) $2\times8=n$; $5\times8=n$; $n=2\times8+5\times8$

(e) $2\times8+5\times8=n$ (f) $(2\times8)+(5\times8)=n$ (g) $n=(2\times8)+(5\times8)$

Marina ha organizzato le biglie in un modo diverso. Rappresentate questa nuova situazione:



Si trascrivono alla lavagna queste rappresentazioni: (a) $n=5+2\times8$; (b) $2\times8+5\times8=n$; (c) $n=(2+5)\times8$.

NOTA BENE

non parlare mai di ‘proprietà dissociativa’

Ciò che sta alla base di questa sedicente proprietà non riguarda le operazioni in sé, ma è insita nel principio logico della

sostituzione

•Rappresentazioni diverse di medesima cosa sono interscambiabili

Le relazioni tra le operazioni aritmetiche

E' bene abituare gli allievi ad acquisire una visione unitaria delle coppie di operazioni <addizione, sottrazione>, <moltiplicazione - divisione> pur esaltando le loro differenze ed ad esprimere anche simbolicamente i legami di esse

•Addizione e sottrazione

Le lettere a, b, c, u, v, z rappresentano numeri

Se $a + b = c$ *allora* $a = c - b$ e $b = c - a$

Se $u - v = z$ *allora* $z + v = u$

•Moltiplicazione e divisione

Le lettere a, b, c, u, v, z rappresentano **numeri non nulli**

Se $a \times b = c$ *allora* $c : b = a$ e $c : a = b$

Se $u : v = z$ allora $z \times v = u$

Sulle rappresentazioni moltiplicative

2x3 = 6
2x4 = 8
2x5 = 10
2x6 = 12
2x7 = 14
2x8 = 16
…

6 = 2x3
8 = 2x4
10 = 2x5
12 = 2x6
14 = 2x7
16 = 2x8
…

2 è fattore del numero
2 è **divisore proprio** del numero

Un numero ha 2 come **divisore proprio** se e solo se:
- Diviso per 2 ha resto zero
- è rappresentabile come prodotto di 2 per un altro numero

Rappresentazioni moltiplicative e rappresentazioni additive

Un esempio di esplorazione numerica

2x3	6	Esprimiamo	2+4	dalla rappre-
3x4	12	ciascun	3+9	sentazione
4x5	20	numero come	4+16	additiva
5x6	30	somma	5+25	appare una
6x7	42	mediante il	6+36	regolarità tra
		primo fattore		primo e
				secondo
				addendo

Congettura

Il prodotto di un numero naturale e del suo successivo è uguale alla somma del numero stesso e del suo quadrato

Torniamo alla rappresentazione moltiplicativa e vediamo di rappresentare il secondo fattore mediante il primo

2x3	2x(2+1)
3x4	3x(3+1)
4x5	4x(4+1)
5x6	5x(5+1)
6x7	6x(6+1)

Il numero generico come ‘pronome’

$$n\times(n+1) = n^2+n$$

Uguaglianza corretta per la prop. distributiva

E’ la rappresentazione del secondo fattore mediante il primo che permette di scoprire il perché della regolarità osservata

Teorema

Il prodotto di un numero naturale e del suo successivo è uguale alla somma del numero stesso e del suo quadrato

Dall’aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Sulla divisione

Al di là della diversità delle tipologie delle situazioni problematiche modellizzabili mediante la divisione un discorso a sé stante merita questa operazione

Essa è sempre possibile tra due numeri a e b quando **b sia non nullo.**
Se a <b a = 0b+ a con a<b

Se a >b la possibilità della divisione risiede in due proprietà fondamentali dei numeri naturali:
- **Il principio di minimo**: ogni sottoinsieme non vuoto di numeri naturali ha un primo elemento
- **Il principio di Archimede**: Qualunque siano a e b naturali non nulli esiste sempre un multiplo di uno che supera l’altro

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Sull'operazione di divisione

Pochi sono gli studenti che vengono educati a:
•vedere la divisione come una sottrazione ripetuta

- Vedere la divisione come operazione che produce due numeri: il quoziente ed il resto
- considerare l'esistenza del resto nullo quando il divisore è sottomultiplo del dividendo
- concettualizzare che il **prodotto tra divisore e quoziente è il più grande multiplo del quoziente minore o uguale al dividendo**

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Sull'operazione di divisione

Pochi sono gli studenti che vengono educati ad esprimere in termini generali la relazione che lega dividendo, divisore, quoziente e resto

Dati i numeri a e b, $b \neq 0$, detti q il quoziente e r il resto
Tale relazione è espressa dalla scrittura

$a = qb + r$, con r soddisfacente la condizione $0 \leq r < b$

È molto importante abituare sin dall'inizio gli allievi ad esprimerla su casi numerici come pure esprimere

- il dividendo mediante divisore, quoziente e resto;
- il resto mediante dividendo, divisore e quoziente;
- il quoziente mediante il dividendo il resto ed il divisore;
- il divisore mediante il dividendo il resto ed il quoziente

Sulla divisione

Es. 1 (da 'Algebra' di E. Clairaut, 1746)

Un appaltatore deve dare la paga di 3 libre a ciascuno dei suoi operai, ma gli mancono 8 libre. Dando 2 libre a ciascuno di loro gli rimangono 3 libre. Quante libre ha in tutto?

Es. 2 (da Cipolla & Mignosi 1924)

Una signora ha delle caramelle da distribuire ai suoi nipotini. Se gliene dà 5 ciascuno gliene rimangono 5. Ma non può dargliene 6 ciascuno perché gliene mancherebbero 3. Quanti sono i nipotini della signora?

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

- **imparare ad interpretare**

- *Un qualunque numero del tipo 5n+3, con n naturale, è divisibile per 2, è divisibile per 3, è divisibile per 5?*

(1) Come deve essere n perché 5n + 3 sia divisibile per 2?

•Essendo 3 dispari, perché 5n + 3 sia pari , 5n deve essere dispari

•5n sarà dispari solo quando n sarà dispari

Allora: **5n + 3 sarà divisibile per 2 quando n è dispari**

(2) Come deve essere n perché 5n + 3 sia divisibile per 3?

•Basta che sia 5n divisibile per 3, cioè n multiplo di 3

Allora: **5n + 3 sarà divisibile per 3 quando n è multiplo di 3.**

(3) **5n+3 NON può essere divisibile per 5.** Uno studente che ha chiaro il concetto di divisione '**vede**' che 5n + 3 rappresenta un numero che diviso per 5 **ha resto 3** e pertanto non potrà mai essere multiplo di 5.

Gli aggettivi numerali ordinali

il primo, il secondo, il terzo, il quarto, il quinto, il sesto, il settimo, l'ottavo, il nono, il decimo, l'undicesimo , …
(Con i più grandi si può anche pensare di continuare ….. Il 135esimo, ………il 2789esimo, …

Ma l'indicazione ordinale di **un numero qualsiasi** non è banale

- **l'indicazione di n nella linea dei numeri ispirerà la denominazione ' ennesimo'**

0 1 2 ……… n (n + 1)

- La conquista del termine ‘ennesimo’ è una tappa importantissima nell’insegnamento/apprendimento dell’aritmetica perché facilita l’esplorazione di classi di successioni modellizzabil e la determinazione di una loro formulazione in termini generali.

Linguaggio naturale – linguaggio aritmetico

Dalle azioni **ai sostantivi** **alle rappresentazioni matematiche**

Duplicare	Il doppio (di)	2 x	Dimezzare	La metà	½
Triplicare	Il triplo (di)	3 x	Tripartire	La terza parte	1/3
Quadruplicare	Il quadruplo (di)	4 x	Quadripartire	La quarta parte	¼
Quintuplicare	Il quintuplo (di)	5 x	Dividere per 5	La quinta parte	1/5
Sestuplicare	Il sestuplo (di)	6 x	Dividere per 6	La sesta parte	1/6
Moltiiplicare per 7	il multiplo di 7	7 x	Dividere per 7	La settima parte	1/7
Moltiplicare per 8	Il multiplo di 8	8 x	Dividere per 8	L'ottava parte	1/8
Moltiplicare per 9	Il multiplo di 9	---	Dividere per 9	La nona parte	1/9
---	----	n x	---	--	--
Moltiplicare per n	**Il multiplo di n** --	--	**Dividere per n (n≠0)**	**L'ennesima parte**	1/n **Un ennesimo**

0 1 2 ……… n (n + 1)

L'osservazione, la generalizzazione, la dimostrazione

➢ imparare a generalizzare

1
1+3 = 4
1+3+5 = 9
1+3+5+7 = 16
1+3+5+7+9 = 25
……
…..
…..

E così andando avanti nella successione dei dispari

1
4 = 1+3
9 = 1+3+5
25 = 1+3+5+7
36 = 1+3+5+7 +9
…..
…..
…..

E così andando avanti nella successione dei quadrati

L'osservazione, la generalizzazione, la dimostrazione

- **Imparare a formulare una congettura ed a dimostrarla**

1 = 1
1+3 = 4
1+3+5 = 9
1+3+5+7 = 16
1+3+5+7+9 = 25
……

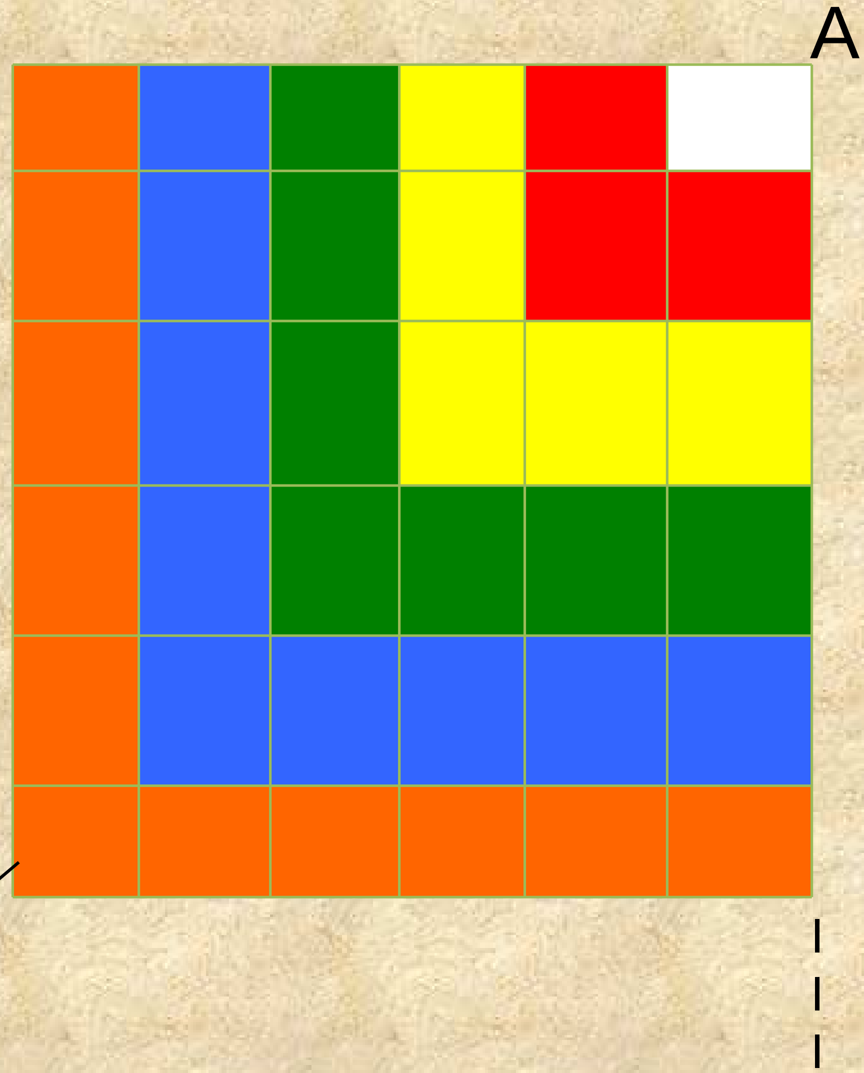
La somma dei primi n dispari è uguale al quadrato di n

1= 1
4 = 1+3
9 = 1+3+5
16 = 1+3+5+7
25 = 1+3+5+7
….

L'ennesimo numero naturale quadrato è uguale alla somma dei primi n dispari

Proposizione P(n) : la somma dei primi n numeri dispari è uguale al quadrato di n

Nella ~~ter~~minologia classica la configurazione ad L che aggiunta ad un quadrato di lato n genera un quadrato di lato n+1 si chiama **gnomone** (squadra, o anche ago/angolo della meridiana solare)



La risoluzione di problemi

La risoluzione dei problemi può presentare difficoltà perché comprende in sé aspetti distinti, uno di tipo logico-linguistico, l'altro di tipo operativo

1. **l'individuazione e connessione delle relazioni espresse dal testo**

2. **L'esecuzione delle operazioni per la determinazione dei dati intermedi e del risultato**

Nel progetto ArAl noi operiamo una separazione tra i due espetti focalizzando l'attenzione sul primo che è da noi considerato chiave

Questo ci ha portato a concepire la modifica della domanda nei testi di problemi, sostituendo il classico verbo 'calcola' con il verbo 'rappresenta'
ed a concepire lo slogan

Prima rappresenta, Poi risolvi

Il problem solving da un punto di vista relazionale

Rappresentare vs calcolare

In classe seconda ci sono 27 bambini, **15 sono maschi**
•Calcola quante sono le femmine

12

In classe seconda ci sono 27 alunni, **15 sono maschi**

•rappresenta quante sono le femmine

n.ro a. femmine = n. tot. alunni – n.ro a. maschi
F = 27-15

E se invece
il numero dei maschi fosse: 13; 20; 9; 22; 12 ecc

Il problem solving da un punto di vista relazionale

- Rappresentare vs calcolare

In classe seconda ci sono 27 bambini, **un certo numero** di bambini sono maschi
•rappresenta quante sono le femmine

Occorre negoziare la rappresentazione di un numero indeterminato mediante una lettera

n.ro femmine = n.ro tot. – n.ro maschi

n.ro femmine = 27 – m

legenda
f = n.ro femmine,
m = n.ro maschi

f = 27 – m

Appare la relazione funzionale tra le due quantità variabili

Il problem solving da un punto di vista relazionale

F = 27 – m

Esploriamo tutti i casi possibili ed indichiamo le condizioni per m

m	f
1	26
2	25
3	24
4	23
5	22
….	….
m	27-m
27-1	27

Il valore di m è un numero compreso tra 1 e 26

Si possono far rappresentare le coppie di numeri (m. 27-m) sul piano cartesiano 0(m. f)

Collegamento con le relazioni funzionali

- ***Sara ha tre caramelle più di Nora***
- ***Nora ha 3 caramelle meno di Sara***

n.ro caramelle di Nora 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ….. ….. ***n***.

n.ro caramelle di Sara 4 5 6 7 8 9 10 11 12 … ***n+3***…

n.ro caramelle di Sara = 3 + n.ro caramelle di Nora

Legenda
n = n.ro caramelle di Nora ;
s = n.ro caramelle di Sara

$s = n + 3$

ma anche
n.ro caramelle Nora = n. delle caramelle Sara - 3

$n = s - 3$
$s > 3$

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Nei **problemi** è importante esplicitare le **relazioni tra i dati in gioco**, combinarle ai fini della risoluzione del problema e poi procedere alla sostituzione dei valori numerici

Un esempio (P.L. Ferrari)

Nella biblioteca di classe c'erano 58 libri. La maestra ne ha comprati altri 12 e li ha portati in biblioteca, ne sono stati prestati 8. Di notte sono venuti i ladri e ne hanno rubati 17. Rappresenta quanti libri sono rimasti.

Relazioni

- **numero libri rimasti è dato da:**
  differenza tra numero libri in biblioteca e numero libri usciti dalla biblioteca
- **numero libri in biblioteca è dato da:**
  somma tra numero libri iniziali e numero libri acquistati
- **Numero libri usciti dalla biblioteca è dato da:**
  somma tra numero libri prestati e numero libri rubati

Dall'aritmetica procedurale alla aritmetica relazionale

Le relazioni si possono comporre ed Il procedimento risolutivo si può sintetizzare nella frase :

- **N.ro libri rimasti = n.ro libri iniziali + n.ro libri acquistati – (n.ro libri prestati + n.ro libri rubati)**

- **Più sinteticamente**
  n. libri rimasti = (n.libri iniziali + n. libri acquistati) – (n. libri prestati + n. libri rubati)

- **Ancora più sinteticamente**

n. rim = (n. iniz + n.acq.) – (n. pres. + n. rub)

- **Optimum: in formula inserendo la legenda**

r = numero libri rimasti;
i = numero libri iniziali ; a = numero libri acquistati;
p = numero libri prestati; b = numero libri rubati

$$r = (i+a) - (p+b)$$

Il risultato numerico si ottiene sostituendo il valor numerico di ciascuno dei dati

i = numero libri iniziali = 58

a = numero libri acquistati =12

p = numero libri prestati = 8

b = numero libri rubati = 17

Dalla formula **r = (i+a)-(p+b) per sostituzione si ha**

r = (58 +12) – (8 +17)

La formula **r = (i+a)-(p+b)**
è equivalente a **r = [(i+a) -p)] –b**
che riflette il percorso procedurale secondo la scansione dei tempi e delle azioni.
I bambini sperimentano una regolarità che legittimerà in seguito la seguente proprietà degli interi:

l'opposto di una somma è la somma degli opposti

La codifica formale deve essere una conquista spontanea dei bambini per contrazione delle rappresentazioni verbali dei dati nella esplicitazione del procedimento

I Vantaggi

•Comprendere la distinzione tra dati e valori numerici dei dati.

•Comprendere la generalità ed economicità della rappresentazione al variare dei dati numerici.

Questo aspetto viene potenziato dalla proposizione del gioco delle ipotesi

‘ ***… E se invece’***

Risolto un problema, si propone lo stesso testo con dati numerici variati.

Qui si possono porre le situazioni:

- E se invece i libri iniziali fossero stati 64?
- E se invece i libri rubati fossero stati 20?
- E se invece libri prestati fossero stati 12?
- E se invece i libri acquistati fossero stati 2?
- E se invece valgono assieme tutte queste condizioni ?

Questo aspetto viene potenziato dalla proposizione del gioco ‘ ***… E se invece’***

Si può ancora lavorare sul problema e procedere esplorando le condizioni di variabilità dei valori numerici dei dati per far comprendere al ragazzi che il problema ‘sta in piedi’ (ha senso) fino a quando è possibile eseguire la sottrazione tra numero libri nella biblioteca e numero libri fuori la biblioteca.

La condizione da esplicitare è

(i+a) è maggiore o al più uguale ad (p+b)

In formule

$$(i+a) \geq (p+b)$$

Queste esplorazioni fanno ‘toccare con mano’ ai bambini ***la valenza della formula di codifica del processo risolutivo del problema***

Lo studio di un problema additivo più complesso

In occasione del compleanno di Luigi La sua mamma, che è una brava pasticcera, decide di fargli la torta al cioccolato ed alle mandorle, che a lui piace tanto.
Per fare la torta servono 6 uova, 200 grammi di burro, 300 grammi di farina e altrettanto di zucchero, 200 grammi di cioccolato fondente e 300 gr di mandorle.
La mamma controlla nella dispensa è verifica che ha già quasi tutto, le mancano solo il cioccolato fondente e le mandorle. Va dal droghiere sotto casa e trova il cioccolato fondente in tavolette di 100 grammi e le mandorle in sacchetti da 160 grammi ciascuno. Una tavoletta di cioccolato costa 1 euro e 80 centesimi, un sacchetto di mandorle costa 3 euro e 20 centesimi.
La mamma non ha molto tempo per cercare altrove e decide di acquistare lì ciò che le manca per fare la torta. Quanto spende per l’acquisto?

Solitamente l'insegnante si attende la seguente soluzione, puramente procedurale:

$$2x\ 1{,}80 = 3{,}60$$

$$2x\ 3{,}20 = 6{,}40$$

$$3{,}60+6{,}40 = 10{,}00$$

Risultato: La mamma di Luigi spende dal droghiere 10 euro

Vediamo come l'insegnante può guidare gli allievi verso un modo relazionale di affrontare il problema dialogando con loro nella classe

Quanto spende per l’acquisto? Domande guida

I. ***Cosa compra la mamma dal droghiere?*** (Risp. attesa: La mamma acquista il cioccolato fondente, le mandorle)

I. ***La spesa della mamma cosa riguarda?*** (Risp. attesa. La spesa per l’acquisto del cioccolato fondente e quella delle mandorle)

II. ***Come stabiliamo la spesa del cioccolato?*** (risp. attesa: occorre confrontare la quantità del cioccolato che serve alla mamma e quello di una tavoletta)

III. ***Quanto cioccolato serve alla mamma? La quantità di una tavoletta è sufficiente? Quante tavolette di cioccolato deve comprare la mamma***? (risp. attesa: alla mamma servono 200 grammi di cioccolato perciò deve comprare due tavolette,

IV. ***Quanto spende la mamma per l’acquisto del cioccolato?*** (risp. attesa: la spesa per il cioccolato è il doppio del costo di una tavoletta)

V. ***Come stabiliamo il costo delle mandorle?*** (Risp. attesa occorre confrontare la quantità di mandorle da comprare con quella di un sacchetto …

Quanto spende per l'acquisto?

(… Alla mamma servono 300 grammi di mandorle, ogni sacchetto ne contiene più di 150 grammi, due sacchetti ne contengono più di 300 grammi e sono sufficienti. La spesa per le mandorle è il doppio del (è due volte il) costo di un sacchetto di mandorle

Risposta

La spesa totale fatta dalla mamma (per l'acquisto degli ingredienti mancanti per la torta) è data dalla somma tra il doppio del costo di una tavoletta di cioccolato fondente ed il doppio del costo di una bustina di mandorle.

Il piano operativo

il costo della tavoletta è 1 euro e 80 centesimi

Il costo di un sacchetto di mandorle è 3 euro e 20 centesimi

Nel linguaggio aritmetico la spesa totale in euro è espressa dal numero 2x1,80 + 2x3,20. Questa spesa si può rappresentare anche con l'espressione 2(1,80+3,20) che rappresenta il doppio del costo di una tavoletta e di una bustina di mandorle assieme. (In definitiva 10 euro.)

Dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico.

Per sintetizzare e comunicare più in fretta indichiamo con **c** il costo di una tavoletta di cioccolato, con **m** il costo di un sacchetto di mandorle, con **s** la spesa totale.

Introduciamo la legenda

s = spesa totale della mamma dal droghiere per la torta;

c = costo di una tavoletta di cioccolato;

m = costo di un sacchetto di mandorle.

La frase il linguaggio naturale con cui è espressa la risposta si rappresenta con la frase matematica **s = 2c+2m**

Dal linguaggio simbolico al verbale

Viceversa, nota la legenda, la frase simbolica **s = 2c +2m** si interpreta come '*la spesa totale della mamma dal droghiere per la torta è data dalla somma del doppio del costo di una tavoletta di cioccolato fondente e del doppio del costo di un sacchetto di mandorle*'.

Variazioni ed approfondimenti L'attività "E se invece …"

Dalla risoluzione di un problema alla posizione di nuovi problemi

La torta di compleanno di Luigi è venuta buonissima tanto che qualche tempo dopo la mamma decide di rifarla per degli amici. Al solito le mancano il cioccolato e le mandorle e torna dal droghiere sotto casa a comprarle. Le tavolette di cioccolato fondente e i sacchetti di mandorle costano sempre allo stesso modo ma la confezione dei sacchetti di mandorle è cambiata, adesso contengono solo 140 grammi di mandorle. Sulla base del caso precedente, puoi stabilire quanto spenderà questa volta la mamma di Luigi dal droghiere?.

Questa volta la mamma dovrà comprare 3 sacchetti di mandorle e non più 2. La formula $s = 2c + 2m$ si trasforma in $s = 2c+3m$. Sostituendo i corrispondenti valori numerici in c ed m si ottiene subito la nuova spesa della mamma.

Esplorazione di Relazioni funzionali

Individuazione di leggi di corrispondenza

Si promuove l'esplorazione di situazioni al fine di:

- individuare relazioni tra coppie di quantità variabili
- Esplicitare corrispondenze e tradurle in linguaggio formale

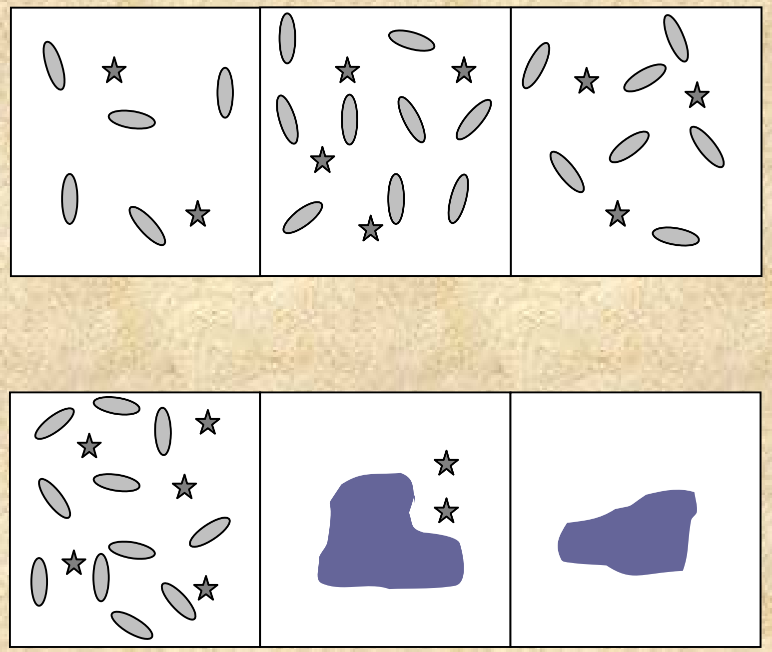
Si attivano forme di ***balbettio algebrico***

Esplorazione di Relazioni funzionali

La situazione: biscotti a colazione

A Clotilde piacciono i pan di stelle e i savoiardi.
Li mangia tutti i giorni dal lunedì al sabato, ogni volta in quantità diverse ma seguendo una regola che si è data.

lunedì marted i mercoledì



Giovedì venerdì sabato

Vi è un disegno della situazione con delle macchie di gelato così che
per i giorni di venerdì e sabato si vedono solo i pan di stelle consumati da Clotilde.

Esprimi a parole la regola seguita da Clotilde

Leggi espresse

a) Clotilde prende dai savoiardi lo stesso numero di stelle, lo moltiplica per 2 e aggiunge 1 (3/13)

a) Clotilde mangia un numero di savoiardi dispari e i pan di stelle da 1 a 5

c) I pan di stelle sono sempre uno in più

d) Un giorno mangia in quantità maggiore e uno in quantità minore

Esplorazione di Relazioni funzionali

Si apre la discussione e la classe concorda che la legge corretta è espressa dalla (a).

(a) Clotilde prende dai savoiardi lo stesso numero di stelle, lo moltiplica per 2 e aggiunge 1

L'insegnante chiede di scrivere la legge in modi che esprimano le relazioni tra i numeri corrispondenti

a_1) Il numero dei savoiardi è 1 in più del doppio del numero delle stelle.

(a_2) Il numero dei savoiardi è il doppio più 1 del numero delle stelle.

(a_3) Il numero delle stelle moltiplicato per 2, aggiungendo 1 è uguale al numero dei savoiardi.

L'insegnante invita a tradurre le frasi in linguaggio matematico

Esplorazione di Relazioni funzionali

Traduzioni degli allievi

(a) 1x2
(b) a+ 1 x 2   a = numero dei savoiardi
(c) sv + 1 x 2
(d) a x2 + 1
(e) sv + 1x 2 = a
(f) sv = st + 1 x 2
(g) a = b x 2 + 1
(h) a x 2 + 1 = b   a = num. pan di stelle
(i) (a – 1) x 2   (Silvia)

Si discute sulla correttezza delle scritture

«Silvia con 'a' voleva indicare il numero delle stelle, ma ha sbagliato perché deve scrivere diviso 2, cioè: (b – 1) : 2, lei ha fatto il ragionamento contrario»

Dopo un'analisi collettiva delle scritture, si sceglie:

b = a x 2 + 1

- Esplorazione di una situazione di proporzionalità
- Coordinamento di rappresentazioni verbali, algebriche e cartesiane

Esplorazione di Relazioni funzionali

La situazione fa parte di un percorso finalizzato a portare i ragazzi a comprendere che:

- Una stessa situazione può essere descritta in modi diversi a seconda del soggetto che si assume
- Le rappresentazioni verbali si prestano ad essere espresse in formule introducendo opportunamente lettere e simboli per indicare termini e operazioni coinvolti
- Lo scambio del soggetto si riflette nelle formule nello scambio degli operatori in gioco, nella rappresentazione cartesiana con lo scambio degli assi

Esplorazione di Relazioni funzionali

Per ogni scelta del soggetto

La rappresentazione cartesiana visualizza

- l'insieme di coppie costituenti la relazione

- La variazione congiunta delle due quantità/grandezze in gioco

Lo scambio del soggetto porta ad uno scambio degli assi del sistema di riferimento

Il problema

Giorgio e Mara sono compagni di giochi. Nel loro giornalino preferito distribuiscono figurine di fiori e di animali. Mara raccoglie le figurine dei fiori, Giorgio quelle degli animali. Decidono di scambiarsi le figurine che non raccolgono. Siccome le figurine di fiori sono più frequenti di quelle degli animali si accordano così: Giorgio darà a Mara 3 figurine dei fiori ogni volta che lei ne avrà da dargli due degli animali.

Rappresenta in una tabella i possibili numeri di figurine che Mara potrà ricevere da Giorgio e i numeri di quelle che darà in corrispondenza a Giorgio.

Che regolarità osservi?

Di quale proprietà godono i numeri di figurine che riceve Mara? E i numeri di quelle che riceve Giorgio?

Numero di figurine di Mara	Numero di figurine di
3	2
6	4
9	6
12	8
…	…
…	18
…	…

Numero di figurine di Mara	Numero di figurine di Giorgio
3	2
6	4
9	6
12	8
…	…
…	18
…	…

- Cerca di individuare ed **esprimere la relazione che c'è tra la quantità delle figurine di Mara e la quantità di figurine di Giorgio.**
- Indica con ***m*** il numero di figurine che Mara riceve, con ***g*** il numero di figurine che riceve Giorgio e **rappresenta algebricamente la relazione tra m e g**

una figurina di Giorgio equivale una e mezza di Mara. 6 = 4+2 che è 1 volta e mezza 4, 9= 6+3 ed è una volta e mezza 6, 12 = 8+4 ed è ancora una volta e mezza Il numero delle figurine di Mara è sempre uguale ad una volta e mezza il numero delle figurine di Giorgio.

Una volta e mezza è 1+1/2, 3 metà di uno, cioè 3volte ½.

Relazione: Num. Figurine Mara è 3/2 num. figurine di Giorgio.

In formula m = 3/2 g

Rappresenta algebricamente il numero delle figurine di Giorgio mediante il numero di quelle di Mara.

Per ogni 3 figurine di Mara Giorgio ne riceve 2.
2= 1+1 è due parti di 3= 1+1+1;
4= 2+2= 2x2 è 2 parti di 6= 2+2+2;
6= 3+3= 2x3 è 2 parti di 9=3+3+3;
8= 4+4=2x4 è 2 parti di 12= 4+4+4.
La relazione è che il numero delle figurine di Giorgio è sempre 2 parti di una quantità mentre il numero delle figurine di Mara è 3 parti questa quantità.
Chiamiamo q questa quantità
$g = 2q$ mentre $m = 3q$; $q = m/3$ allora
$g = 2q = 2(m/3) = (2/3)m$.
In sintesi

$$g = (2/3)m$$

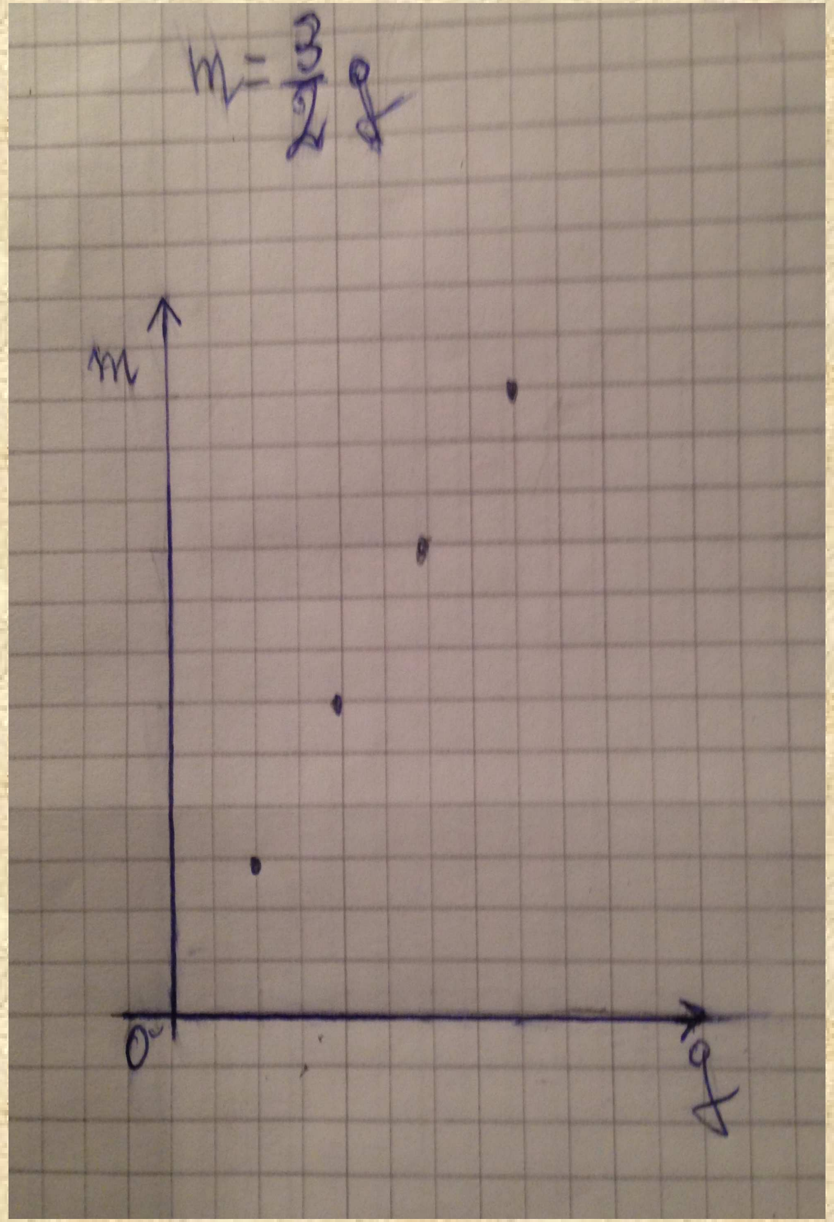
Che si legge
Il numero di figurine di Giorgio è i 2/3 della quantità delle figurine di Mara.

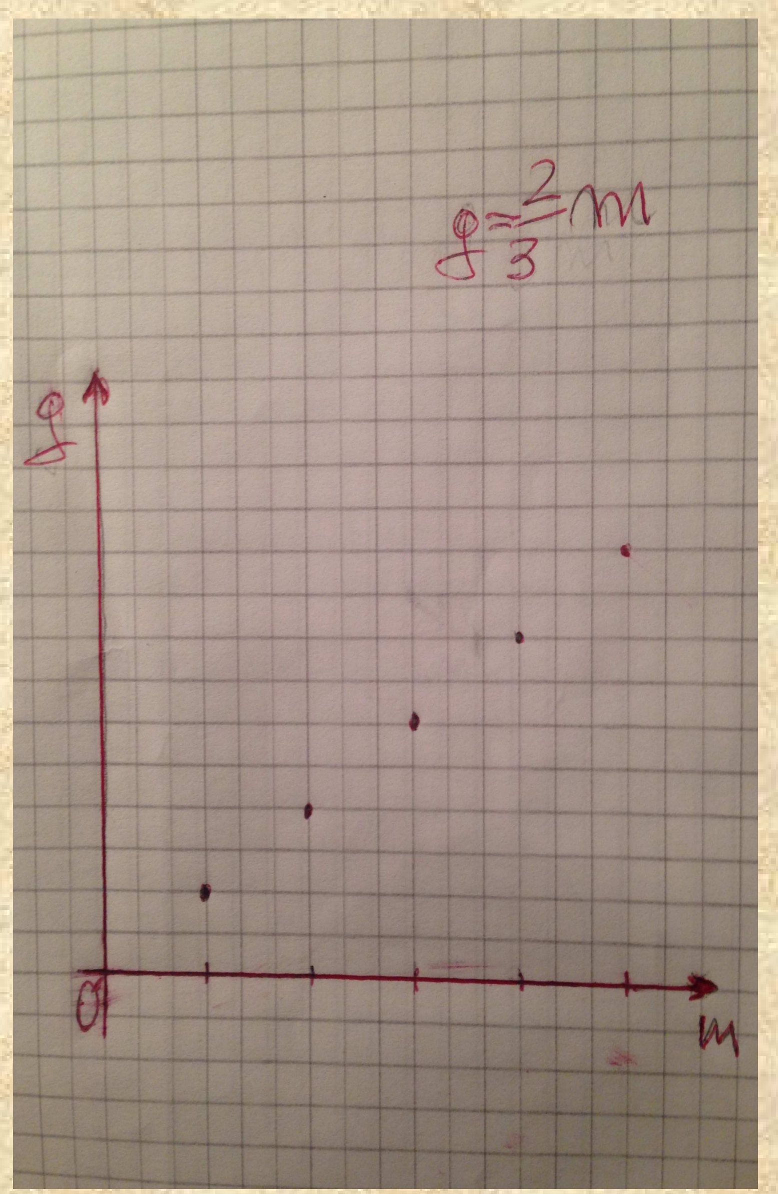
- Rappresenta sul piano cartesiano 0(g,m) la relazione
  m = (3/2)g
- Ossia
- Il numero delle figurine di Mara è i 3/2 del numero delle figurine di Giorgio

- Rappresenta sul piano cartesiano 0(m,g) la relazione
  g = (2/3)m

- **Confronta le due rappresentazioni**

Confronto delle due rappresentazioni





Confronto delle due relazioni sullo stesso piano cartesiano 0(x,y)

La formula

m = (3/2)g

Per sostituzione di

g in x   ed m in y

Si muta in

y = (3/2)x

La formula

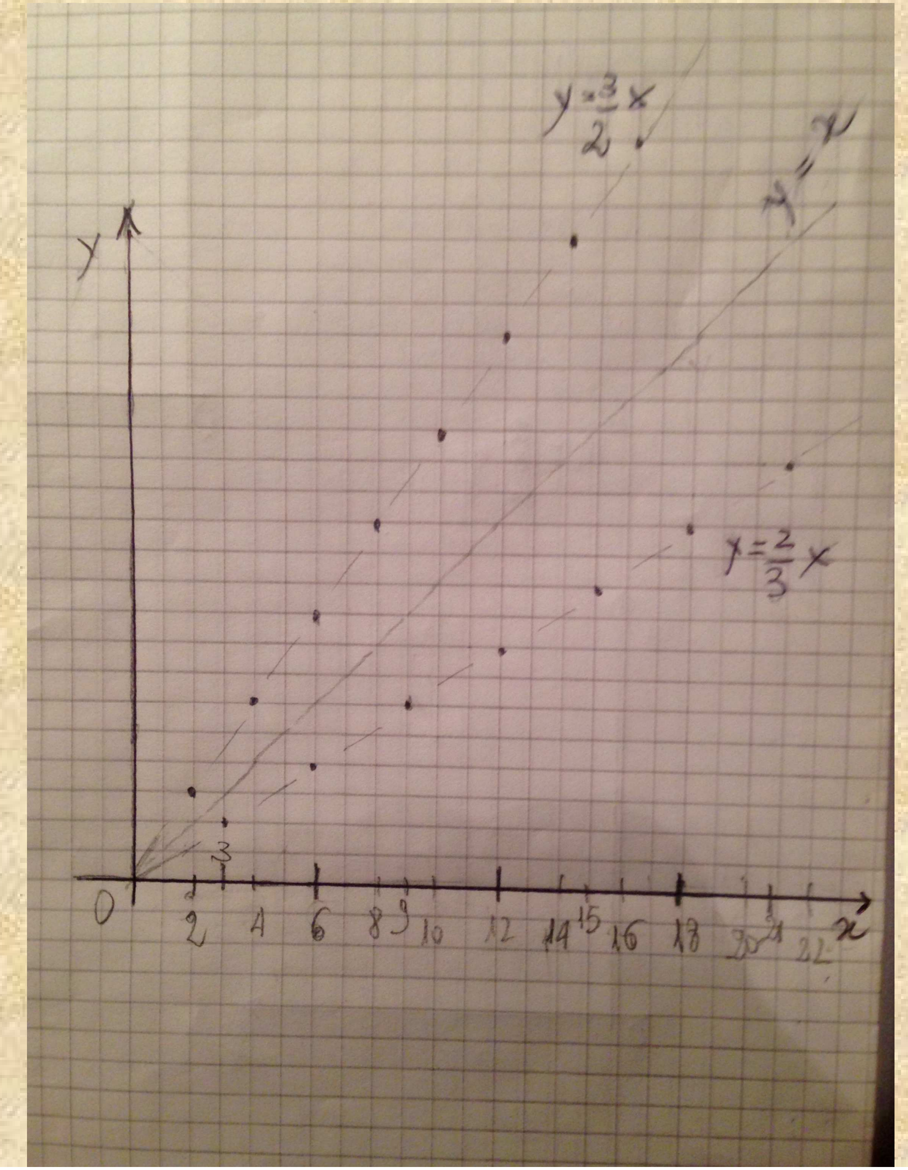
g = (2/3)m

Per sostituzione di

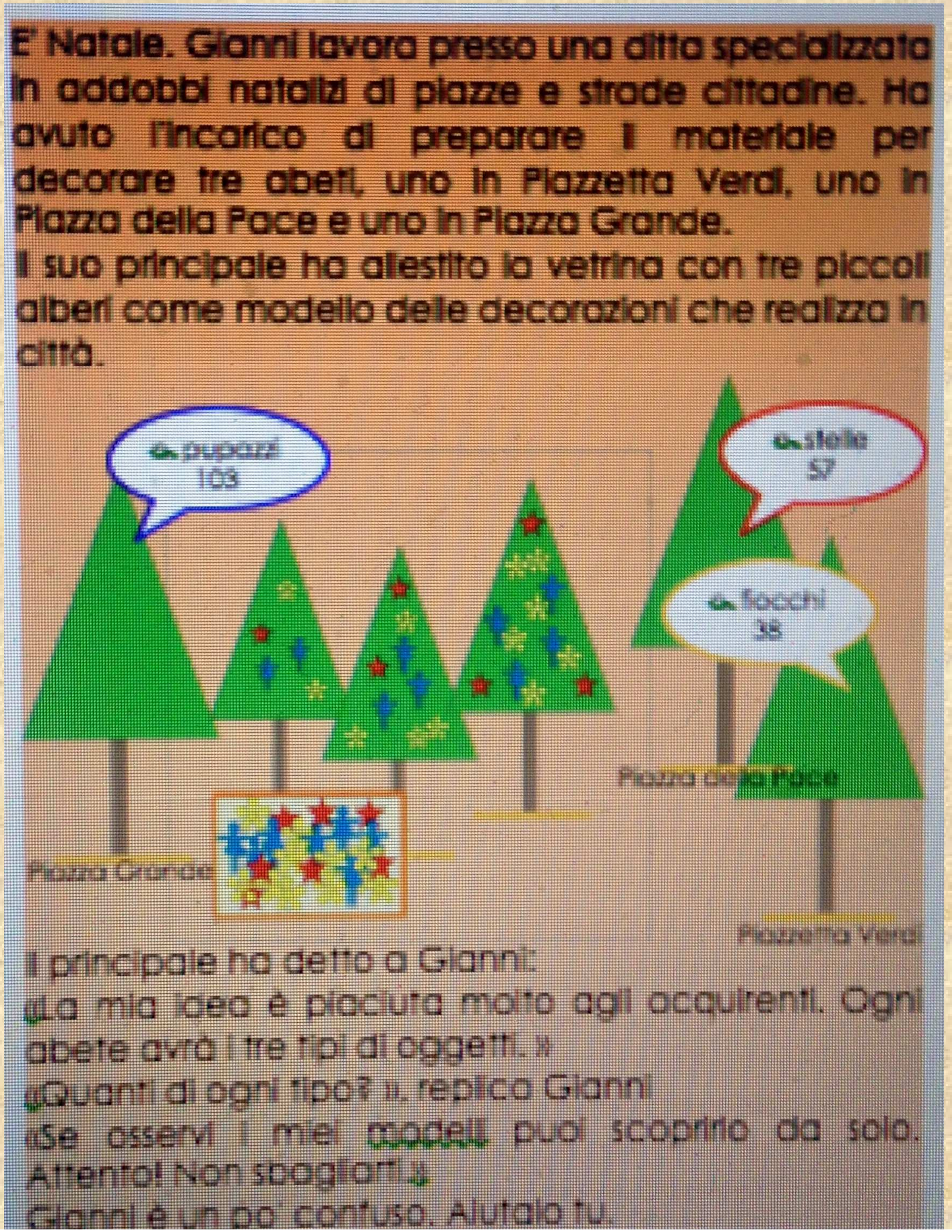
m in x e g in y

Si muta in

y = (2/3)x



Una situazione problematica da esplorare coinvolgente tre variabili


E' Natale. Gianni lavora presso una ditta specializzata in addobbi natalizi di piazze e strade cittadine. Ha avuto l'incarico di preparare il materiale per decorare tre abeti, uno in Piazzetta Verdi, uno in Piazza della Pace e uno in Piazza Grande.
Il suo principale ha allestito la vetrina con tre piccoli alberi come modello delle decorazioni che realizza in città.

Il principale ha detto a Gianni:
«La mia idea è piaciuta molto agli acquirenti. Ogni abete avrà i tre tipi di oggetti.»
«Quanti di ogni tipo?», replica Gianni
«Se osservi i miei modelli puoi scoprirlo da solo. Attento! Non sbagliarti.»
Gianni è un po' confuso. Aiutalo tu.

Una situazione aperta da esplorare in cui intervengono tre variabili .

Per rispondere alle domande poste gli allievi devono individuare le relazioni tra coppie di esse esprimendole verbalmente e formalmente.

Dalla tabulazione dei dati alla codifica delle relazioni

Numero fiocchi f	Numero pupazzi p	Numero stelle s
2	2	1
4	3	2
6	4	3
…	…..	…

Le relazioni

Il numero dei pupazzi è uno in più del numero di stelle $p = s+1$

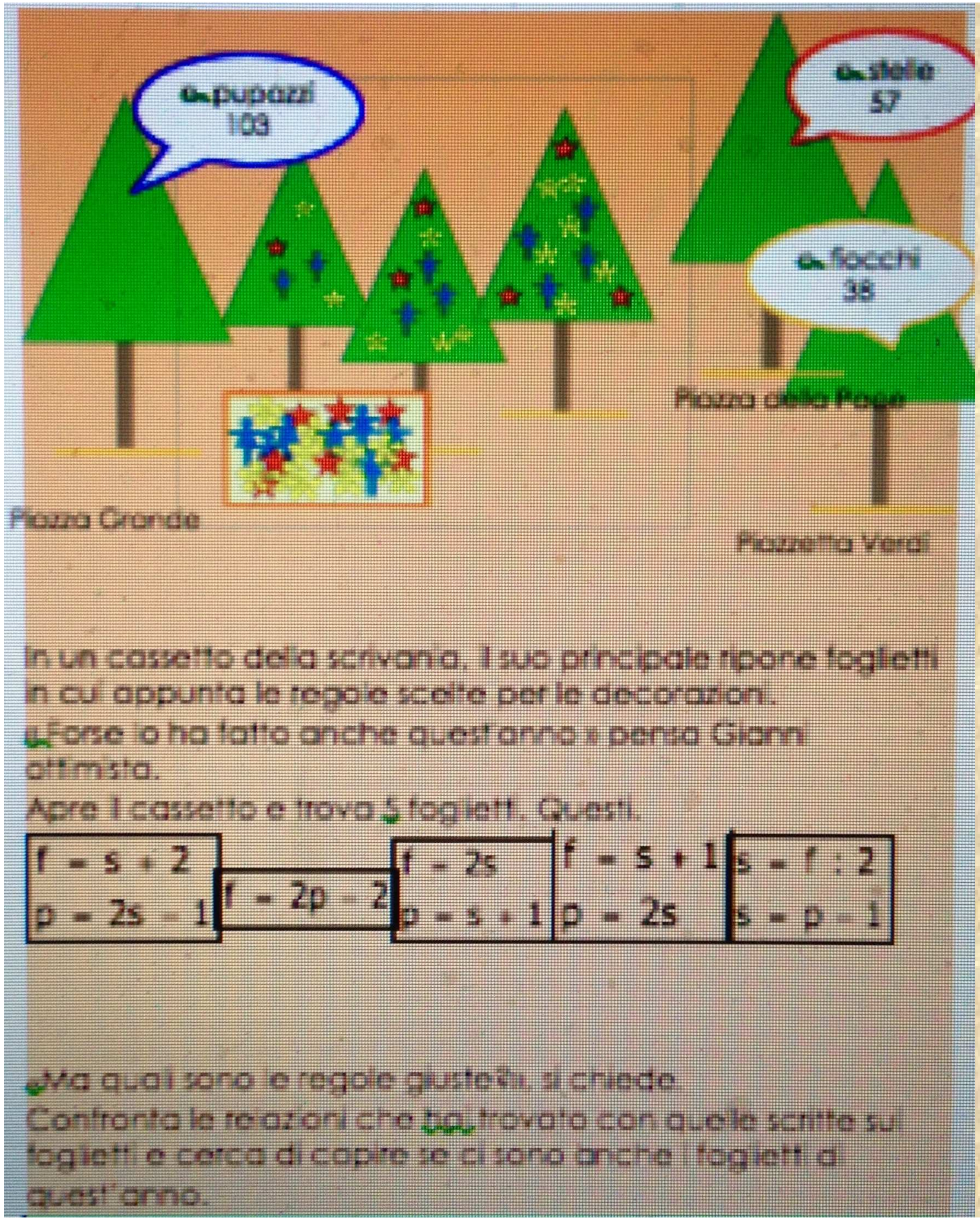
Il numero delle stelle è uno in meno del numero dei pupazzi $s = p-1$

Il numero dei fiocchi è il doppio del numero stelle $f = 2s$

Il numero delle stelle è uguale alla metà del numero dei fiocchi $s = f/2$

Da $f = 2s$ ed $s = p-1$ per sostituzione si ha $f = 2(p-1)$

Il numero dei fiocchi è il doppio dell'antecedente del numero delle stelle. Da $p = s+1$ ed $s = f/2$ si ha $p = f/2 +1$ osia il numero dei pupazzi è i in pù della metà del numero dei fiocchi



Si presenta una situazione in cui il focus è sulla interpretazione ed il confronto di scritture formali in relazione al fenomeno in esame

Relazioni funzionali

Attività meta sul confronto tra rappresentazioni

R. Sagittale : dinamica da dominio a codominio

R. Tabulare: statica da dominio a codominio

R. Verbale : a) procedurale dinamica ; b) relazionale statica

R. Algebrica: statica con focus sul codominio

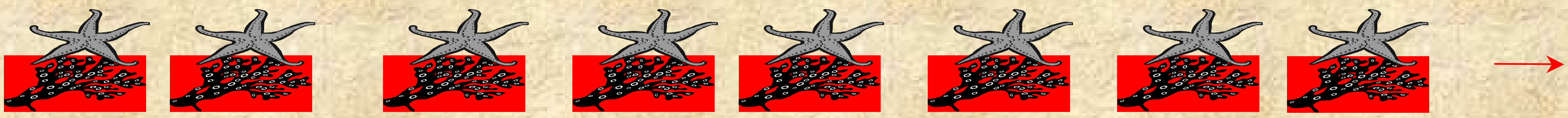
R. Cartesiana: **statica** da dominio a codominio

Importanza della rappresentazione simultanea di coppie di relazioni funzionali una inversa dell'altra

- **La questione del cambio di riferimento**

Verso le successioni

Nella Grande Barriera corallina la vita è molto intensa. Vi si incontra ogni tipo di animale: spugne, meduse, polipi, pesci multicolori. Intorno nuotano murene e squali.
Nella barriera vive una famiglia numerosissima di stelle marine, ognuna delle quali si trova attaccata ad un corallo



Quando c'è la luna nuova le stelle marine si spostano con i loro pedicelli e cambiano corallo seguendo un'antichissima regola, vediamo di scoprirla osservando come si spostano le stelle che occupano le prime posizioni:

- **Alessia, che sta nel primo corallo, va al corallo n° 3**
- **Loretta, che sta nel secondo corallo va al corallo n° 5**
- **Lucia, che sta nel terzo corallo va al corallo n° 7**
- **Patrizia che sta nel quarto corallo va al corallo n° 9**
- **Elena, che sta nel quinto corallo va al corallo n°11**

Nel corallo n° 78 si trova Valeria: in quale corallo si sposterà?
La stella al 459° posto a quale corallo si attaccherà?
Argomenta le risposte.

n	C (n)
1	3
2	5
3	7
4	9
5 …	11 ….

Occorre rappresentare i numeri delle nuove case mediante quelli delle case di provenienza

n	C(n)
1	3 = 1+2
2	5 = 2 +3
3	7 = 3+4
4	9 = 4 + 5
5 …	11 = 5 + 6 …
n	

Dal confronto delle varie rappresentazioni numeriche si individuano quelle inquadrabili in uno stesso schema

Questo porta alla individuazione di un modello algebrico della corrispondenza C(n) = n + (n+1) di valenza generale. Il modello consente di ottenere immediatamente il numero del nuovo corallo in cui una stella si accasa noto il suo vecchio numero, o viceversa risalire al numero di provenienza noto quello del nuovo corallo.

Successioni come funzioni

esplorazione di successioni

Data la sequenza 5, 7, 9, 11, 13, 15, …

Studiarla per individuare una legge generale di corrispondenza

Di fronte ad un tale compito gli allievi riconoscono quasi subito che un termine ed il successivo differiscono di 2 unità ma hanno difficoltà ad individuare una relazione di corrispondenza generale tra numero d’ordine e termine per i vari elementi della sequenza

Occorre esprimere la corrispondenza tra

‘numero di posto - numero che figura nel posto’

esplorazione di successioni

Per avviare l'indagine conviene chiedere loro di:

Studiare la corrispondenza

<posto- termine che vi figura>

nel nostro caso:

$1 \rightarrow 5$;

$2 \rightarrow 7$;

$3 \rightarrow 9$;

$4 \rightarrow 11$;

$5 \rightarrow 13$;

$6 \rightarrow 15$, …

cercando di esprimere in più modi ciascun termine della sequenza mediante (in funzione di) Il numero di posto ed indagare se vi siano rappresentazioni analoghe

esplorazione di successioni

Si tratta di rappresentare:

- 5 in funzione di 1 (o di 2) ;
- 7 in funzione di 2 (o di 3) ;
- 9 in funzione di 3 (o di 4) ;
- 11 in funzione di 4 (o di 5), ecc.

Gli allievi se educati a rappresentare un numero naturale in più modi potranno scrivere varie rappre-sentazioni di ciascun termine della successione e cercare di individuare analogie strutturali tra esse

Per poter condividere ciò che si è prodotto occorrerà che ciascun allievo si dia dei criteri di raccolta delle diverse espressioni trovate

questo processo di organizzazione delle scritture renderà evidenti anche le analogie ed i legami tra le rappresentazioni

esplorazione di successioni

una organizzazione come questa:

5 = 2+3 = 1+2x2 = 2x3-1
7 = 4+3 = 1 +3x2 = 2x4-1
9 = 6+3 = 1+4x2 = 2x5-1
11 = 8+3 = 1+5x2 = 2x6-1
13 = 10+3 = 1 +6x2 = 2x6-1
15 = 12+3 = 1 +7x2 = 2x8-1

renderà evidente, in vari modi, il legame tra le coppie corrispondenti

Basterà chiedere di individuare nei vari termini

- ciò che varia
- ciò che rimane costante

Per indurre una riflessione sui legami tra

•numero di posto - numero che lo occupa

esplorazione di successioni

Prendendo in esame le scritture

$1 \rightarrow 5 = 2+3$
$2 \rightarrow 7 = 4+3$
$3 \rightarrow 9 = 6+3$
$4 \rightarrow 11 = 8+3$
$5 \rightarrow 13 = 10+3$
$6 \rightarrow 15 = 12+3$

si osserva

- l'invarianza dell'addendo 3
- la variabilità delll ' altro addendo e la sua relazione con il numero di posto: tale addendo è sempre il doppio del numero di posto.

La corrispondenza si evidenzia come: numero di posto → somma tra il doppio del numero di posto e 3

Gli allievi andranno guidati a

1)la generalizzazione della regolarità, l'introduzione **della lettera n come nome del generico numero di posto** e la rappresentazione della corrispondenza: $n \rightarrow 2 \cdot n+3$.

2) la rappresentazione verbale del termine corrispondente al post ennesimo, **l'introduzione della sua denominazione abbreviata t(n)** e la traduzione formale della corrispondenza: **$t(n) = 2n+3$**

esplorazione di successioni

$1 \rightarrow 1 + 2 \cdot 2$

$2 \rightarrow 1 + 3 \cdot 2$

$3 \rightarrow 1 + 4 \cdot 2$

$4 \rightarrow 1 + 5 \cdot 2$

$5 \rightarrow 1 + 6 \cdot 2$

$6 \rightarrow 1 + 7 \cdot 2$

Si osserva che quello che varia è il primo fattore dell'addendo pari che è il successivo del numero di posto
Indicando con n il generico numero di posto la corrispondenza si rappresenta in generale: $n \rightarrow 2 \cdot (n+1)+1$

Gli allievi andranno invitati a formulare verbalmente la legge di corrispondenza prendendo come soggetto il termine di posto ennesimo e ci curerà il passaggio ad una formulazione relazionale che tenga conto dei legami con il numero di posto espressi dalla formula: "**il termine di posto ennesimo è il successivo del doppio del successivo del numero di posto**".
L'introduzione della denominazione abbreviata t(n) per 'termine di posto ennesimo' porta alla codifica formale della corrispondenza: $\mathbf{t(n) = 2(n+1)+1}$

esplorazione di successioni

Analogamente prendendo in esame le scritture

$1 \rightarrow 2{\cdot}3-1$
$2 \rightarrow 2{\cdot}4-1$
$3 \rightarrow 2{\cdot}5-1$
$4 \rightarrow 2{\cdot}6-1$
$5 \rightarrow 2{\cdot}7-1$

si osserva che ciò che varia è sempre il secondo fattore dell'addendo pari, ma questa volta è dato da: il numero di posto + 2. Indicando con n il generico numero di posto la corrispondenza si codifica in : $n \rightarrow 2{\cdot}(n+2)-1$

Anche in questo caso gli allievi andranno invitati a formulare verbalmente la legge di corrispondenza prendendo come soggetto il termine di posto ennesimo posto, si giungerà ad un enunciato tipo: "**il termine di posto ennesimo è l'antecedente del doppio del successivo pari del numero di posto**".

L'introduzione della denominazione abbreviata t(n) per 'termine di posto ennesimo' porta alla codifica formale della corrispondenza: **$t(n) = 2(n+2)-1$**

esplorazione di successioni

Si faranno riflettere gli allievi su quali siano le proprietà delle operazioni aritmetiche che garantiscono che le tre scritture

$$n \to 2 \cdot n + 3$$

$$n \to 2 \cdot (n+1) + 1$$

$$n \to 2 \cdot (n+2) - 1$$

rappresentino, qualunque sia n, lo stesso numero naturale

In questo caso le proprietà

- distributiva
- associativa

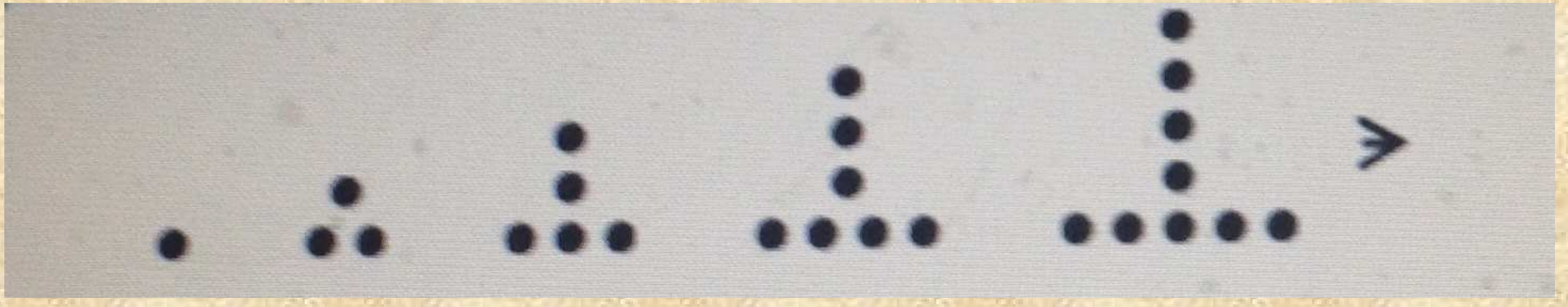
Un filone molto interessante e attraente per gli allievi è lo studio delle successioni figurali, costituite da un pattern che si ripete con regolarità

Gli aspetti geometrici del pattern e le eventuali simmetrie che presenta portano gli allievi a visualizzare particolari modi di determinare il conteggio degli elementi che lo compongono (perle, mattoncini, stecchini, etc), visualizzazioni diverse portano a modi diversi di rappresentare algebricamente la corrispondenza posto – termine ed a giustificarne l'equivalenza

Unità 12 Progetto ArAl

Successioni come funzioni: loro esplorazioni attraverso differenti registri di rappresentazione

Nella barriera corallina le ostriche hanno deciso di vendere le loro perle. Hanno organizzato una grande mostra e Nonna Ostrica, per invogliare i clienti ad acquistare le perle, ha consigliato di disporle in questo modo



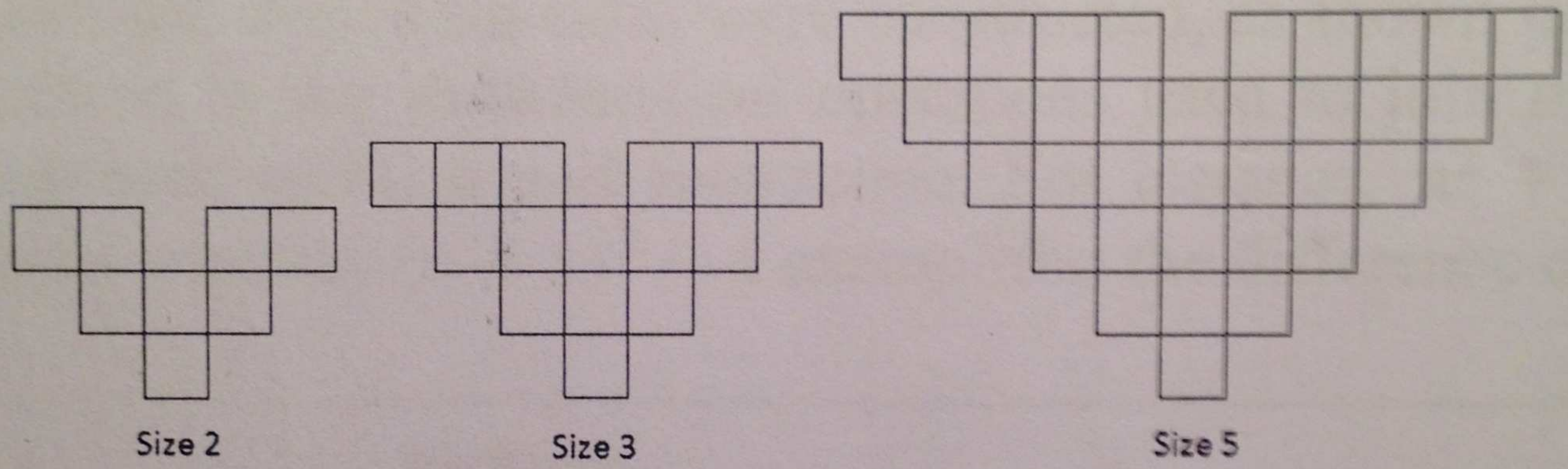
1) *Quante perle ci saranno nella 6a figura? Argomenta la soluzione*
2) *Quante perle ci saranno nella 74a figura? Rappresenta la situazione in linguaggio matematico*
3) *In quale posizione si trova la figura con 125 perle? Rappresenta la situazione in linguaggio matematico*
4) *Scrivi una legge generale che permetta di trovare il numero delle perle all'ennesimo posto*

esplorazione di successioni

Chua, B.L., Hoyles, C. (2014), Modalities of rules and generalizing strategies of year 8 students for a quadratic pattern, *Proceedings PME 38*, Vancouver, Canada

Tony used identical square tiles to create flower designs of different sizes for his art project.

The diagrams below show two flower designs he made.



As the size number became larger, more square tiles were used.

Tony wanted to find the number of square tiles he had to use to make any size.

He used a rule to find this number.

Figure 1. Tulips

esplorazione di successioni

Gli studenti asiatici hanno rappresentato la successione in nove modi differenti

Rule type	S	W	SW	Rule type	S	W	SW
	Rule Modality				Rule Modality		
$n(n+2)$	40	5	5	$n(2n+1)-n(n-1)$	1		1
n^2+2n	22	1	2	$(2n+1)(n+1)-n(n+1)-1$	1		
$n+n(n+1)$, $n+(n^2+n)$, $n+\frac{2n(n+1)}{2}$	8		1	$(n^2-1)+(n+1)+n$	1		
$3n+n(n-1)$	2	1		$n+2[n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1]$			1
$(n+1)^2-1$	1						

Table 1. Rules and their modalities

E’ molto interessante risalire dalle formule alle visualizzazioni ed ai tipi di conteggio che le hanno ispirate

MALARA, N.A., 2003, L’esplorazione di situazioni come modalità da privilegiare sin dalla scuola primaria per dare significato allo studio dell’algebra, in D’Amore, B. (a cura di) *La didattica della Matematica in aula*, Pitagora, Bologna, 71-86