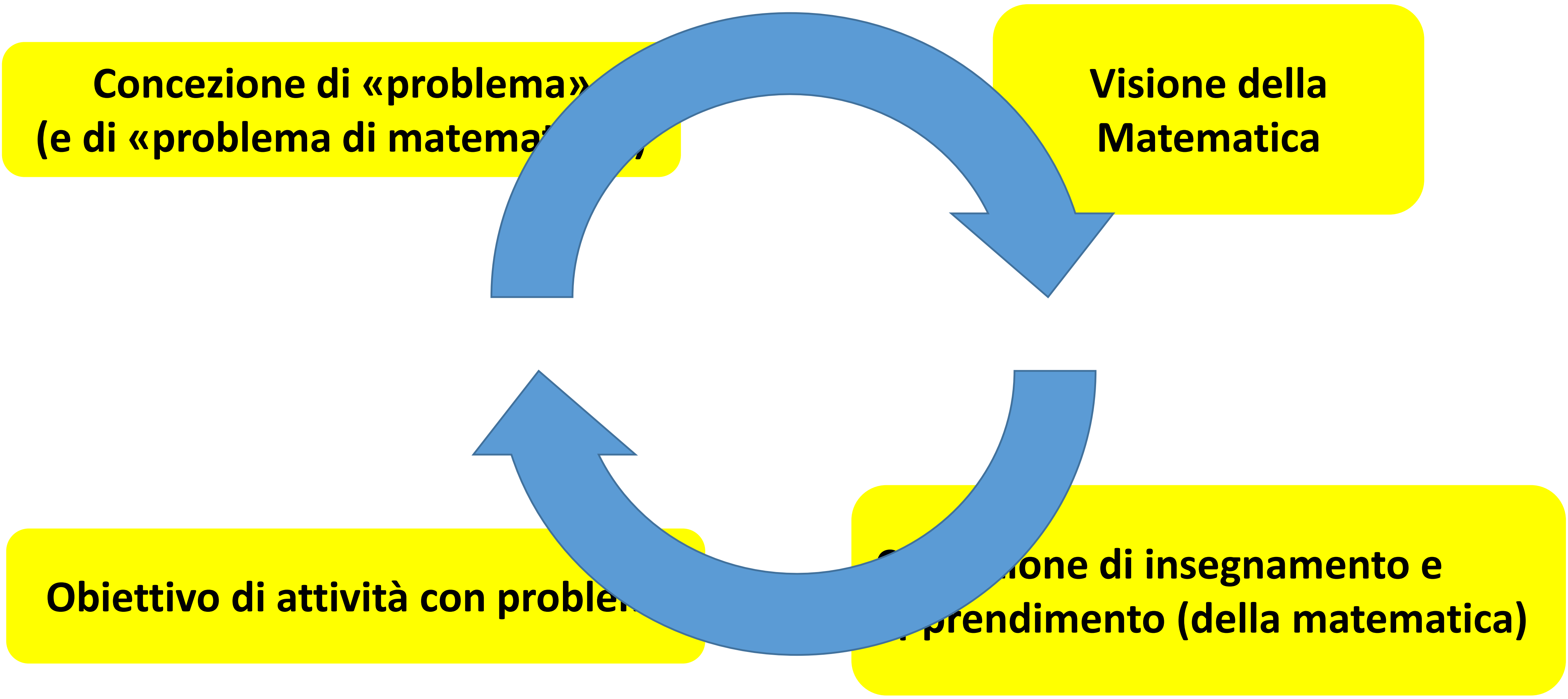
Mathesis, Pavia, 27 aprile 2017

# "Problemi di matematica: ma se non gli diciamo prima come fare.....!"

Samuele Antonini

Dipartimento di Matematica «F. Casorati»

Università di Pavia

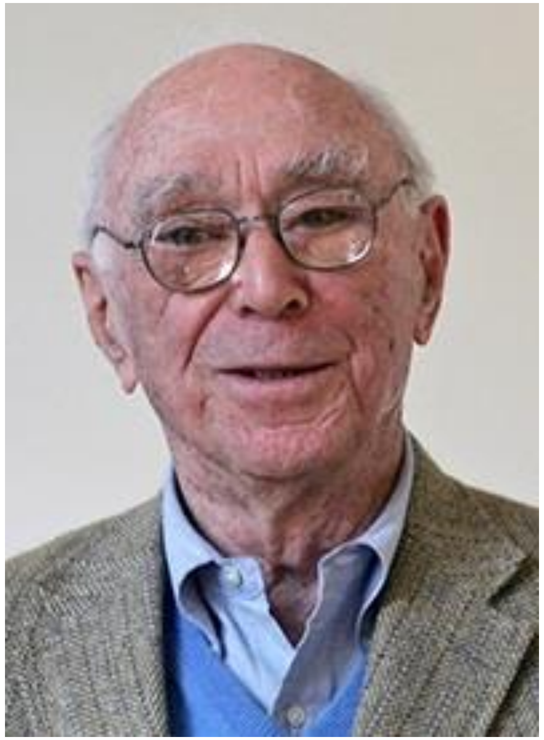

Concezione di «problema»
(e di «problema di matema
Visione della Matematica
Obiettivo di attività con proble
ione di insegnamento e
prendimento (della matematica)

Concezione di «problema»
(e di «problema di matematica»)

Visione della
Matematica

Obiettivo di attività con problemi

**Concezione di insegnamento e apprendimento (della matematica)**



Jerome Bruner (1915-2016)

*C'è un problema che non ci abbandona mai quando ci occupiamo di insegnamento e di apprendimento, un problema così onnipresente, così costante, che fa così parte del tessuto della vita che spesso non lo notiamo, non riusciamo nemmeno a scoprirlo – come il pesce che «è sempre l'ultimo a scoprire l'acqua». Ed è il problema di come avviene l'incontro fra due menti, che l'insegnante esprime chiedendosi: «Come faccio ad arrivare ai bambini?» e i bambini: «Dove sta cercando di arrivare?».*
*(Bruner, CdE, p. 58)*

*Le nostre interazioni con gli altri sono profondamente influenzate dalle teorie intuitive correnti sul funzionamento della mente degli altri (p.58)*

Teorie ingenue, raramente esplicitate, «psicologia popolare»

*Le psicologie popolari riflettono certe tendenze umane radicate (come la tendenza a ritenere che la gente normalmente abbia il controllo delle proprie azioni), ma riflettono anche alcune profonde convinzioni culturali riguardo alla «mente». La psicologia popolare non si occupa solo di come lavora la mente qui e adesso, ma dispone anche di nozioni su come impara la mente infantile e perfino su cosa la fa crescere. (p. 59)*

*L'insegnamento, insomma, ha alla sua base inevitabilmente delle idee sulla natura delle mente del discente. Le convinzioni e gli assunti sull'insegnamento, in una scuola o in qualsiasi altro contesto, sono un riflesso diretto delle convinzioni e degli assunti del docente riguardo all'allievo* (p. 59)

Importante esplorare i modi più generali di concepire tradizionalmente la mente di chi apprende e le metodologie che conseguono

*Le varie pedagogie popolari, per esempio, riflettono una varietà di assunti sui bambini: possono essere visti come dei testardi che devono essere corretti; degli innocenti che vanno protetti da una società volgare; degli individui che hanno bisogno di imparare delle abilità che possono essere sviluppate solo attraverso la pratica; dei recipienti vuoti da riempire di conoscenze che solo gli adulti possono fornire; degli essere egocentrici che devono essere socializzati.*
*[…]*
*.. queste concezioni, che siano o meno «giuste», possono avere un impatto enorme sulle attività di insegnamento.*
*(Bruner, CdE, p. 62)*

*Diversi approcci all'apprendimento e diverse forme di istruzione – dall'imitazione, all'istruzione, alla scoperta, alla collaborazione – riflettono convinzioni e assunti diversi riguardo al discente (p. 62).*

**Modelli della mente e modelli di pedagogia (di teorici dell’educazione, insegnanti e studenti)**

I bambini apprendono per imitazione: l’acquisizione di know-how

I bambini imparano dall’esposizione didattica: l’acquisizione di conoscenza proposizionale

I bambini come pensatori: lo sviluppo dello scambio intersoggettivo

I bambini come soggetti intelligenti. La gestione della conoscenza obiettiva

# I bambini apprendono per imitazione: l’acquisizione di know-how

Adulto mostra una azione o un modello di azione a un bambino

convinzione

a) Il bambino non sappia fare x
b) Il bambino possa imparare a fare x se gli viene mostrato

L’atto di fornire un modello presuppone anche

c) Il bambino voglia fare x
d) Forse sta proprio cercando di fare x

# I bambini apprendono per imitazione: l’acquisizione di know-how

Base dell’apprendistato: il novizio adotta i comportamenti degli esperti

*L’esperto cerca di trasmettere un’abilità che ha acquisito con una lunga pratica a un novizio che a sua volta per riuscire deve esercitarsi nell’azione dimostrata.*

Poca distinzione tra conoscenza procedurale (sapere come)
e conoscenza proposizionale (sapere che)

# I bambini apprendono per imitazione: l’acquisizione di know-how

assunti

E’ possibile insegnare mostrando – è possibile imparare imitando

La proposta di modelli e l’imitazione rendono possibile l’accumulazione di una conoscenza culturalmente rilevante e la trasmissione della cultura da una generazione alla successiva

La competenza deriva solo dalla pratica. Consiste di talento, perizia e abilità più che di conoscenza e comprensione.

# I bambini apprendono per imitazione: l'acquisizione di know-how

# MA

*[…] dimostrare semplicemente «come si fa» e offrire la possibilità di fare pratica non è sufficiente.*
*Gli studi condotti sulla perizia hanno dimostrato che imparare ad eseguire qualcosa con abilità non porta alla stessa combinazione di maestria e flessibilità che si ottiene attraverso un apprendimento che unisce alla pratica la spiegazione concettuale. (p. 67)*

Teoria dell'apprendimento di tipo imitativo NON adatta per una società avanzata

# I bambini imparano dall’esposizione didattica: l’acquisizione di conoscenza proposizionale

Presentazione agli allievi di fatti, principi e regole di azione che devono essere imparati, ricordati, applicati.

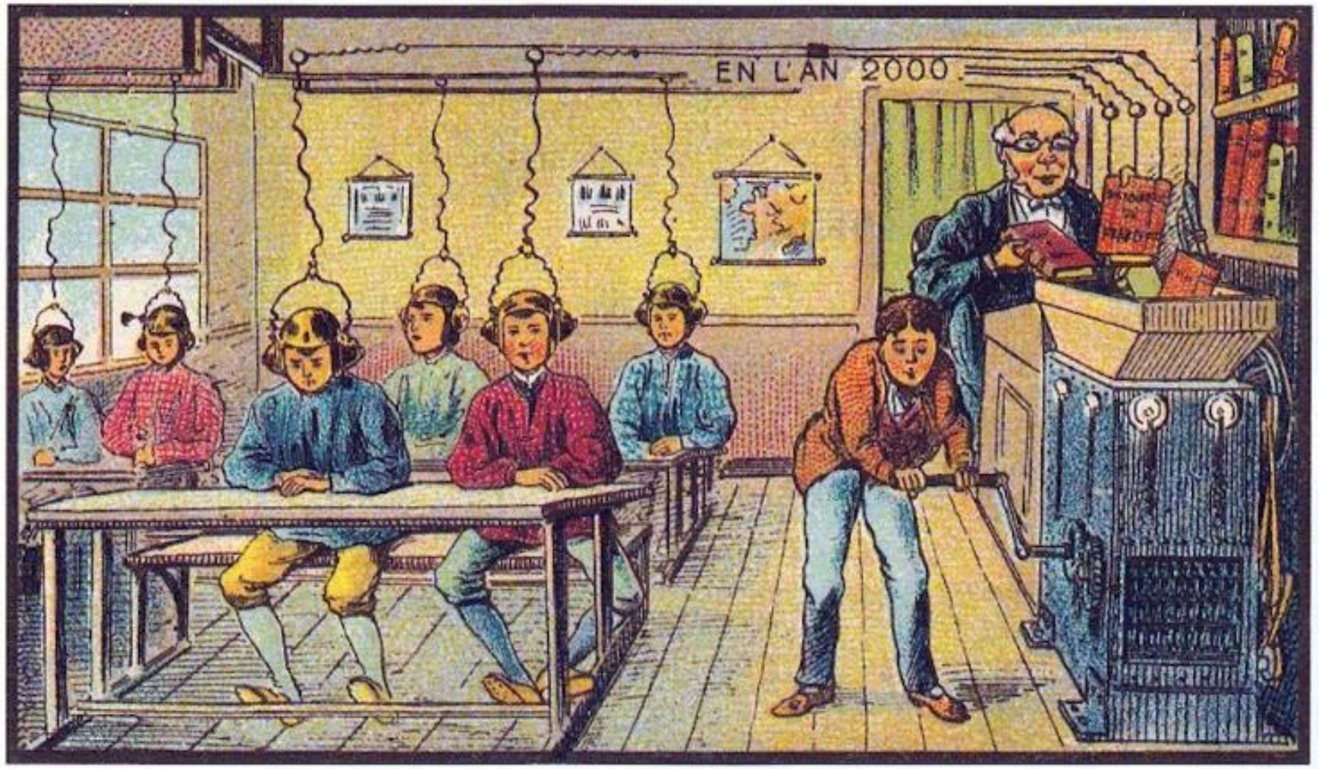
| | |
|---|---|
| Presupposti | L’allievo è all’oscuro di fatti, regole o principi che si trovano invece nella mente degli insegnanti oltre che nei libri, carte geografiche, ecc. e che può essere trasmesso<br><br>La conoscenza deve essere semplicemente «ascoltata», «consultata». |

# I bambini imparano dall'esposizione didattica: l'acquisizione di conoscenza proposizionale

*Questa visione presume che la mente di chi apprende sia una* tabula rasa*. Le conoscenze che vengono trasmesse nella mente vengono considerate cumulative, una sorta di costruzione progressiva in cui le conoscenze si sommano via via alle precedenti. Più importante ancora in questa concezione è l'assunto che la mente del bambino sia passiva, sia un ricettacolo che aspetta di essere riempito. L'interpretazione attiva, la ricostruzione, non rientrano in questo quadro. La tendenza didattica vede il bambino o la bambina dall'esterno, dalla prospettiva di una terza persona, piuttosto che cercare di «entrare nei loro pensieri». E' totalmente a senso unico. L'insegnamento non è un dialogo, ma il racconto fatto da uno all'altro. (pp. 68-69)*

# Una rappresentazione…

Tra il 1899 e il 1910 l'artista e illustratore francese Jean-Marc Côté produsse con alcuni suoi colleghi una serie di illustrazioni – dal titolo *En l'an 2000* – che immaginavano la vita nel futuro, e in particolare nell'anno 2000.




At School

# Un esempio…

## Da un sito con consigli per studenti di superiori….

**Come risolvere un problema di geometria o aritmetica**

La geometria sono due materie di studio che vengono impartite ai ragazzi fin dalle **scuola elementare**, per consentire loro **sin** dalla più **giovane età** di abituare la mente ai **meccanismi della matematica** e, ove ci sia terreno fertile, a potersi appassionare ad essa. Le **operazioni di base**, nonchè le formule e le figure geometriche, costituiscono i punti tramite i quali si possono risolvere i problemi che verranno poi assegnati ai ragazzi. Si tratta di esercizi che servono ad allenare il ragionamento e ad effettuare dei calcoli matematici, i quali comunque sia, sono fondamentali anche nella vita di tutti i giorni. La guida ci condurrà alla scoperta di come si può risolvere un problema **di geometria o aritmetica** senza **grandi difficoltà**, applicandoci e seguendo delle **precise regole**.
(grassetto originale)

# Un esempio…

**Da un sito con consigli per studenti di superiori….**

**1.**
Bisognerà iniziare leggendo e rileggendo la traccia del problema, al fine di trovare tutti i dati (anche quelli nascosti) che esso ci offre, mettendoli in ordine affinché siano disposti in modo chiaro e comprensibile. Qualora dovessimo trovare la soluzione di un **problema di aritmetica**, verifichiamo di aver scritto correttamente tutti i termini e soprattutto verifichiamo che le parentesi tra le varie operazioni siano ben disposte, rendendo chiara anche la disposizione dei termini, onde evitare **eventuali errori di calcolo** e di segno che comprometterebbero il **risultato finale**.

(grassetto originale)

# Un esempio…

**Da un sito con consigli per studenti di superiori….**

**2.**
Ricordiamo che la **matematica** è fatta di **formule** e che quindi ogni problema comporterà l'applicazione di dette formule. Se non abbiamo individuato quali regole applicare, consultiamo il **libro di testo** e studiamo le formule da usare nel problema. Se non sappiamo quali formule vanno applicate, studiamo qualche esempio di esercizio già svolto ed inerente all'argomento che stiamo trattando, presente sicuramente nel libro di testo. Se invece stiamo per risolvere un **problema di geometria**, provvediamo a disegnare la figura in bella copia.

(grassetto originale)

# Un esempio…

**Da un sito con consigli per studenti di superiori….**

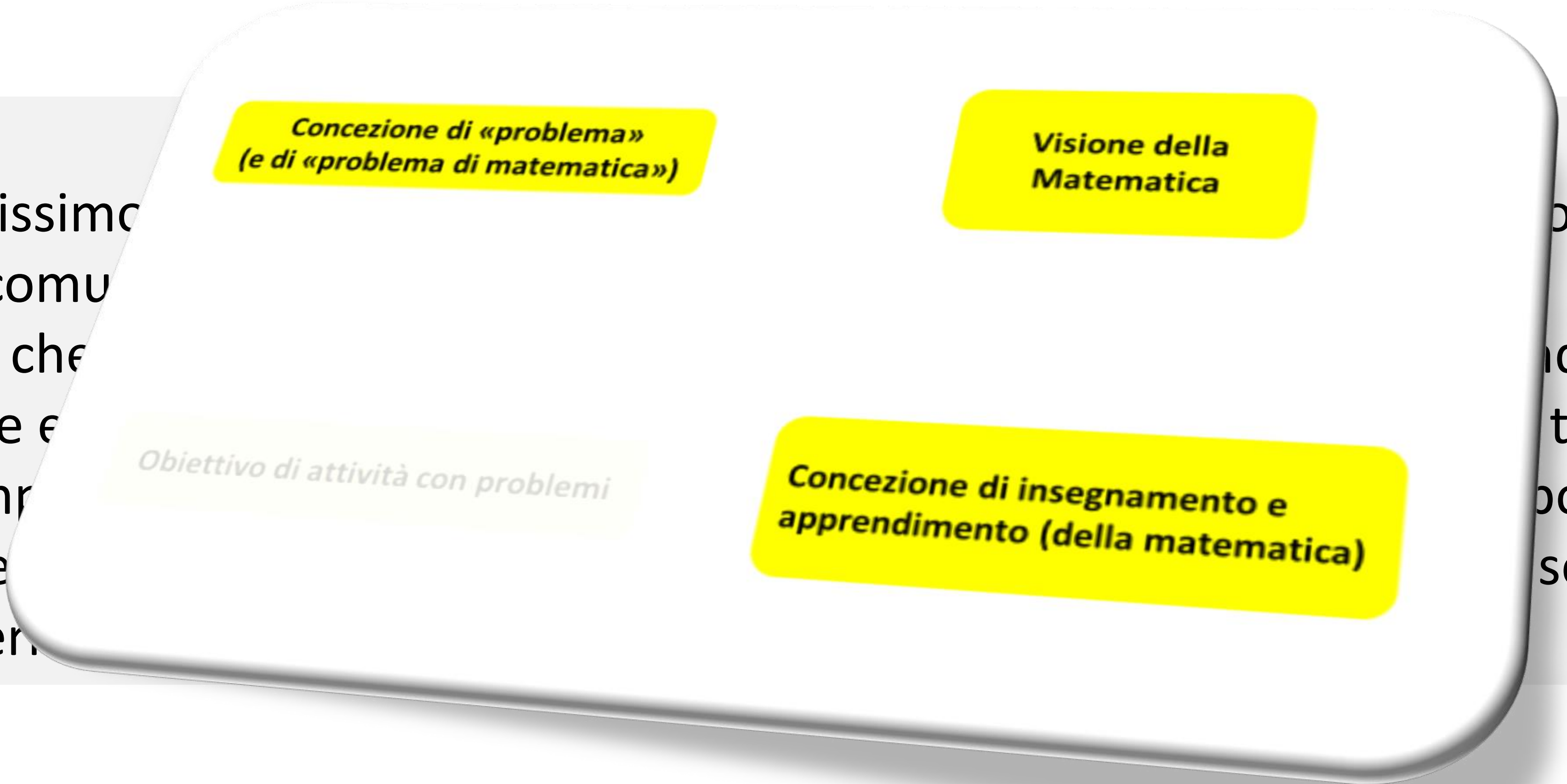
**3**.
Se non riuscissimo a trovare un esempio che combaci perfettamente con il problema, riferiamoci comunque alle formule che troveremo sul capitolo che riguarda l'argomento che stiamo analizzando. Mettiamole in elenco ordinato, utilizzando un foglio a parte e basiamoci su quelle che contengono i termini che ci interessa trovare (se per esempio stiamo cercando l'altezza di un triangolo, tra le formule che possiamo usare cercheremo quelle che contengono l'altezza) e tra di esse verifichiamo se ci sono noti tutti i termini per poterle applicare

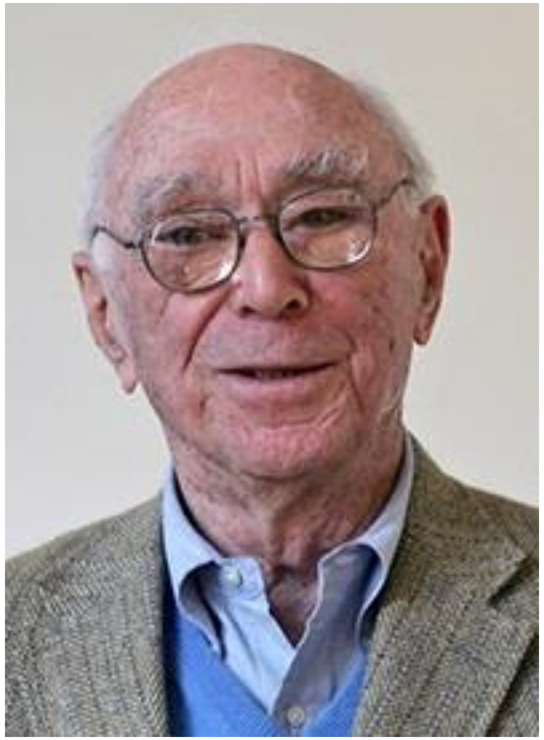
# Un esempio…

**Da un sito con consigli per studenti di superiori….**

**3.**

Se non riuscissimo … oblema,
riferiamoci comu …
l'argomento che … ndo un
foglio a parte e … trovare
(se per esemp … possiamo
usare cerche … se ci sono
noti tutti i ter …





Jerome Bruner (1915-2016)

# I bambini come pensatori: lo sviluppo dello scambio intersoggettivo

Sforzo di dar posto alla prospettiva dell'allievo

*In questa concezione l'insegnante si preoccupa di capire cosa pensa il bambino e come arriva a convincersi di certe cose. I bambini, come gli adulti, vengono visti come persone che costruiscono un* modello *del mondo mediante il quale interpretare la propria esperienza. La pedagogia deve aiutare il bambino a capire meglio, in modo più efficace e meno unilaterale. La comprensione viene promossa tramite la discussione e la collaborazione, il bambino viene incoraggiato a esprimere meglio le sue idee per poter attuare un incontro con le menti di altri che possono avere dei punti di vista diversi. (p. 69)*

# I bambini come pensatori: lo sviluppo dello scambio intersoggettivo

*Questa pedagogia della reciprocità presume che tutte le menti umane siano capaci di possedere credenze e idee che, attraverso la discussione e l'interazione, possono essere dirette verso un quadro di riferimento comune. Sia il bambino che l'adulto hanno un proprio punto di vista e ciascuno viene stimolato a riconoscere quello dell'altro, anche se i due modi di vedere possono essere discordanti. Devono arrivare a capire che le opinioni diverse possono essere basate su ragioni riconoscibili, e che queste ragioni forniscono la base per giudicare le convinzioni opposte alle nostre. A volte hai «torto», a volte hanno torto gli altri – dipende da quanto le idee sono ben ponderate. A volte le due visioni contrapposte sono entrambe giuste – o entrambe sbagliate. Il bambino non è soltanto ignorante, non è soltanto un recipiente vuoto, ma è qualcuno capace di ragionare, di fare senso, sia per conto proprio, che attraverso il dialogo con gli altri. Il bambino viene considerato capace non meno dell'adulto di riflettere sul suo stesso pensiero, e di correggere le sue idee e le sue nozioni attraverso la riflessione – «andando meta», come si dice a volte, passando cioè al livello metacognitivo. Il bambino e la bambina, in breve, vengono visti non solo come dei discenti, ma come degli epistemologi. (p. 69)*

# I bambini come pensatori: lo sviluppo dello scambio intersoggettivo

*La conoscenza è qualcosa che viene condiviso con il discorso, all'interno di una comunità «testuale». Le verità non derivano da un'autorità, testuale o pedagogica, ma da dimostrazioni, argomentazioni e ricostruzioni. Questo modello di educazione è fondato sulla reciprocità e sulla dialettica, è più rivolto all'interpretazione e alla comprensione che al raggiungimento di una conoscenza fattuale o di una prestazione specializzata. (p. 70)*

Tra gli indirizzi di ricerca:
apprendimento collaborativo, studi sulla metacognizione

# I bambini come soggetti intelligenti. La gestione della conoscenza obiettiva

*La quarta prospettiva sostiene che l'insegnamento dovrebbe aiutare i bambini a cogliere la distinzione fra la conoscenza personale da un lato e, dall'altro, le conoscenze che una cultura considera acquisite.* (p. 74)

# La realtà scolastica

*La realtà scolastica, naturalmente, non è mai legata a un unico modello di discente o un unico modello di insegnamento. Per lo più l'educazione quotidiana nelle scuole si propone di coltivare competenze e abilità, di impartire una conoscenza di fatti e di teorie e di stimolare la comprensione delle convinzioni e delle intenzioni sia di chi è vicino che di chi è lontano. Qualsiasi scelta pedagogica pratica comporta un modo di concepire il discente e, col tempo, può essere adottata da lui o da lei come il modo adeguato di riflettere sul processo di apprendimento. Perché una scelta pedagogica comunica inevitabilmente una concezione del processo di apprendimento e del soggetto dell'apprendimento. La pedagogia non è mai ingenua. E' uno strumento che trasmette un proprio messaggio.* (Bruner, CdE, p. 76)

# Ma cos’è un problema?

# Definizioni…

## **Dizionario on-line Garzanti**

PROBLEMA
1. caso complicato, difficile da risolvere; situazione preoccupante: la disoccupazione è un problema sociale; ognuno ha i suoi problemi; che problema!, esclamazione di chi non sa che cosa fare |essere un problema, essere fonte di preoccupazione |non c’è problema, per affermare che non ci sono ostacoli, che non sussiste alcuna difficoltà (a fare qualcosa, a soddisfare una richiesta ecc.) dim. problemino, problemuccio, accr. problemone, pegg. problemaccio

2. quesito con cui si chiede di trovare, con un **procedimento di calcolo**, **uno o più dati sconosciuti, partendo dai dati noti contenuti nell’enunciato del quesito stesso**: problema di aritmetica, di geometria, di fisica; risolvere un problema, trovarne **la soluzione** | questione di cui si cerca **la soluzione**: problema filosofico, morale, scientifico

# Definizioni…

**Da un sito per studenti…**

*Un **problema matematico** è un quesito del quale si conoscono alcuni elementi (**i dati**) per mezzo dei quali si devono calcolare altri elementi (**le incognite**)*

MA…

# La matematica e i problemi

Paul Richard Halmos (1916, 2006)

*In che cosa consiste veramente la matematica? Assiomi (…)? Dimostrazioni (…)? Definizioni (…)? Formule (…)? Metodi (…)?*
*Certamente la matematica non potrebbe esistere senza questi ingredienti; essi sono tutti essenziali. Tuttavia un punto di vista sostenibile è che nessuno di essi è al centro della disciplina, che il motivo principale di esistenza per il matematico è risolvere problemi, e che, dunque, quello in cui consiste veramente la matematica sono problemi e soluzioni*
[Halmos, 1980, The heart of mathematics, *AMM*, 87, p. 519]

# La matematica e i problemi

**Importanza dei problemi**: non solo per la soluzione

Spesso….. più per i tentativi di trovare soluzione

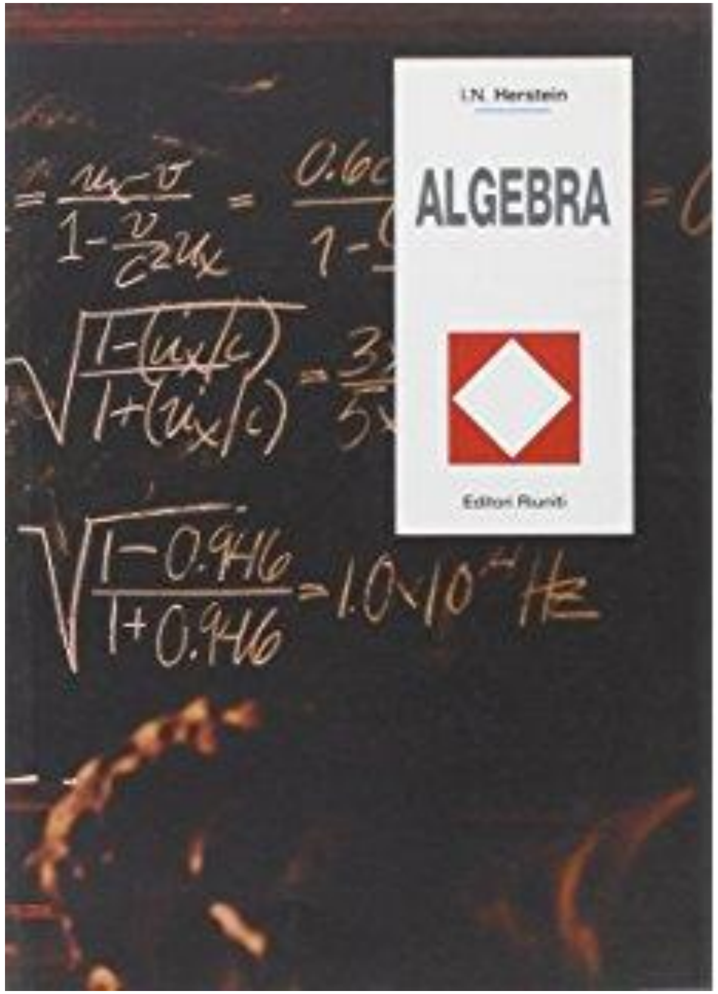
Costruzione di nuove teorie a prescindere dall'esito favorevole della soluzione del problema di partenza

ESEMPI

Ultimo teorema di Fermat (1601-1665)

23 problemi posti da Hilbert al II Congresso dei matematici (Parigi, 1900)

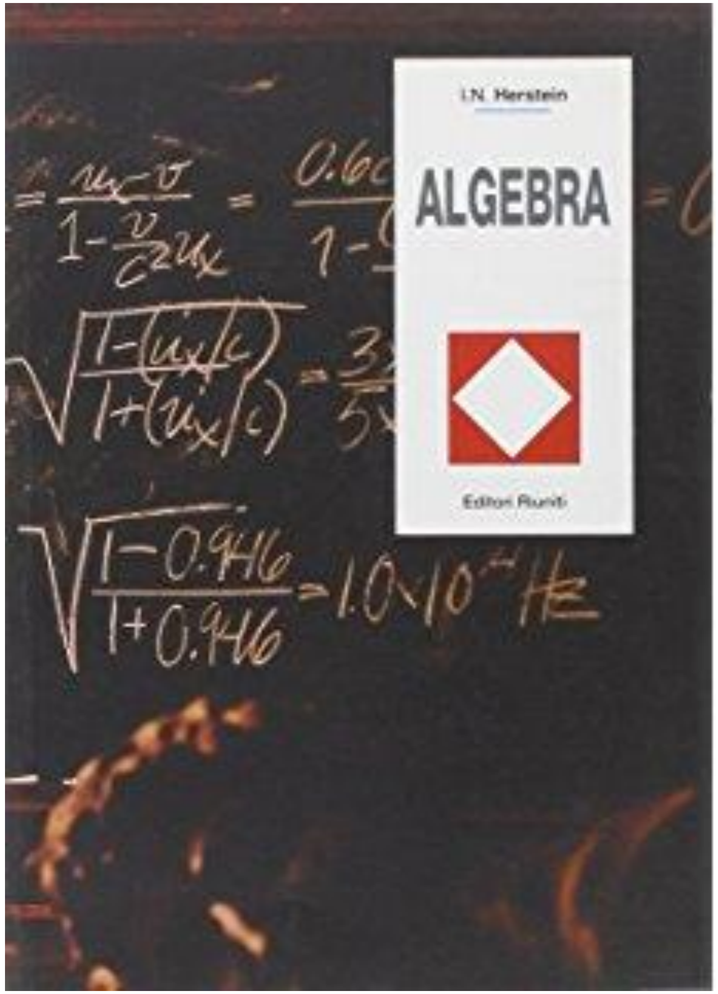
Hilbert (1862-1943) : una scienza è viva finché ha problemi




*Due parole sui problemi. Ve ne sono molti, e solo un studente eccezionale potrebbe risolverli tutti. Alcuni servono solo a completare dimostrazioni del testo, altri hanno lo scopo di illustrare i risultati ottenuti e far pratica su di essi.*

*Molti non vengono proposti* ***tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati****. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi lo affronta e nei tentativi messi in atto. Altri problemi* ***anticipano*** *questioni che saranno sviluppate dopo, con la speranza sia di gettare le basi del lavoro da fare in seguito che di rendere più naturali le idee, le definizioni e gli argomenti quando verranno introdotti. Alcuni problemi compaiono più di una volta.*

(Herstein, I.N., 1988, *Algebra*, Editori Riuniti, p. XIV)




Problema 26 doppio asteriscato, capitolo «teoria dei gruppi»….

«*Non vi scoraggiate se non riuscite a risolvere questo problema, usando, della teoria dei gruppi, solo quanto visto fin qui.*

*Non conosco nessuno, me compreso, che abbia risolto il problema usando i limitati mezzi a disposizione a questo punto. Ma è divertente tentare. Ho ricevuto più lettere su questo problema che su qualunque altro punto del libro*.»

(Herstein, I.N., 1988, *Algebra*, Editori Riuniti, p. 51)

Concezione di «problema»
(e di «problema di matematica»)

Visione della
Matematica

Obiettivo di attività con problemi

Concezione di insegnamento e
apprendimento (della matematica)

# Una buona definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta
ma non sa come raggiungerla
(Karl Duncker, 1945)

# Relazioni problema – conoscenza:
# una rivoluzione copernicana

# Teoria costruttivista dell'istruzione (Von Glasersfeld)

**1.** Se assumiamo che lo studente deve costruire la propria conoscenza consideriamo che non è una "lavagna pulita", in quanto possiede conoscenze e misconoscenze;

**2.** qualunque risposta dà uno studente a una domanda o a un problema tale risposta ha per lui, in quella circostanza, un senso;

**3.** se un insegnante desidera modificare i concetti o le strutture concettuali di uno studente, deve cercare di costruire un modello del modo di pensare di *quello* studente;

**4.** domandare allo studente di chiarire come sia giunto a formulare una risposta lo induce a scoprire qualcosa sul suo modo di pensare;

**5.** se si desidera motivare lo studente ad affrontare questioni che non lo sembrano interessare, bisogna creare situazioni in cui possa sperimentare il piacere di risolvere un problema;

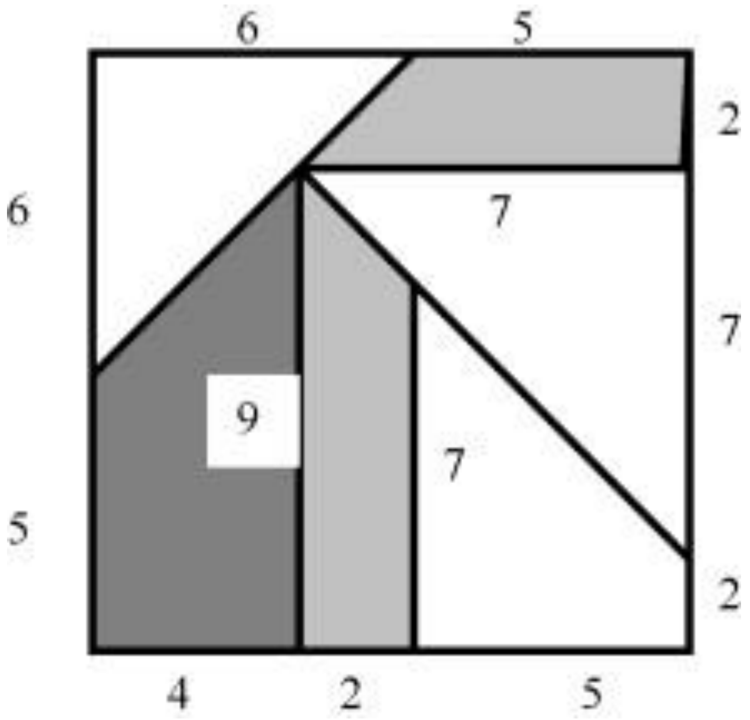
**6.** un ragionamento corretto è molto più importante di una risposta corretta;

**7.** per comprendere e apprezzare le idee di uno studente bisogna avere una mente molto flessibile;

**8.** un insegnante "costruttivista" non può mai giustificare ciò che insegna affermando "che è la verita".

# Problema del puzzle

Costruire un puzzle come questo ma più grande, in modo che il segmento che misura 4cm misuri 7cm nella riproduzione.




Ogni gruppo di 4 o 5 studenti ha un puzzle, ma ogni studente dovrà realizzare un solo pezzo (oppure una coppia di studenti realizzerà due pezzi). Una volta realizzati dovranno ricostruire la figura.

# Teoria delle situazioni didattiche (Brousseau)

## Situazione a-didattica

- L’alunno può immaginare una risposta ma questa risposta iniziale (procedura di base) non è quella che si vuole insegnare: se la risposta fosse già conosciuta, questa non sarebbe una situazione di apprendimento;
- Questa procedura di base deve rivelarsi immediatamente insufficiente o inefficace perché l’alunno sia costretto a fare degli accomodamenti, delle modifiche del suo sistema di conoscenza
- Esiste un ambiente per la validazione

**Lo strumento più adatto alla soluzione del problema è proprio quella conoscenza che è obiettivo di insegnamento**

Concezione di «problema»
(e di «problema di matematica»)

Visione della
Matematica

Obiettivo di attività con problemi

Concezione di insegnamento e
apprendimento (della matematica)

**Concezione di «problema»**
**(e di «problema di matematica»)**

**Visione della Matematica**

**Obiettivo di attività con problemi**

**Concezione di insegnamento e apprendimento (della matematica)**

# Perché i problemi?

# Metodologia: il laboratorio matematico

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

**PRIMARIA: AMBIENTE DI APPRENDIMENTO**

**Favorire l'esplorazione e la scoperta,** al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. In questa prospettiva, **la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali** (p. 27)

**Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio**, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il **dialogo e la riflessione** su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia **la ricerca e la progettualità**, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento. (p. 27)

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

**MATEMATICA**

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il **laboratorio,** inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui **l'alunno è attivo**, **formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta** le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e **costruisce significati**, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. […] (p. 49)

# Imparare a risolvere (gestire) problemi

Paul Richard Halmos:

Quale è il modo migliore per imparare a risolvere problemi?

**Affrontare problemi**

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

**Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione**

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il processo di un pensiero razionale gli consente di **affrontare problemi e situazioni** sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche.

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

**Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione**

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il processo di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere **consapevolezza dei limiti** delle affermazioni che riguardano questioni complesse che **non si prestano a spiegazioni univoche**.

# Imparare a risolvere (gestire) problemi: decisioni, argomentazioni e aspetti metacognitivi


Rosetta Zan

«*Prendere decisioni* si contrappone al comportamento automatico […] e caratterizza l'attività di risoluzione di problemi.
Qualsiasi definizione di problema mette infatti in evidenza la presenza di un obiettivo e la mancanza di un procedimento automatico per raggiungerlo, e presuppone quindi implicitamente la necessità di prendere decisioni.»

# Una buona definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta
ma non sa come raggiungerla
(Karl Duncker, 1945)

Esercizio - problema

| ESERCIZIO | PROBLEMA |
| --- | --- |
| Comportamento automatico | Comportamento strategico |

...nel problema si devono prendere DECISIONI

# Imparare a risolvere (gestire) problemi: decisioni, argomentazioni e aspetti metacognitivi


Rosetta Zan

«Il problem solving si configura quindi come ambiente ideale per sviluppare negli studenti capacità di tipo decisionale. Naturalmente è essenziale che si tratti di attività di soluzione di effettivi problemi, e non di esercizi di routine etichettati come «problemi» in base a classificazioni di tipo formale e non strutturale.»

# Imparare a risolvere (gestire) problemi: decisioni, argomentazioni e aspetti metacognitivi


Rosetta Zan

«In particolare nella prassi scolastica la tipologia dei problemi utilizzati (caratterizzati dall’avere sempre una soluzione, dalla necessità di utilizzare tutti i dati presenti e le conoscenze recentemente apprese) spesso mette in secondo piano questo ruolo delle decisioni, o lo riduce a semplice scelta fra più opzioni possibili e già disponibili.» (pp.134-135)

# Imparare a risolvere (gestire) problemi: decisioni, argomentazioni e aspetti metacognitivi


Rosetta Zan

«Dalla responsabilità delle piccole decisioni relative ad un problema, forzata dal ruolo non direttivo dell'insegnante, lo studente arriva gradualmente ad un'assunzione diversa della responsabilità dell'apprendimento, ma soprattutto al *gusto* di tale responsabilità.» (p.141)

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

**MATEMATICA**

L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, **scegli le azioni da compiere** (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni, …) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del **problema**.

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

**MATEMATICA**

Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un’attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L’alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, **riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere […] e le concatena** in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. **Un’attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti** […] (p. 49)

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

### Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

Riesce a **risolvere** facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il **controllo** sia sul **processo** risolutivo, sia sui **risultati**. **Descrive** il procedimento seguito e riconosce **strategie** di soluzione diverse dalla propria.

# Dunque…

Decisioni («sceglie»)

Argomentazioni

Aspetti metacognitivi (controllo)

Processo - prodotto

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

## Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di I grado

**Riconosce e risolve problemi** in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
**Spiega il procedimento** seguito, anche in forma scritta, mantenendo il **controllo** sia sul **processo** risolutivo, sia sui risultati.
Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
Produce **argomentazioni** in base alle conoscenze teoriche acquisite […]
Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; **accetta di cambiare opinione** riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.

# Dal Profilo Educativo

**Risultati di apprendimento comuni a tutti i percorsi liceali**
A conclusione dei percorsi di ogni liceo gli studenti dovranno:

**2. Area logico-argomentativa**
- Saper sostenere una propria tesi e saper **ascoltare e valutare criticamente le argomentazioni altrui.**
- Acquisire l’abitudine a ragionare con rigore logico, ad **identificare i problemi e a individuare possibili soluzioni**.
- Essere in grado di leggere e interpretare criticamente i contenuti delle diverse forme di comunicazione.

# Dal Profilo Educativo

**Liceo scientifico**

Gli studenti, a conclusione del percorso di studio, oltre a raggiungere i risultati di apprendimento comuni, dovranno:

[…]
comprendere le strutture portanti dei procedimenti **argomentativi** e **dimostrativi** della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare **nell'individuare e risolvere problemi** di varia natura;

# Visione della matematica

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

**MATEMATICA**

Caratteristica della pratica matematica è la **risoluzione di problemi**, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e **non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola**. (p. 49)

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

## MATEMATICA

**Di estrema importanza** è lo sviluppo di **un'adeguata visione della matematica**, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto **per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e struttura** che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo. (p. 49)

# Qualche esempio

# Problema dei voti

Due classi di una scuola chiedono al Prof. Smith (loro insegnante di inglese) di accompagnarli in gita. Il professore dice che accompagnerà la classe che avrà i migliori risultati nella sua materia. In tabella sono riportati i voti degli studenti al termine di I quadrimestre. Come può decidere quale classe portare in gita?

| Voto | Numero studenti IIA | Numero studenti IIB |
|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 |
| 4 | 2 | 1 |
| 5 | 3 | 3 |
| 6 | 5 | 4 |
| 7 | 6 | 6 |
| 8 | 4 | 0 |
| 9 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 3 |

# Problema dei voti

Due classi di una scuola chiedono al Prof. S... inglese) di accompagnarli in gita. Il... accompagnerà la class... ...sua mater... In tabella son... ...termine di I qua... ...quale classe portare in gita?

**Massacriamo il problema**

| [illegible] | Numero studenti IIA | Numero studenti IIB |
|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 |
| 4 | 2 | 1 |
| 5 | 3 | 3 |
| [illegible] | 5 | 4 |
| [illegible] | 6 | 6 |
| [illegible] | 4 | 0 |
| [illegible] | 1 | 0 |
| [illegible] | 0 | 3 |

# Problema dei voti

Due classi di una scuola chiedono al Prof. Smith (loro insegnante di inglese) di accompagnarli in gita. Il professore dice che accompagnerà la classe che avrà i migliori risultati nella sua materia. In tabella sono riportati i voti degli studenti al termine di I quadrimestre.

| Voto | Numero studenti IIA | Numero studenti IIB |
|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 |
| 4 | 2 | 1 |
| 5 | 3 | 3 |
| 6 | 5 | 4 |
| 7 | 6 | 6 |
| 8 | 4 | 0 |
| 9 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 3 |

1) **Calcola la media dei voti delle due classi. Quale è la classe con la media più alta?**
2) **Calcola la media pesata…. Quali delle due medie prenderesti come indicatore dei risultati della classe?**
3) **Il Prof Smith non è soddisfatto del risultato, perché a parte tre studenti eccellenti della IIB nessun altro ha voti sopra al 7. Quale indice statistico può considerare?**

# Problema dei voti

Abbiamo accompagnato lo studente per piccoli passi……..

Dove?

Perché?

D… (l… g… cl… m… st…

…i delle due classi. …media più alta? …… Quali delle due …e indicatore dei risultati della classe?

…sfatto del risultato, …nti eccellenti della IIB nessun altro ha voti sopra al 7. Quale indice …e?

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 4 | 0 |
| 9 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 3 |

# Problema dei musicisti

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall’organizzatore dell’evento sono le seguenti:

| | |
|---|---|
| Ada (da sola) | 100 euro |
| Bea (da sola) | 150 euro |
| Ciro (da solo) | 180 euro |
| Ada e Bea | 400 euro |
| Ada e Ciro | 300 euro |
| Bea e Ciro | 420 euro |
| Ada, Bea e Ciro insieme | 600 euro |

Mettendovi nei panni dei tre musicisti; formulate una proposta sul modo in cui Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi….. Motivando opportunamente!!

# Problema dei musicisti

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|

# Problema dei musicisti

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|
| Parti uguali | 200 | 200 | 200 |

# Problema dei musicisti

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

| | **Ada** | **Bea** | **Ciro** |
|---|---|---|---|
| Parti uguali | 200 | 200 | 200 |
| Proporzionale | 139,6 | 209,6 | 251,1 |

Valori approssimati

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

# Problema dei musicisti

| | **Ada** | **Bea** | **Ciro** |
|---|---|---|---|
| Parti uguali | 200 | 200 | 200 |
| Proporzionale | 139,6 | 209,6 | 251,1 |
| Surplus in parti uguali | 156,7 | 206,7 | 236,6 |

Valori approssimati

# Problema dei musicisti

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|
| Parti uguali | 200 | 200 | 200 |
| Proporzionale | 139,6 | 209,6 | 251,1 |
| Surplus in parti uguali | 156,7 | 206,7 | 236,6 |
| Somma per coppie e proporz. | 187,5 | 219,6 | 192,9 |

Valori approssimati

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

# Problema dei musicisti

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|
| Parti uguali | 200 | 200 | 200 |
| Proporzionale | 139,6 | 209,6 | 251,1 |
| Surplus in parti uguali | 156,7 | 206,7 | 236,6 |
| Somma per coppie e proporz. | 187,5 | 219,6 | 192,9 |
| MEDIA DELLE PRECEDENTI | 171 | 209 | 220 |

Valori approssimati

# Problema dei musicisti

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|
| Parti uguali | 200 | 200 | 200 |
| Proporzionale | 139,6 | 209,6 | 251,1 |
| Surplus in parti uguali | 156,7 | 206,7 | 236,6 |
| Somma per coppie e proporz. | 187,5 | 219,6 | 192,9 |
| MEDIA DELLE PRECEDENTI | 171 | 209 | 220 |
| | | | |
| Eccetera | … | … | … |

Valori approssimati

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

# Problema dei musicisti

## Una proposta dalla teoria dei giochi

$a \geq 100$ $\quad$ $a+b \geq 400$

$b \geq 150$ $\quad$ $a+c \geq 300$

$c \geq 180$ $\quad$ $b+c \geq 420$

$a+b+c=600$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

# Problema dei musicisti

## Una proposta dalla teoria dei giochi

$a \geq 100$ $\quad a+b \geq 400$

$b \geq 150$ $\quad a+c \geq 300$

$c \geq 180$ $\quad b+c \geq 420$

$a+b+c=600$

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|
| Parti uguali | 200 | 200 | 200 |
| Proporzionale | 139,6 | 209,6 | 251,1 |
| Surplus in parti uguali | 156,7 | 206,7 | 236,6 |
| Somma per coppie e proporz. | 187,5 | 219,6 | 192,9 |
| MEDIA DELLE PRECEDENTI | 171 | 209 | 220 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

# Problema dei musicisti

## Una proposta dalla teoria dei giochi

$$a \geq 100 \qquad a+b \geq 400$$

$$b \geq 150 \qquad a+c \geq 300 \qquad a+b+c=600$$

$$c \geq 180 \qquad b+c \geq 420$$

| | **Ada** | **Bea** | **Ciro** |
|---|---|---|---|
| Esempio 1 | 150 | 260 | 190 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

# Problema dei musicisti

## Una proposta dalla teoria dei giochi

$a \geq 100$ $\quad$ $a+b \geq 400$

$b \geq 150$ $\quad$ $a+c \geq 300$

$c \geq 180$ $\quad$ $b+c \geq 420$

$a+b+c=600$

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|
| Esempio 1 | 150 | 260 | 190 |
| Esempio 2 | 180 | 240 | 180 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ada | 100 | Ada+Bea | 400 |
| Bea | 150 | Ada+Ciro | 300 |
| Ciro | 180 | Bea+Ciro | 420 |
| Ada+Bea+Ciro | | | 600 |

# Problema dei musicisti

## Una proposta dalla teoria dei giochi

$a \geq 100$ $\quad a+b \geq 400$

$b \geq 150$ $\quad a+c \geq 300$

$c \geq 180$ $\quad b+c \geq 420$

$a+b+c=600$

| | Ada | Bea | Ciro |
|---|---|---|---|
| Esempio 1 | 150 | 260 | 190 |
| Esempio 2 | 180 | 240 | 180 |
| | | | |
| Eccetera………………. | | | |
| | | | |

# Problema dei musicisti

**E' un problema autentico e significativo….**

## Indicazioni Nazionali: I ciclo

**MATEMATICA**

Caratteristica della pratica matematica è la **risoluzione di problemi**, che devono essere intesi come questioni **autentiche e significative, legate alla vita quotidiana**, e **non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola**. (p. 49)

# Problema dei musicisti

**La matematica offre diversi strumenti per rispondere**

## Indicazioni Nazionali: I ciclo

### MATEMATICA

**Di estrema importanza** è lo sviluppo di **un'adeguata visione della matematica**, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto **per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e struttura** che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo. (p. 49)

# Problema dei musicisti

**La matematica offre diversi strumenti per rispondere**

**La matematica ha dei limiti! Possono avere un peso anche questioni non matematiche (o non modellizzabili, o non facilmente modellizzabili)**

**Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione**

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il processo di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere **consapevolezza dei limiti** delle affermazioni che riguardano questioni complesse che **non si prestano a spiegazioni univoche**.

# Problema dei musicisti

**Non c'è un'unica soluzione**

**Lo stesso significato di «soluzione» è in discussione!**

Indicazioni Nazionali: I ciclo

**Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione**

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il processo di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere **consapevolezza dei limiti** delle affermazioni che riguardano questioni complesse che **non si prestano a spiegazioni univoche**.

# Problema dei musicisti

**E' necessario prendere decisioni**

## Indicazioni Nazionali: I ciclo

**MATEMATICA**

Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, **sceglie le azioni da compiere** [...] e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti [...] (p. 49)

# Problema dei musicisti

Contesto socio-culturale della classe
Contratto didattico

**E' necessario motivare le decisioni prese**

**E' necessario comprendere le argomentazioni altrui. Controargomentare, cambiare opinione, …….**

Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
**Produce argomentazioni** in base alle conoscenze teoriche acquisite […]
**Sostiene le proprie convinzioni**, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; **accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta**.

# Problema dei musicisti

**Può essere un problema per progettare un *laboratorio matematico***

**MATEMATICA**

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il **laboratorio,** inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui **l'alunno è attivo**, **formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta** le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e **costruisce significati**, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. [...] (p. 49)


**Rosetta Zan**

**«Qualsiasi sia il prodotto, un processo di pensiero è di per sé significativo: la sensazione di «potercela fare» passa dalla semplice produzione di un risultato giusto, alla consapevolezza di *poter pensare*.» (p.141)**

Mathesis, Pavia, 27 aprile 2017

# "Problemi di matematica: ma se non gli diciamo prima come fare.....!"

Samuele Antonini

Dipartimento di Matematica «F. Casorati»

Università di Pavia