Sezione Mathesis di Pavia

21 novembre 2019

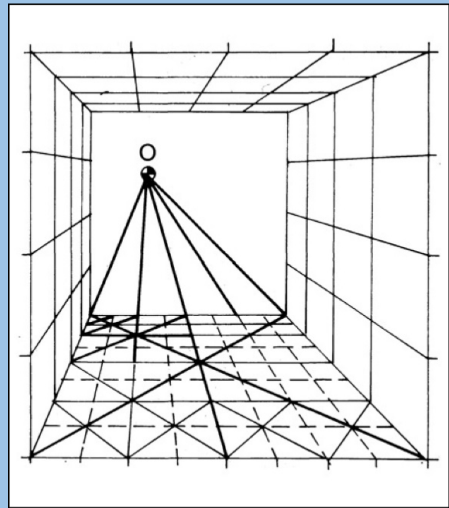
MATEMARTISTICA
come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

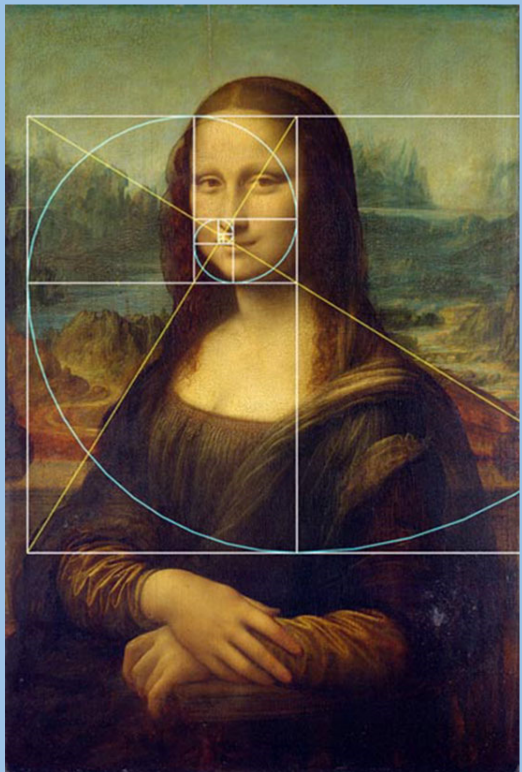
Paola Vighi

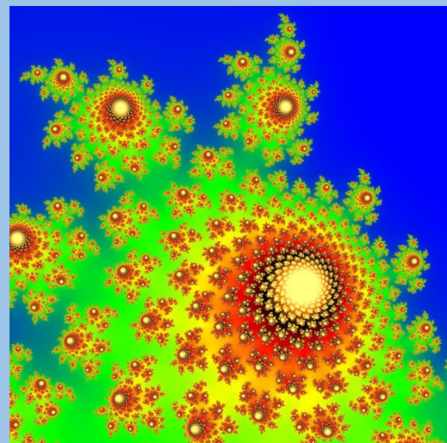
Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche - Università di Parma

paola.vighi@unipr.it

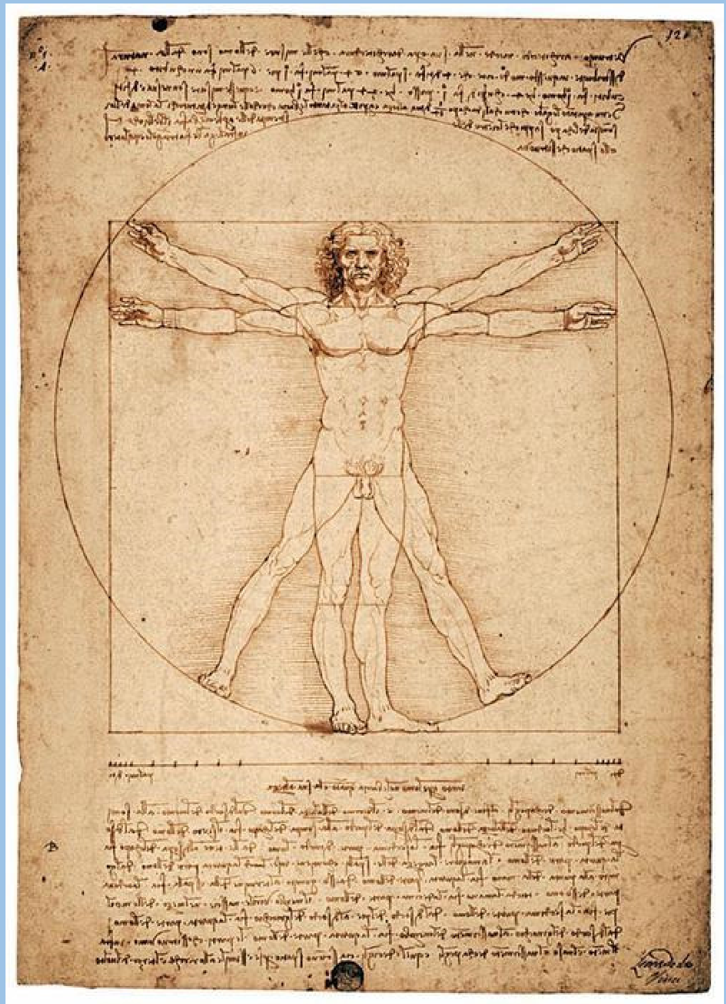
Matematica … Arte … Simmetria… Prospettiva… Sezione aurea… Frattali







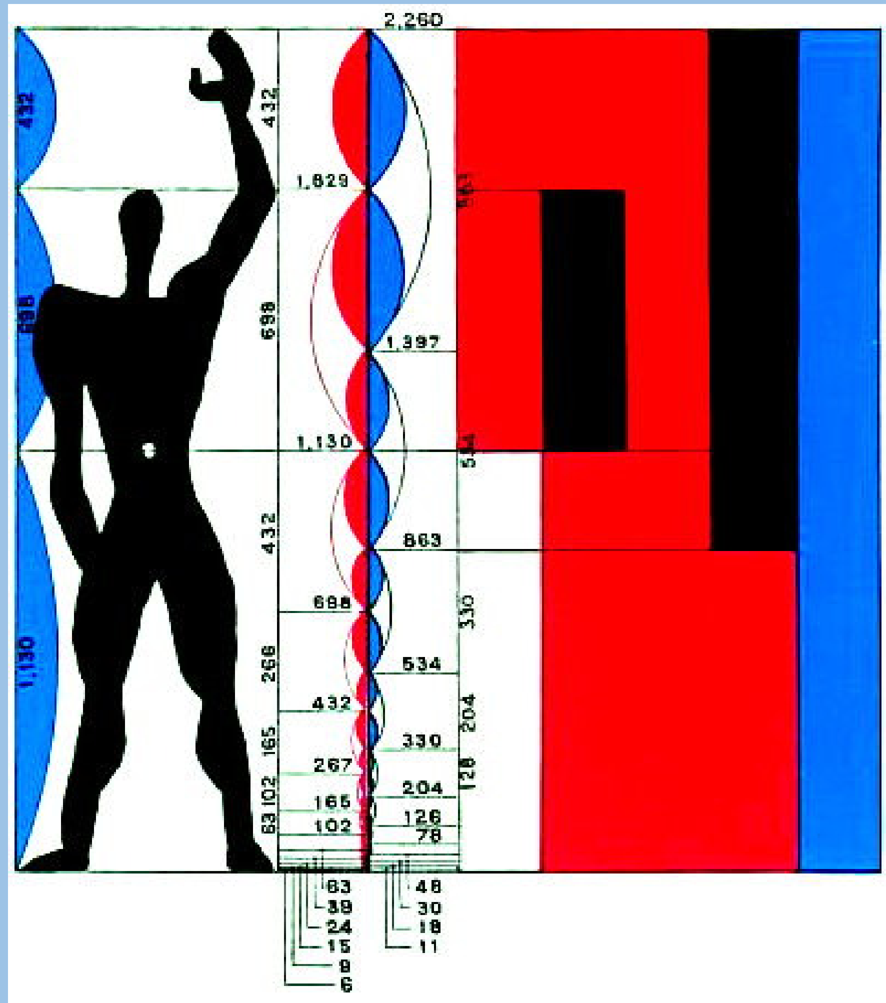
Uomo vitruviano di Leonardo (1490)



Vitruvio (80 – 23 a.C.)
«De Architectura»

La simmetria risulta dalla proporzione….
La proporzione è la commisurazione tra il tutto e le varie parti che lo compongono.

Policleto (IV sec.a.C.)
«Canone»



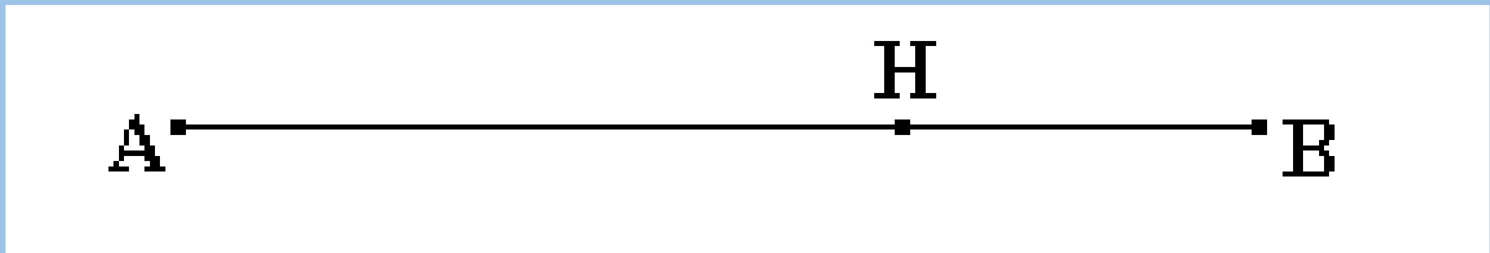
Le Corbusier (1887 – 1965)
«Modulor» (1948)

Bella Hadid è la donna perfetta, per la **chirurgia estetica** il suo volto è l'ideale di bellezza,.
… il suo volto rispetta la sezione aurea …
… tutti gli elementi del suo volto sono stati misurati e nel caso del mento il risultato è del 99,7%: una distanza di appena 0,3% dalla proporzione perfetta.

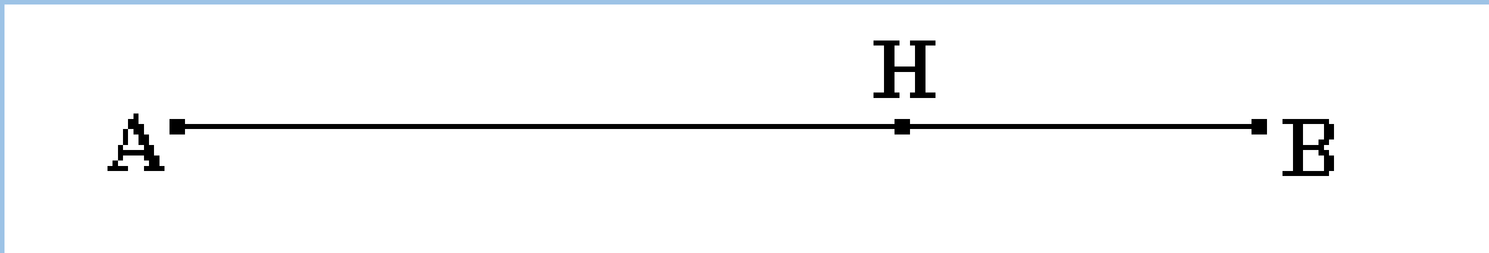
(Il Gazzettino, 16 ottobre 2019)

"Si dice che una retta risulta divisa in estrema e media ragione, quando tutta quanta la retta sta alla parte maggiore di essa come la parte maggiore sta a quella minore"

Euclide (300 a.C.)
Libro VI, definizione 3



$$AB : AH = AH : HB$$



$$AB : AH = AH : HB$$

$$(x+1): x = x:1$$

$$x + 1 = x^2$$

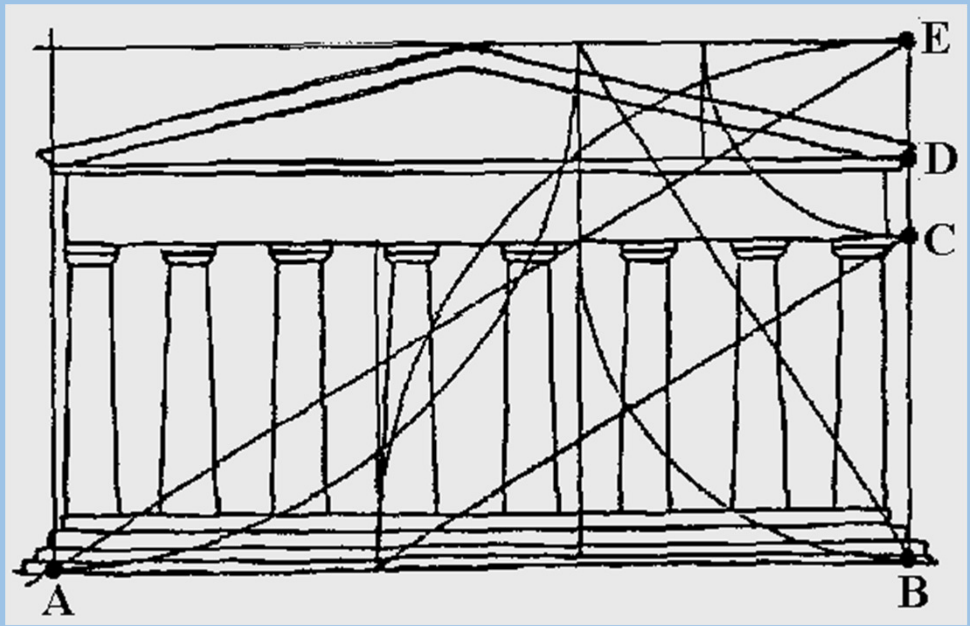
$$x^2 - x - 1 = 0$$

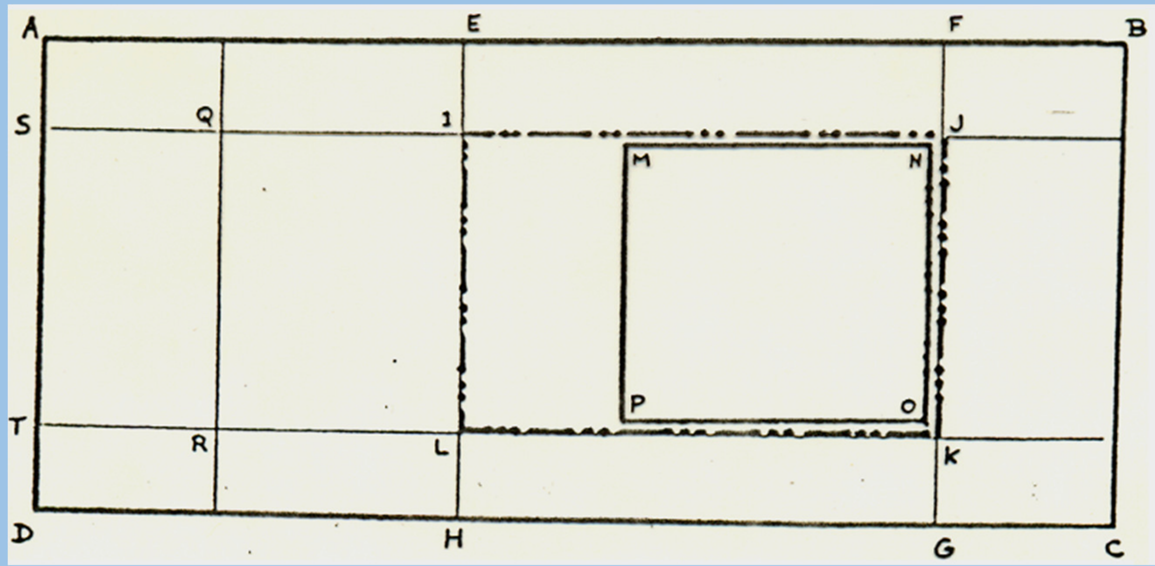
$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = 0.6180339887$$

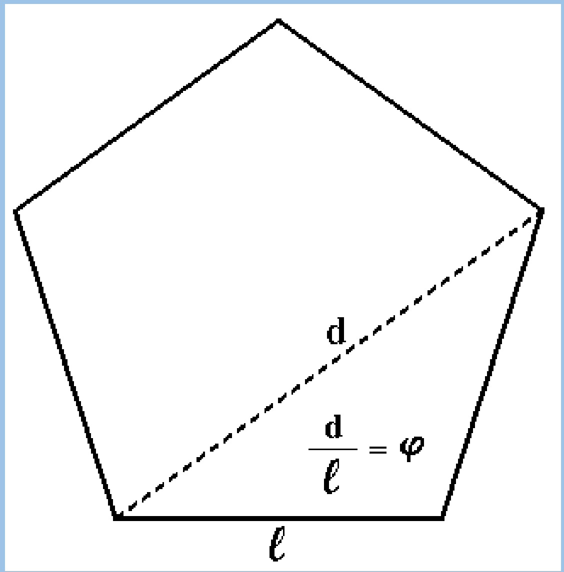
La sezione aurea nel Partenone

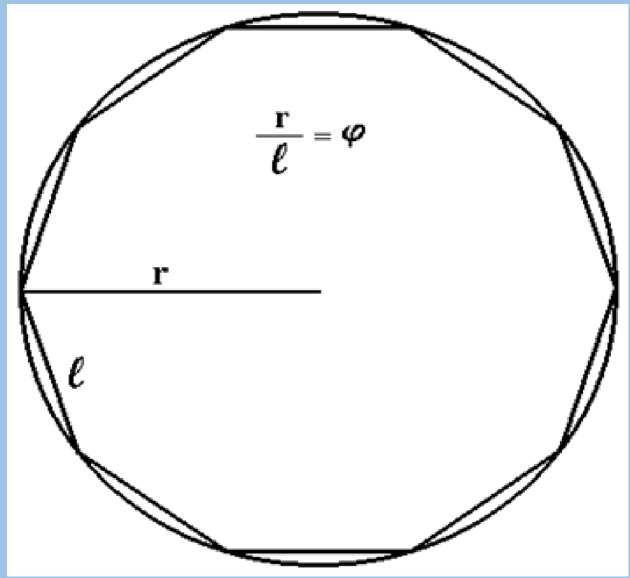


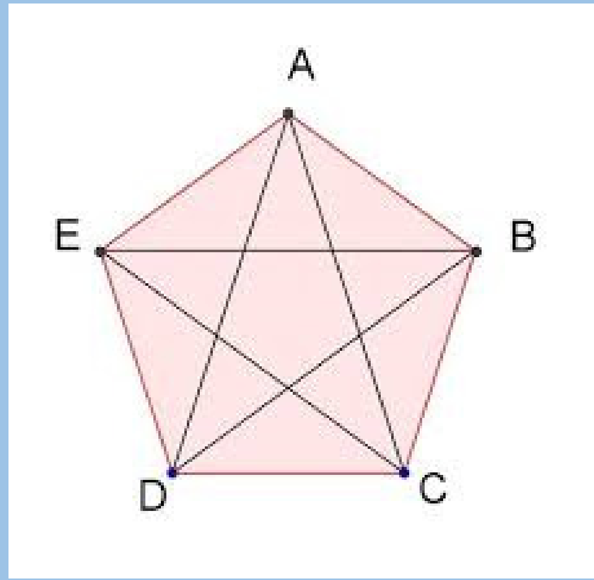


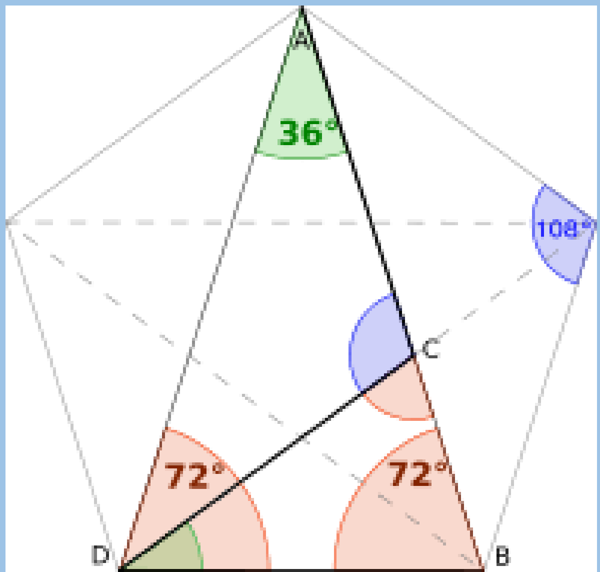
$AB/BE=BE/BC=BC/CE=CE/ED=\varphi$

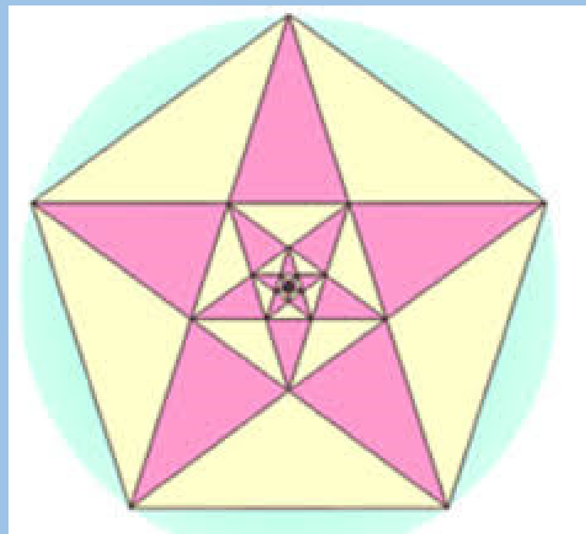
$EF/MN=\varphi$

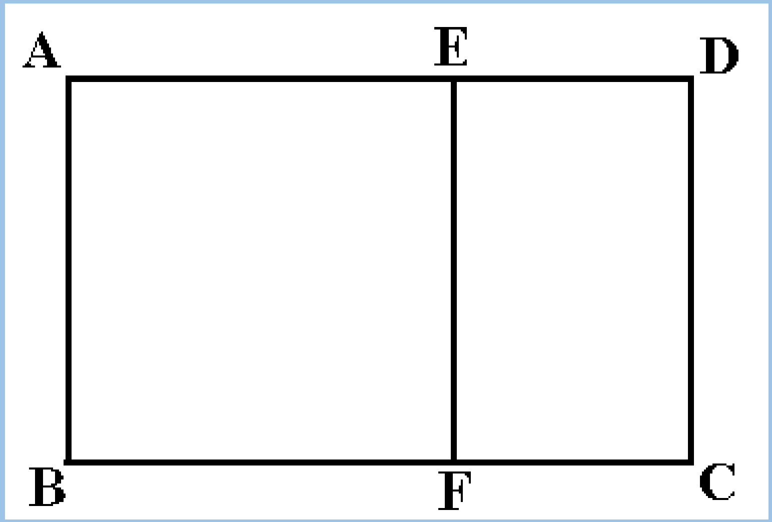

d
$\frac{d}{\ell} = \varphi$
ℓ

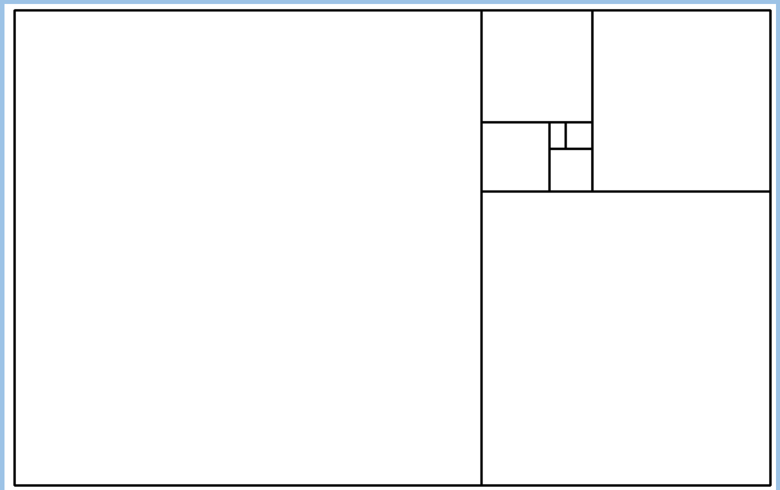

$\frac{r}{\ell} = \varphi$
r
ℓ


A
E
B
D
C

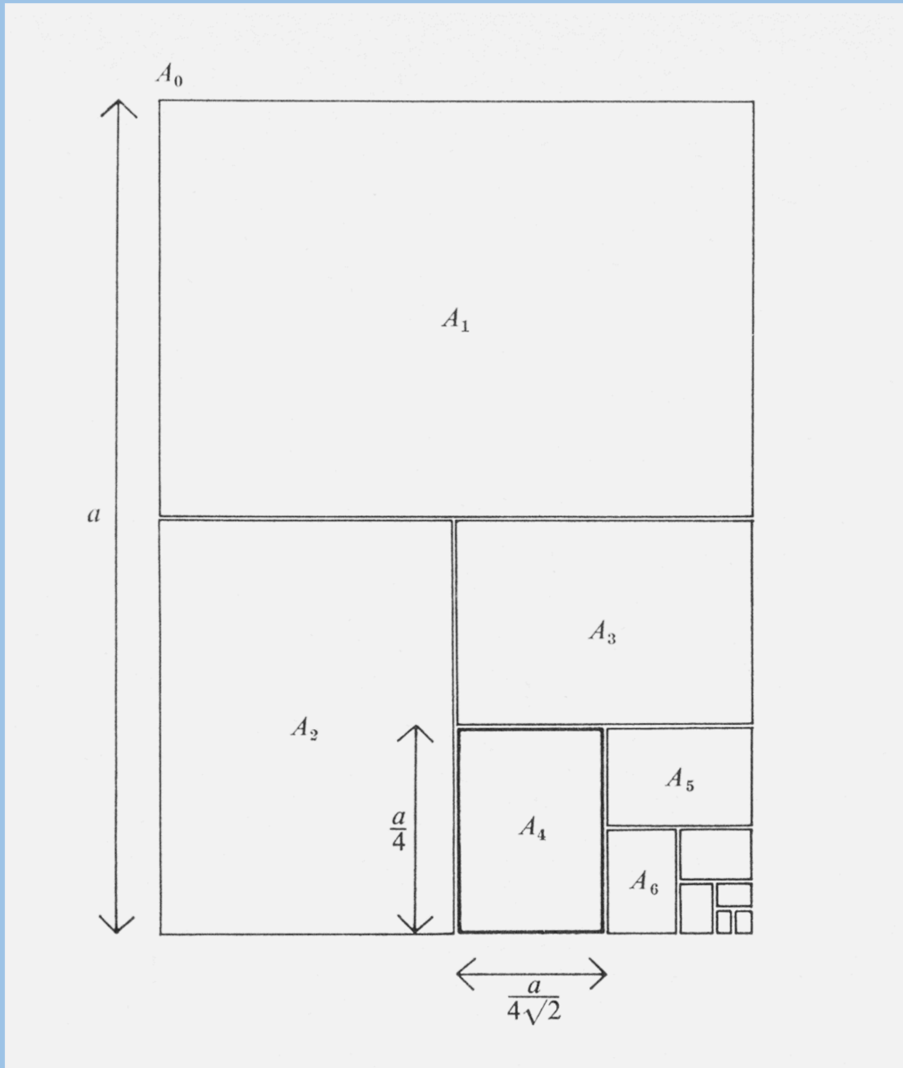

A
36°
108°
C
72°
72°
D
B





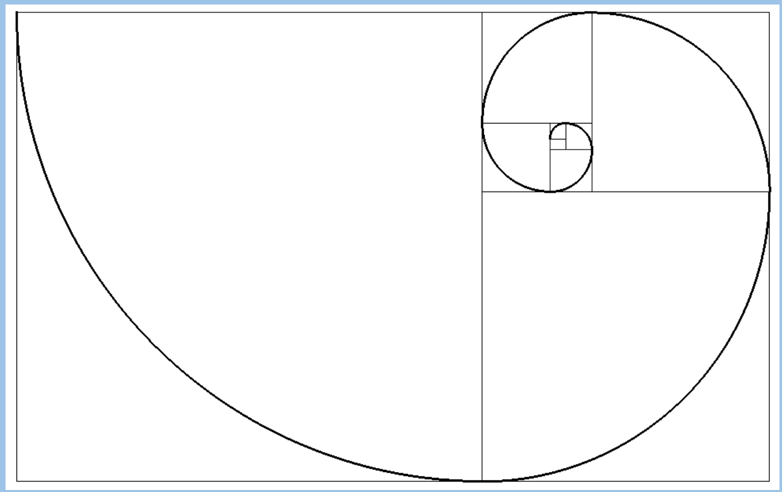


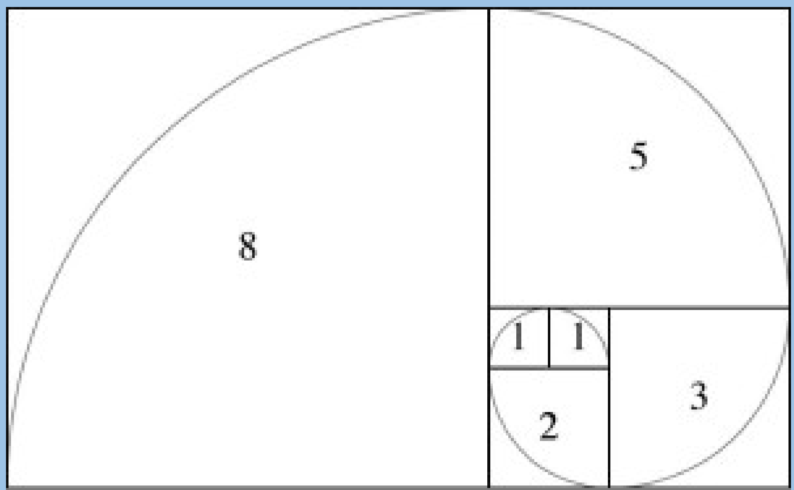
Rettangoli Aurei



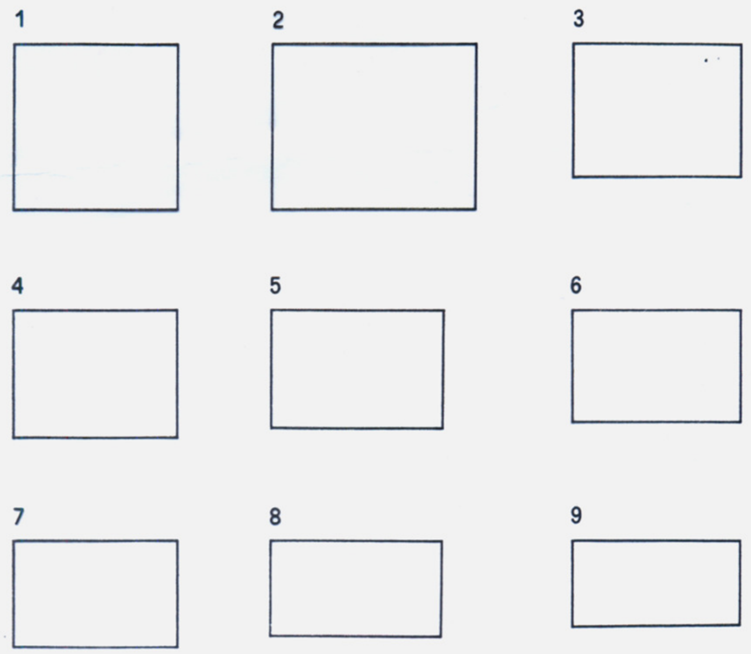
I formati della carta

Il Nautilus



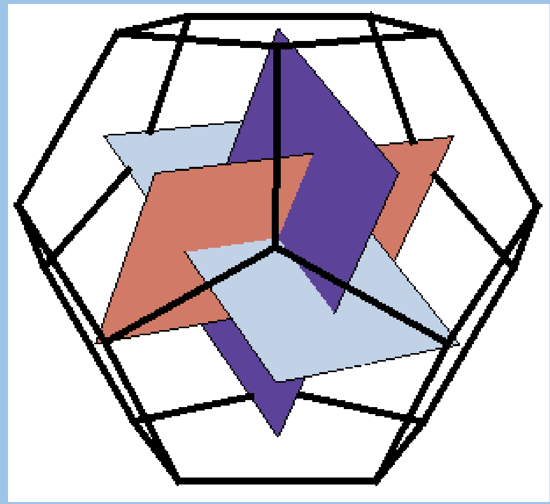


Capelo, A. & Ferrari. M. (1991):
Il rapporto aureo: matematica e paramatematica
L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate

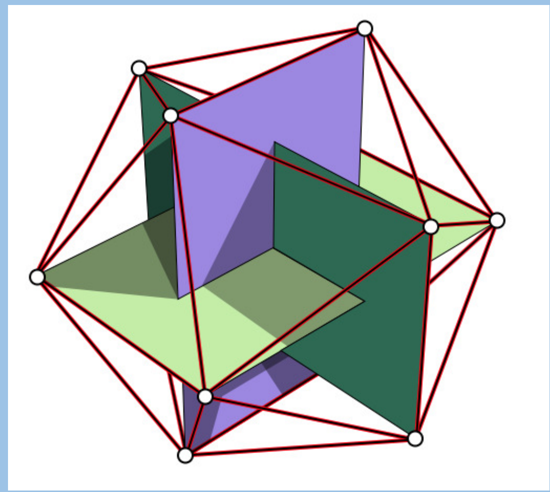


	r	m	f
1	1/1	2,74	3,36
2	6/5	0,22	0,27
3	5/4	3,07	0,00
4	4/3	1,97	3,36
5	29/20	5,85	11,35
6	3/2	22,33	17,22
7	34/21	34,50	35,83
8	23/13	21,64	16,99
9	2/1	6,25	9,94

Fig. 2. Alcuni rettangoli che Fechner presentò a delle persone *colte*. In basso la tabella della distribuzione percentuale dei giudizi proferiti dai gruppi di uomini (m) e di donne (f). La colonna *r* dà i rapporti fra i lati dei vari rettangoli, di cui quello n. 7 con il rapporto di sezione aurea manifesta avere il valore più alto di piacevolezza.




BANCA POPOLARE DI LAJATICO
nexi
GOLD
CREDIT
4922 2308 2466 9883
MM/AA
MM/AA
COGNOME NOME
VISA



La matematica nell’Arte figurativa e nell’Architettura

LA PROSPETTIVA

Duccio da Boninsegna – Madonna Rucellai - 1285

Pietro Lorenzetti – La Nascita della Vergine -1342

Ambrogio Lorenzetti
Annunciazione - 1344

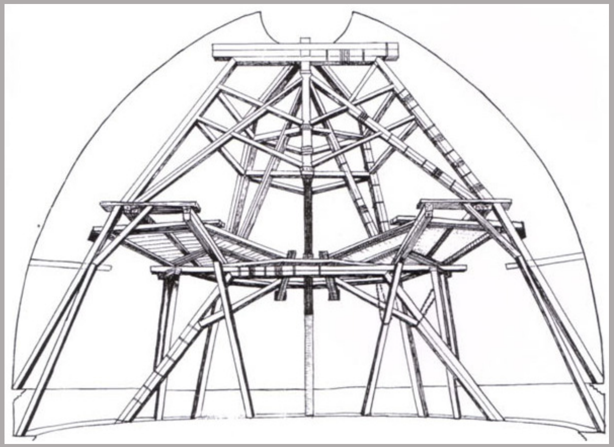
La rappresentazione della realtà

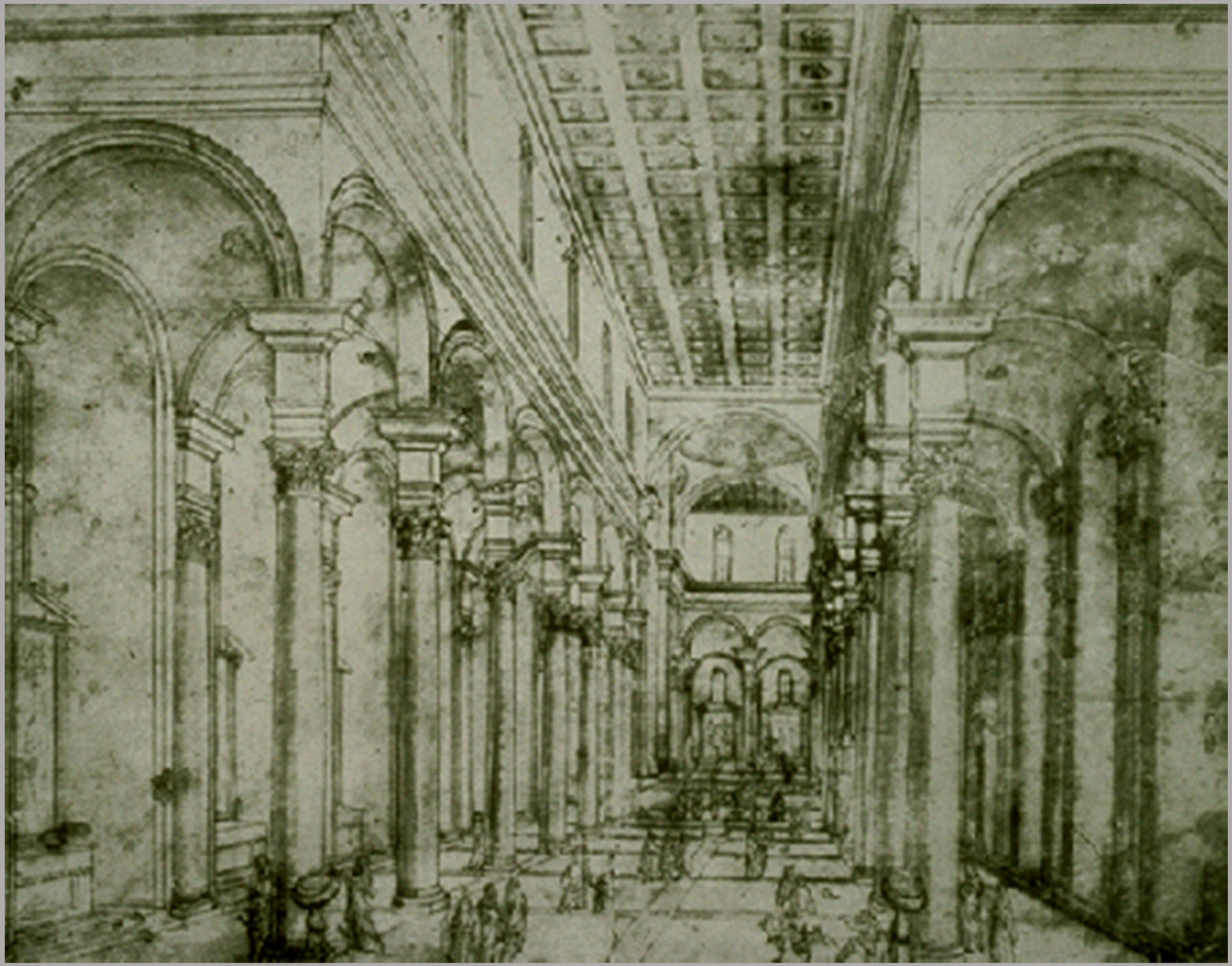
Filippo Brunelleschi
1377- 1446

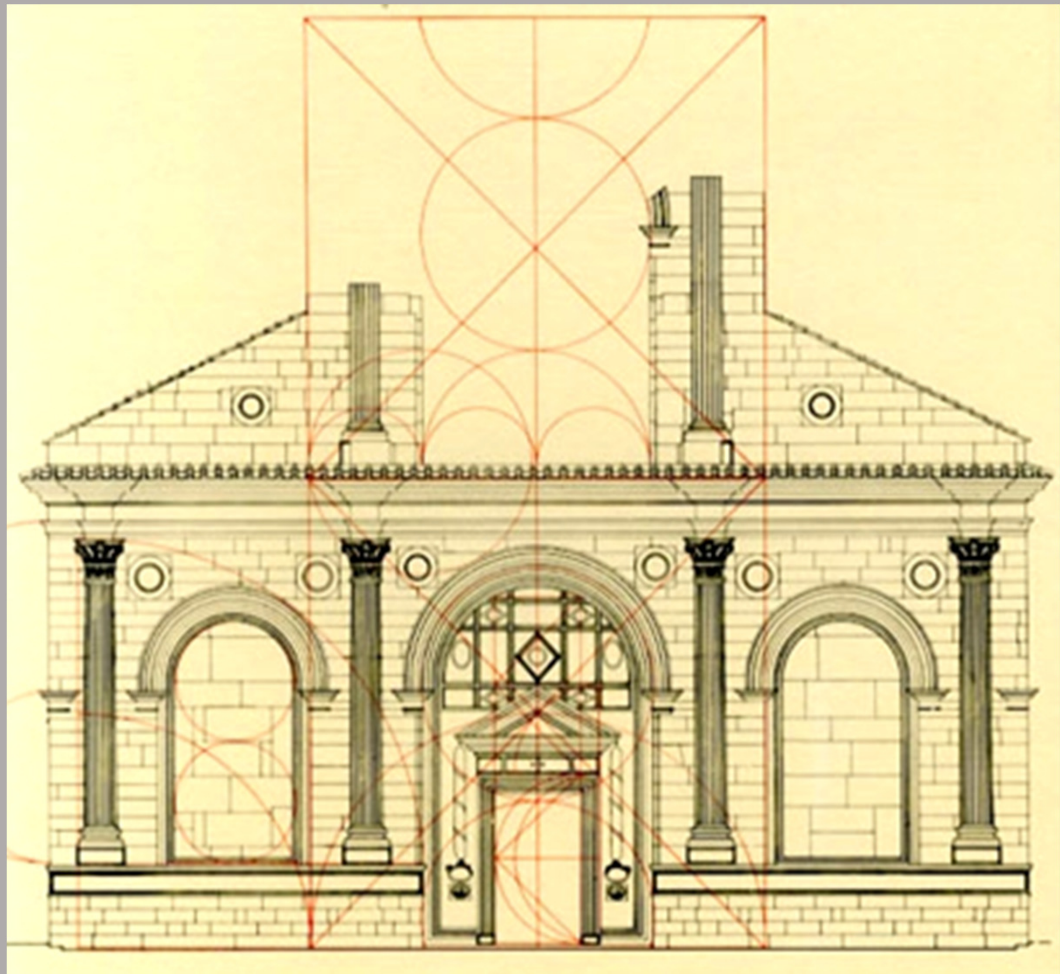
Leon Battista Alberti
1404-1472

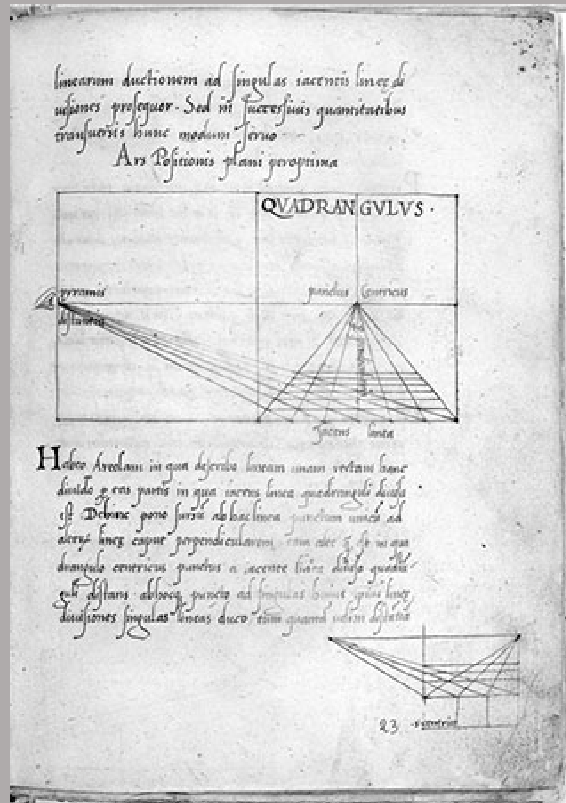
Piero della Francesca
1416/17-1492


FLIPPO.BRVNELLES



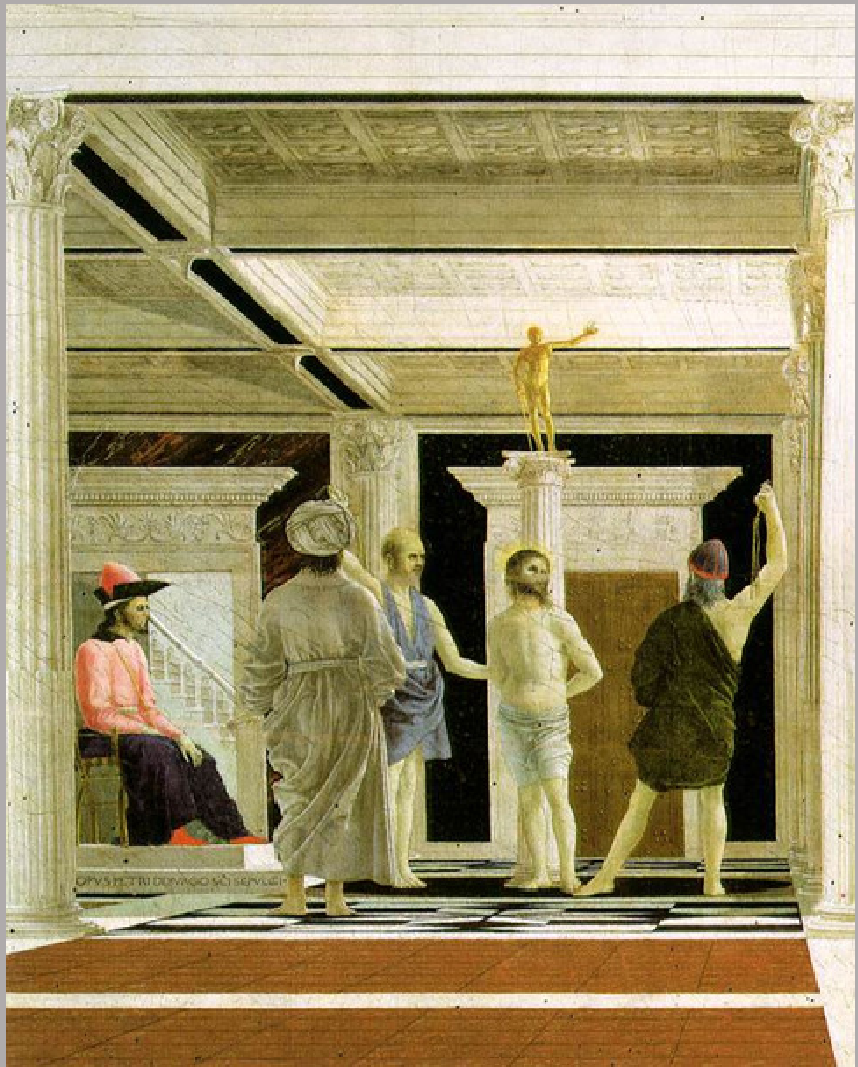





linearum ductionem ad singulas iacentis lineae divisiones prosequor. Sed in successivis quantitatibus transfuerit hunc modum servo
Ars Positionis plani perceptima
QVADRAN GVLVS ·
pyramis
punctus centricus
iacens linea
23

L'idea di descrivere un oggetto non a partire dall'oggetto stesso, ma da i vari modi in cui possiamo vederlo, … di dare maggiore peso alle leggi di rappresentazione più che all'oggetto stesso è certamente l'idea più originale e moderna che ispira tutto il trattato di Piero della Francesca

A.A.V.V. (1989) L'occhio di Horus, In: M. Emmer (Ed.)



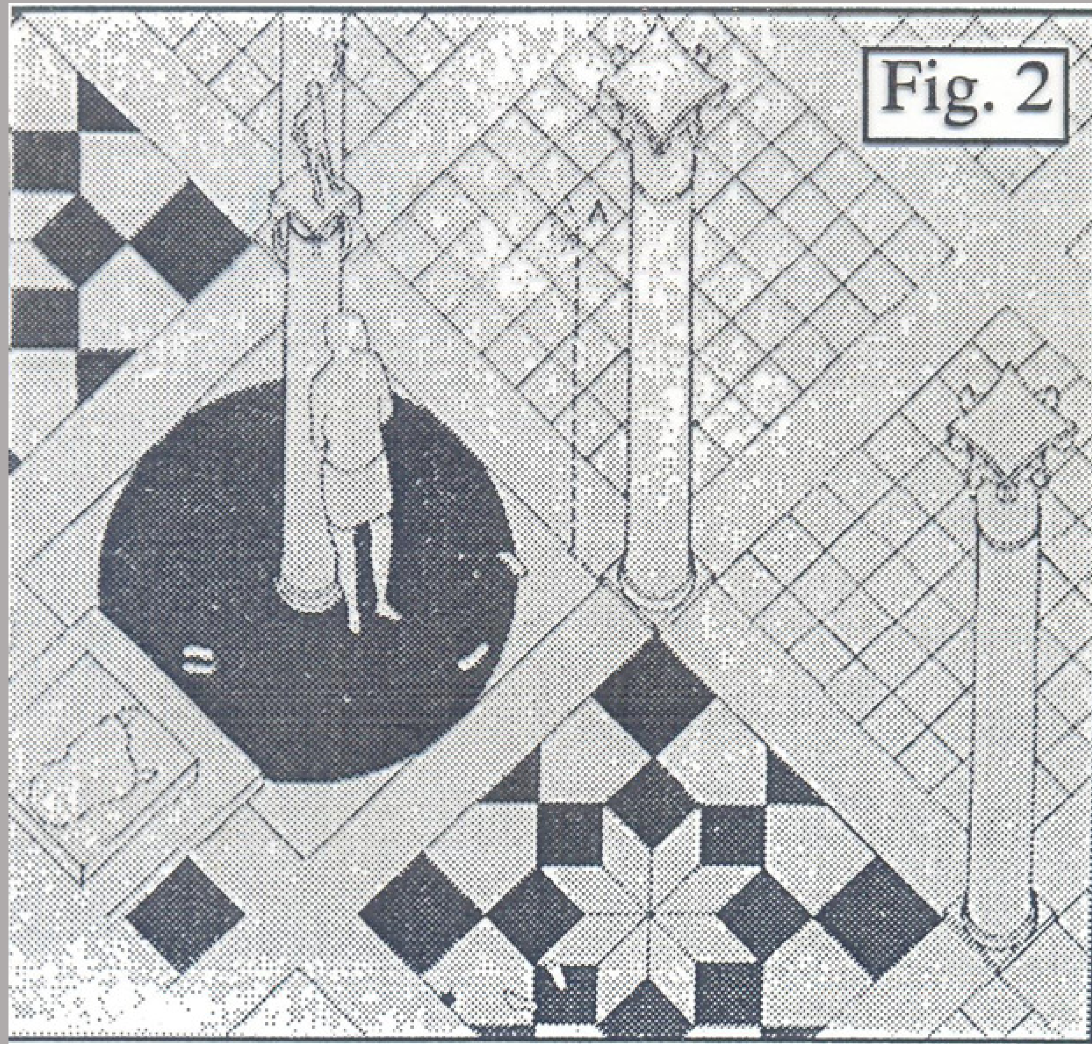
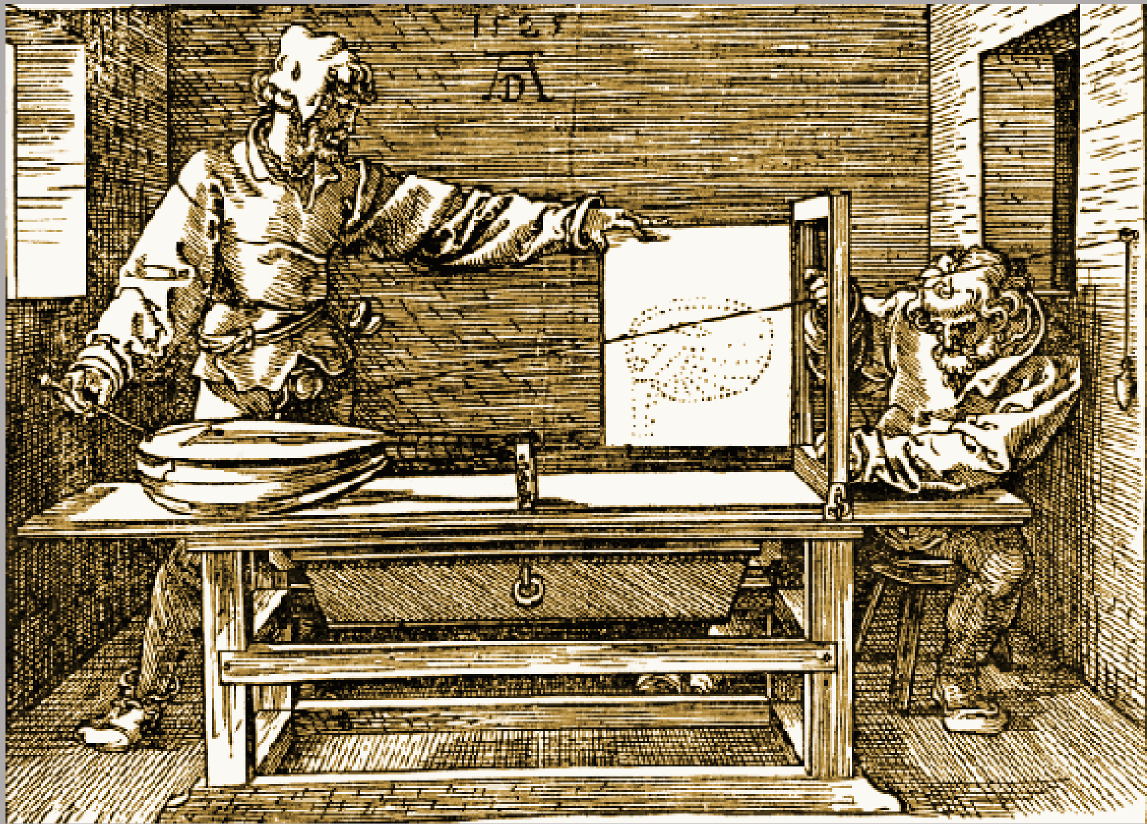


Fig. 2



Albrecht Durer (1471-1528)

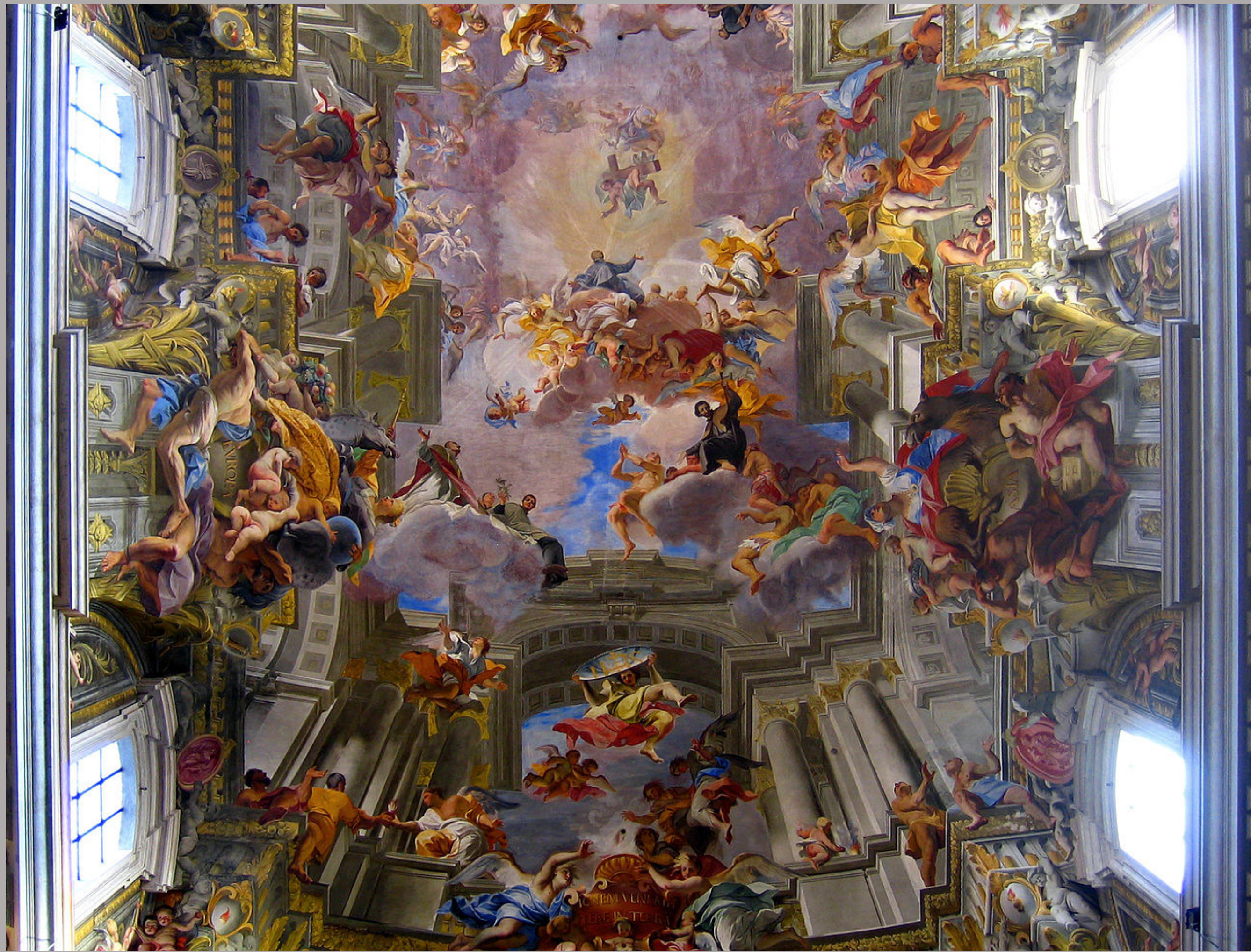
Geometria proiettiva

Nessun ramo della matematica compete con la geometria proiettiva in originalità di idee, coordinamento di intuizioni nella scoperta e rigore nelle dimostrazioni, … e generalità. La scienza nata dall'arte si rivelò un'arte.

Morris Kline (1955)

Hans Holbein
The Young Ambassadors
(1533)

Fingere una realtà che affascina, ma non esiste



Roma - Chiesa di Sant’Ignazio - **Andrea Pozzo (1685)**

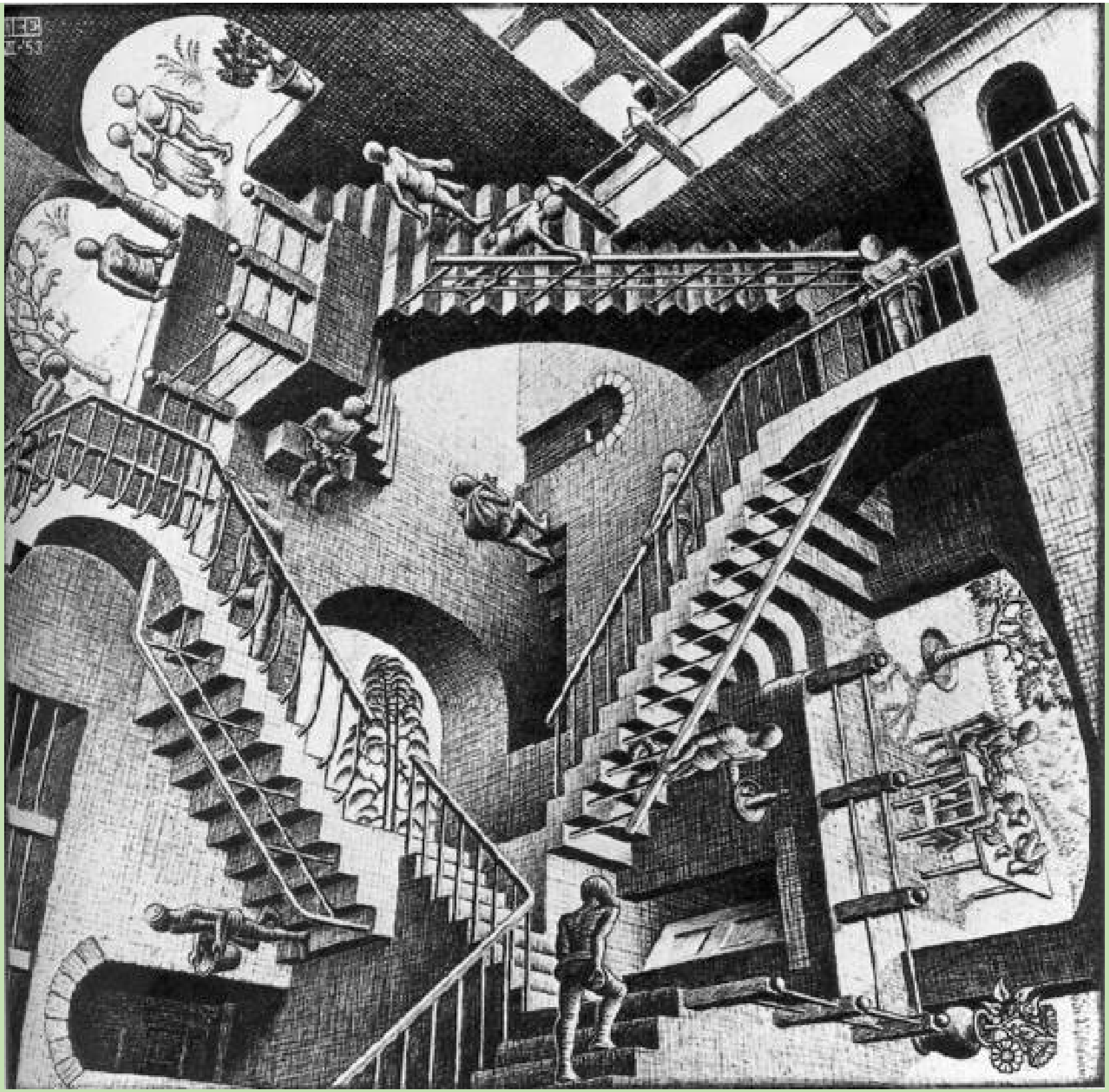
Le opere 2D -3D

di

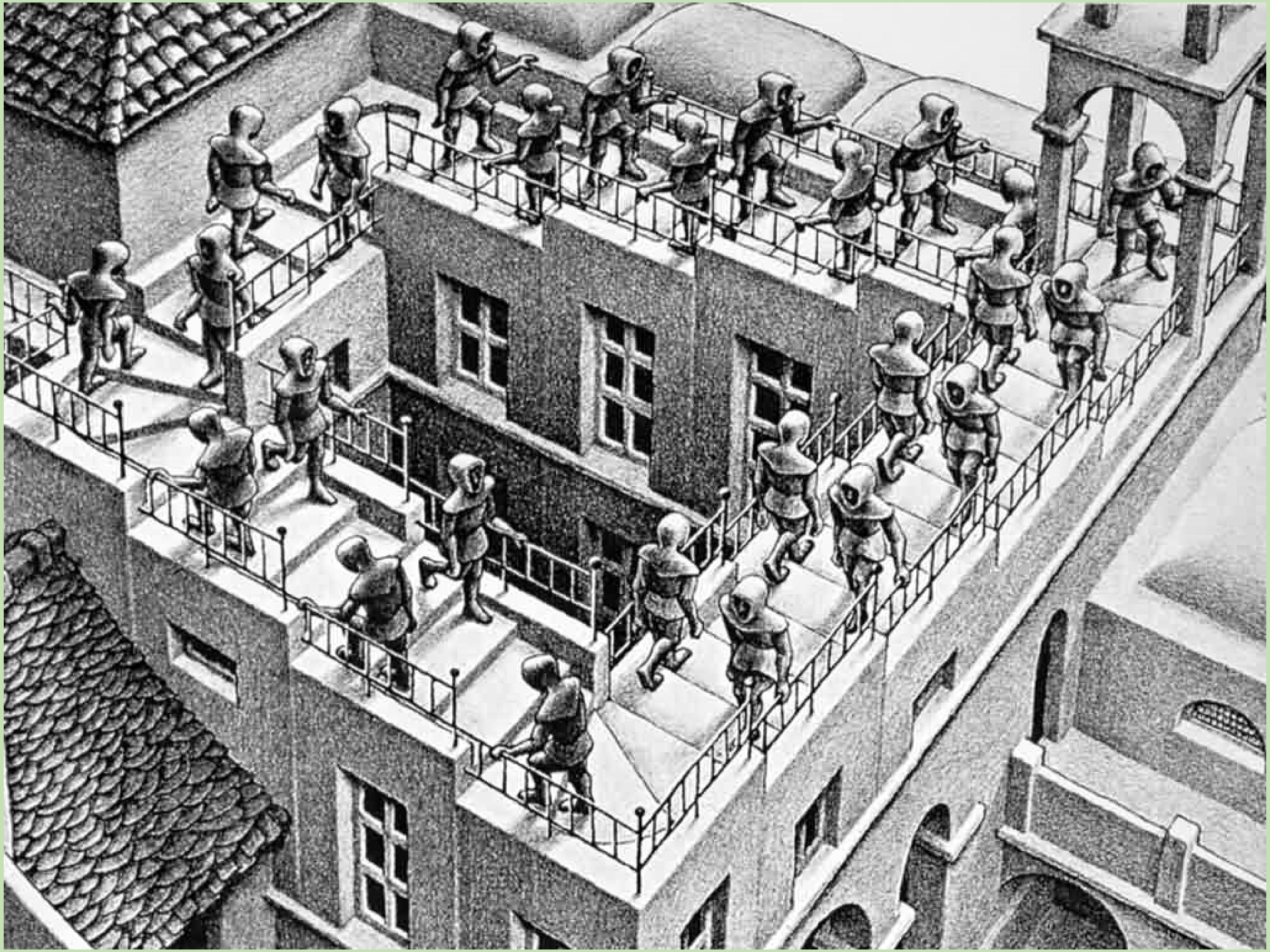
Eduardo Relero


Technology

Relatività, 1953

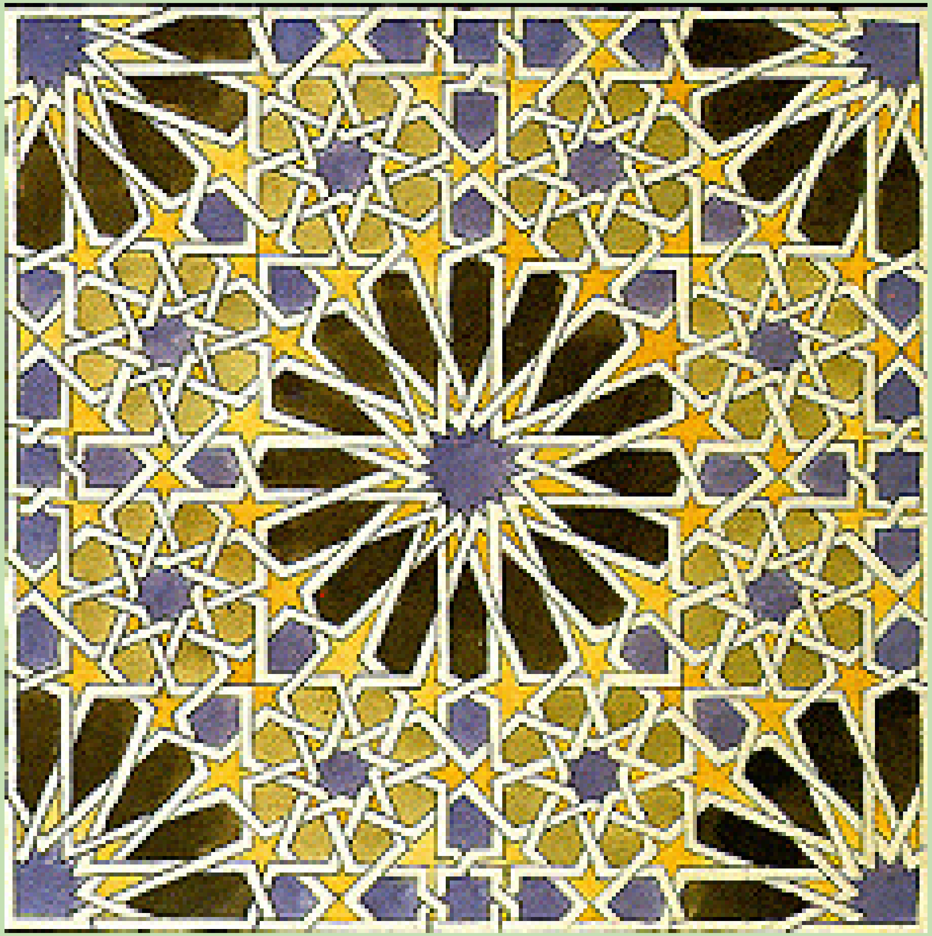


Salita e discesa, 1960

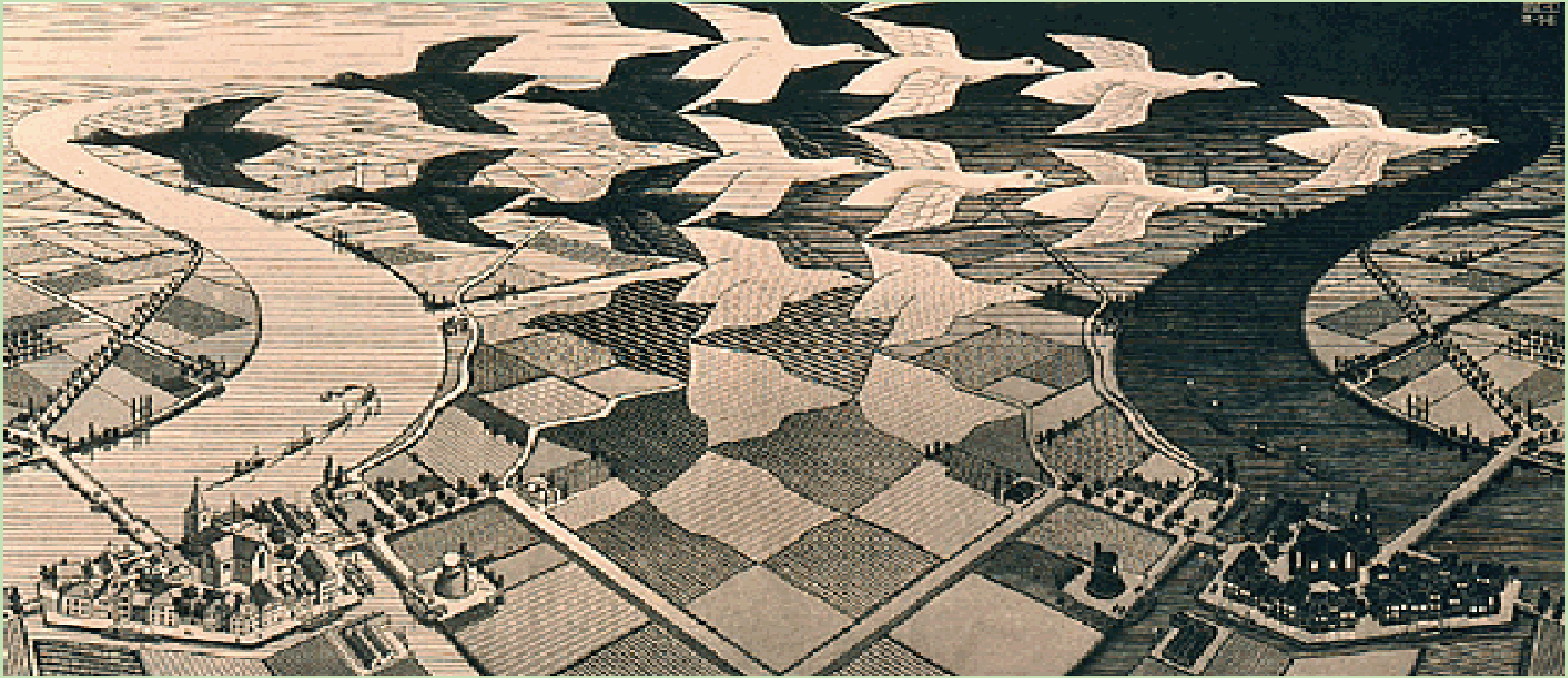


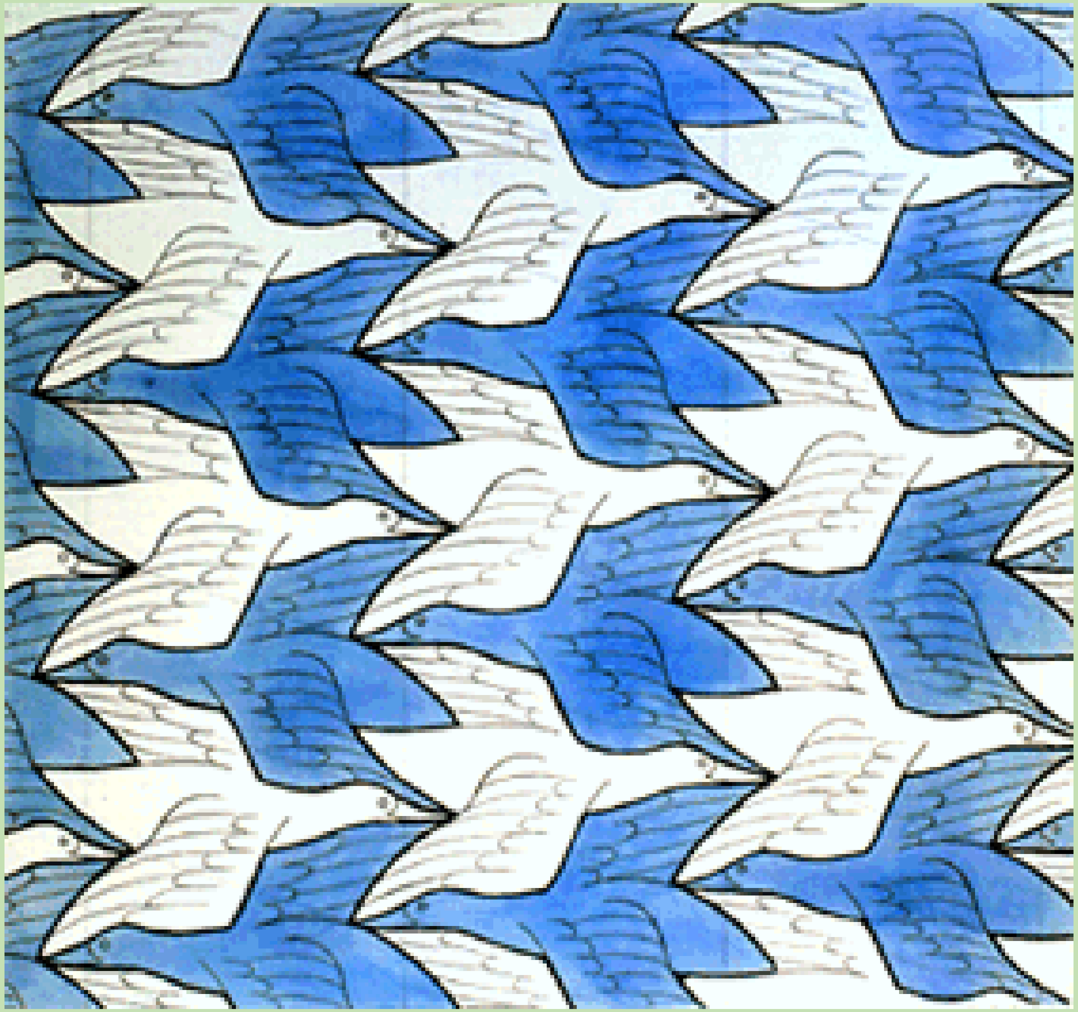
Maurits Cornelius Escher
(1898- 1972)

Maioliche dell'Alhambra a Granada



Giorno e notte, 1938





Vighi, P. (1998). Matematica e arte,
L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 21A-B, **6**, 565-583.

Rettili, 1943

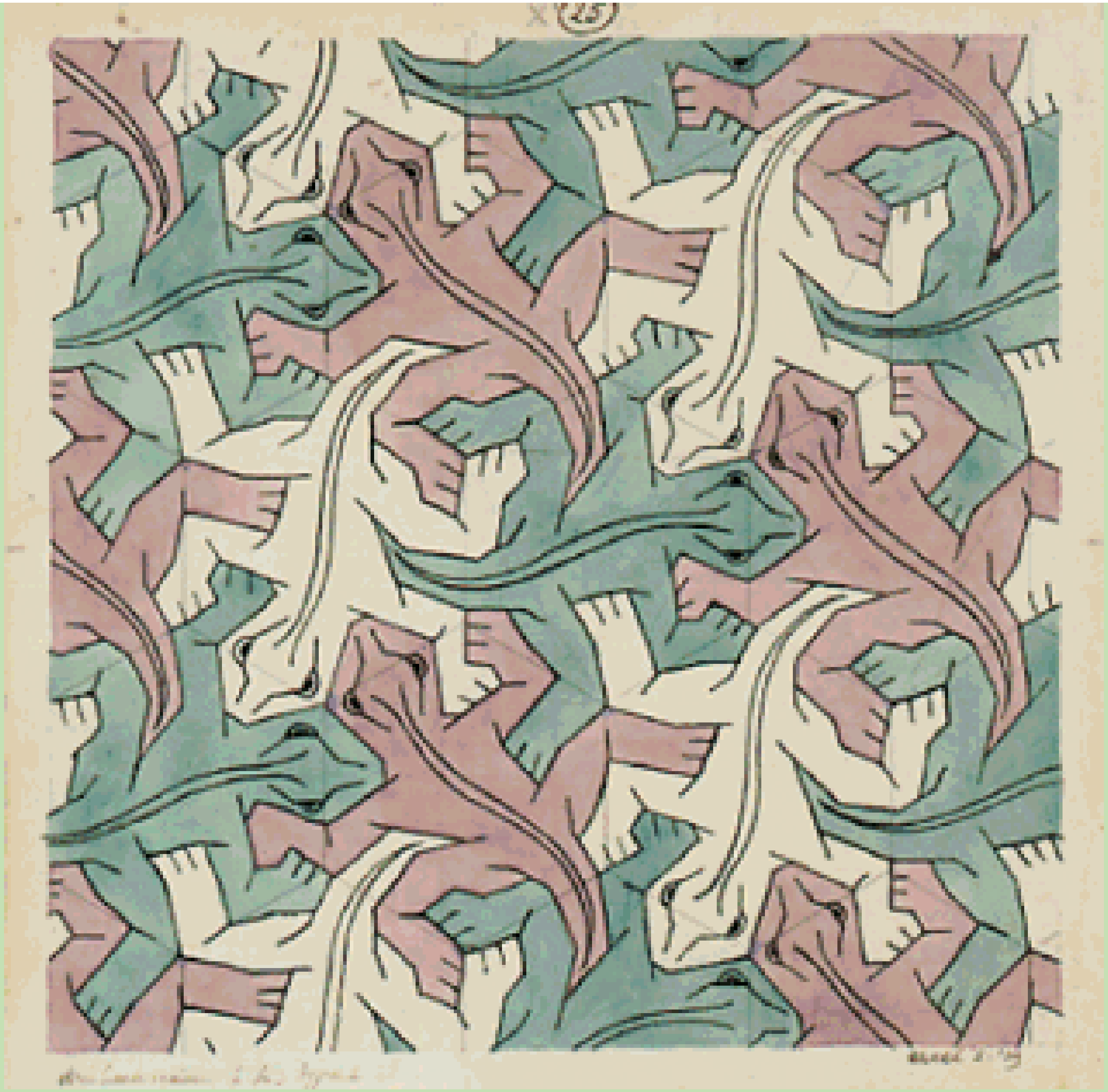
“Abbiamo almeno tre livelli secondo i quali studiare
l’opera basata sulle tassellazioni:
quello delle figure che generano la composizione,
quello delle trasformazioni che portano l’una nell’altra le figure
e
quello del gruppo di tali trasformazioni.”

(Speranza F., *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora ed., 1997, p.169)

1) le figure che generano la composizione sono dei rettili

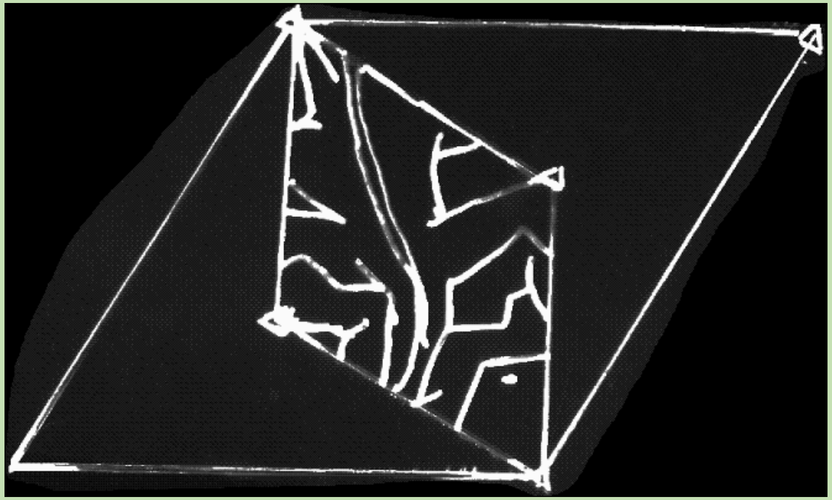
2) le trasformazioni usate sono traslazioni e rotazioni

3) per l’individuazione del gruppo di trasformazioni occorre determinare la cosiddetta ***maglia elementare*** e, all’interno della maglia, il cosiddetto ***campo fondamentale***



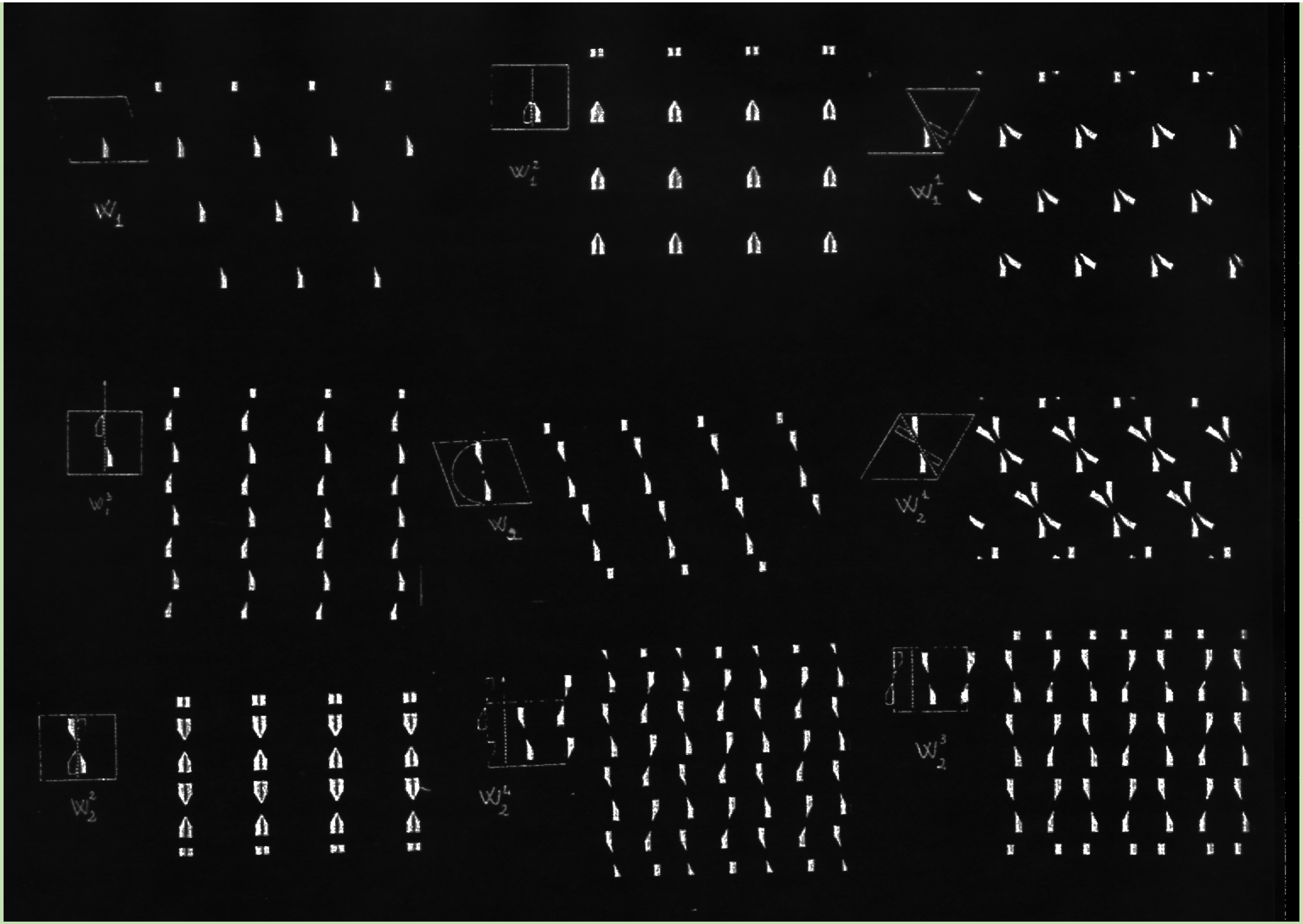
La maglia elementare è in questo caso un rombo

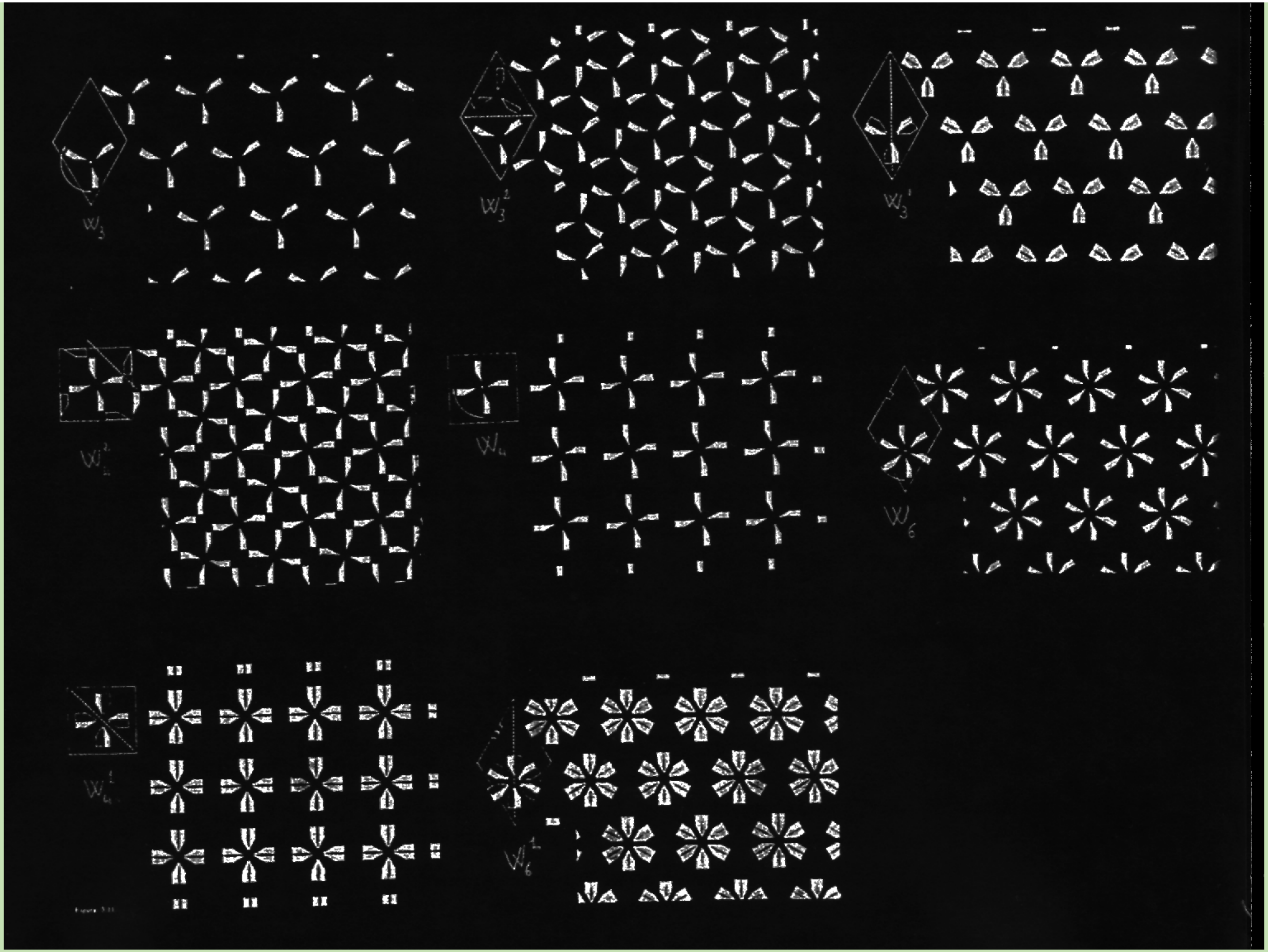
Il campo fondamentale è ancora un rombo, contenuto nel precedente



Nella classificazione dei 17 gruppi di tassellazioni questo rientra nel tipo classificato p_3:

si tratta di un gruppo generato da due rotazioni di 120°

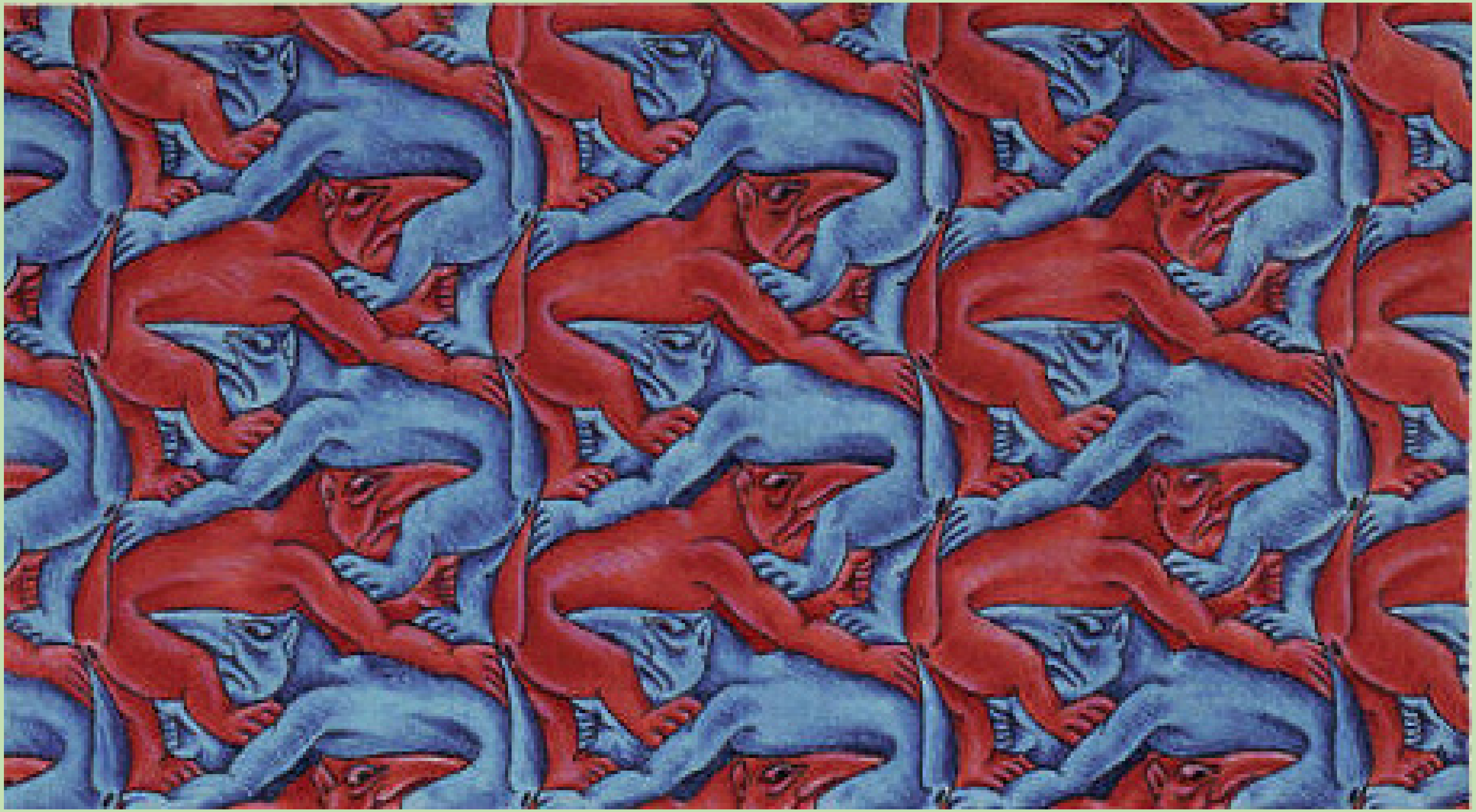


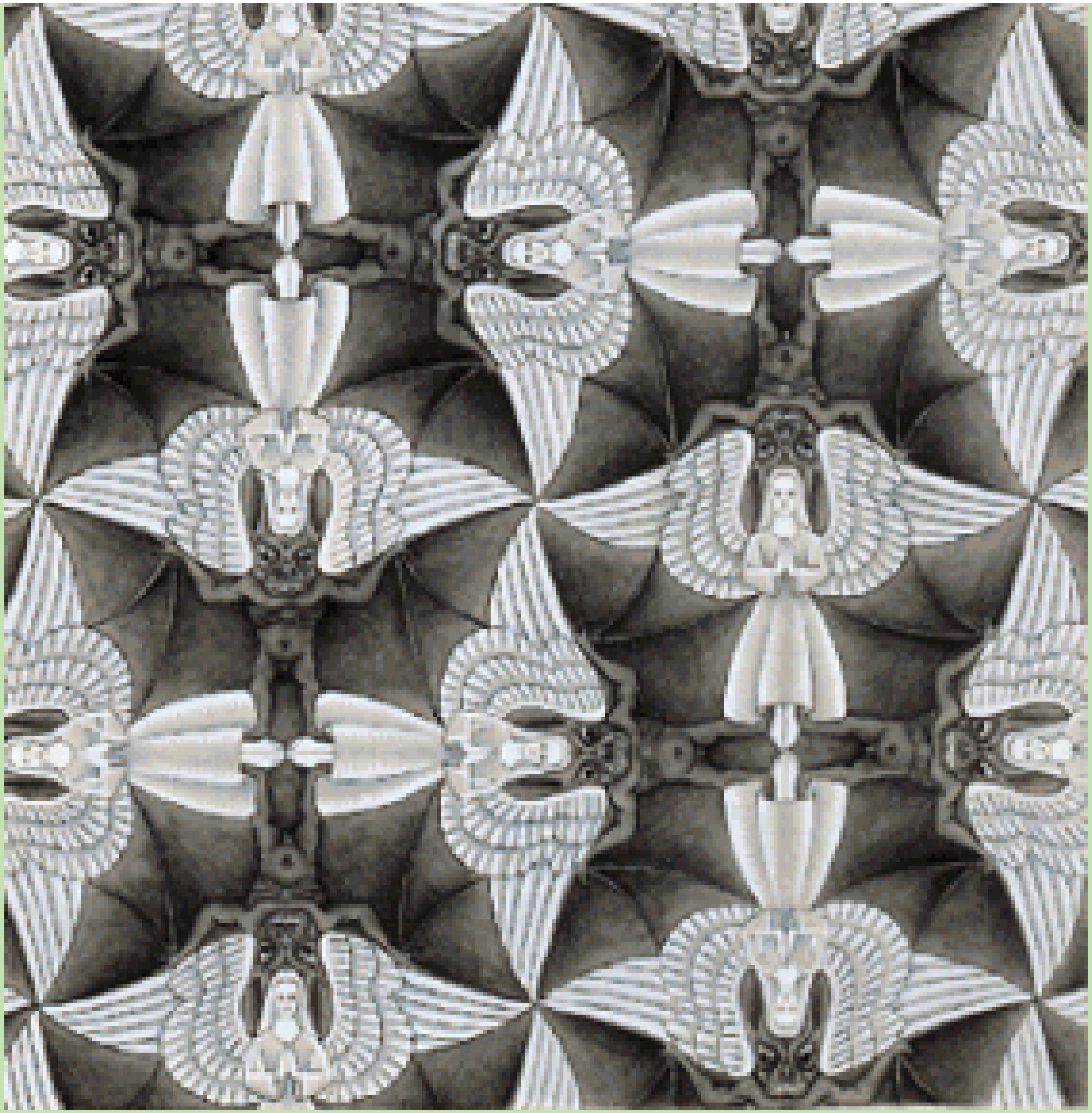


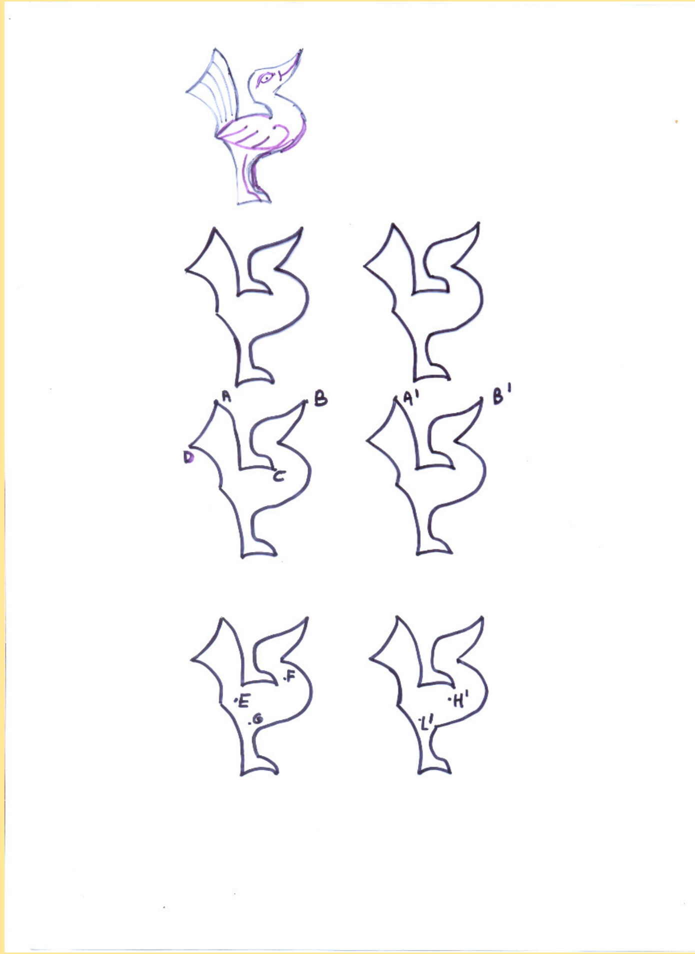
A proposito della cosiddetta *divisione regolare del piano*, uno dei temi più importanti della sua produzione Escher scrive così:

"[...] è la fonte più ricca dalla quale ho attinto la mia ispirazione, tuttora inesaurita. I disegni simmetrici [...] dimostrano come si possa suddividere il piano regolarmente in figure uguali, o meglio, come si possa, con queste, riempirlo."

(Escher, 1990, p. 7)

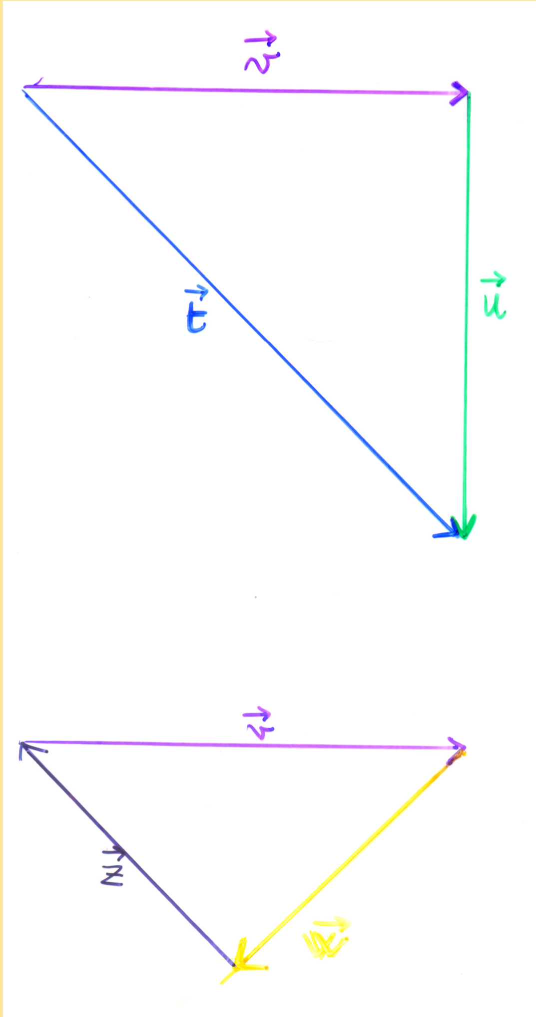






Vighi, P. (2002). *Fare matematica con le opere di M.C.Escher*, Biblioteca dei 500 di Ulisse, Ulisse-Nella rete della scienza, http://ulisse.sissa.it

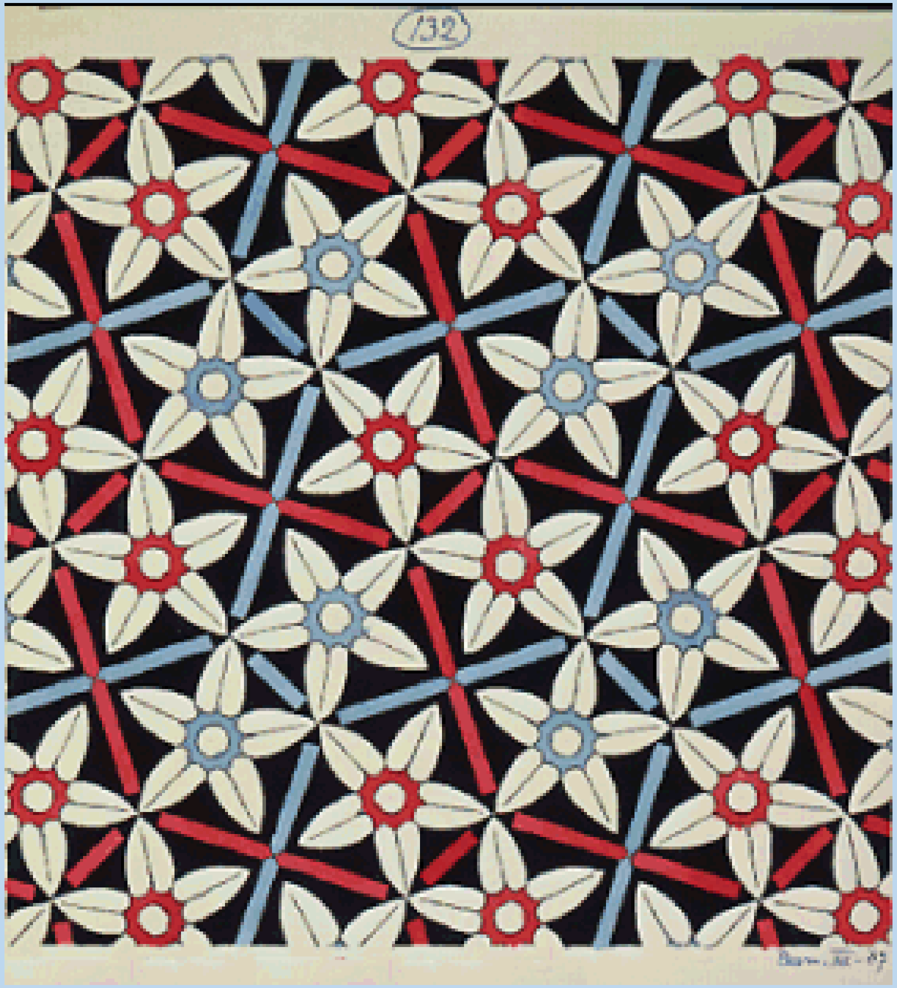

1
2
3
4
5

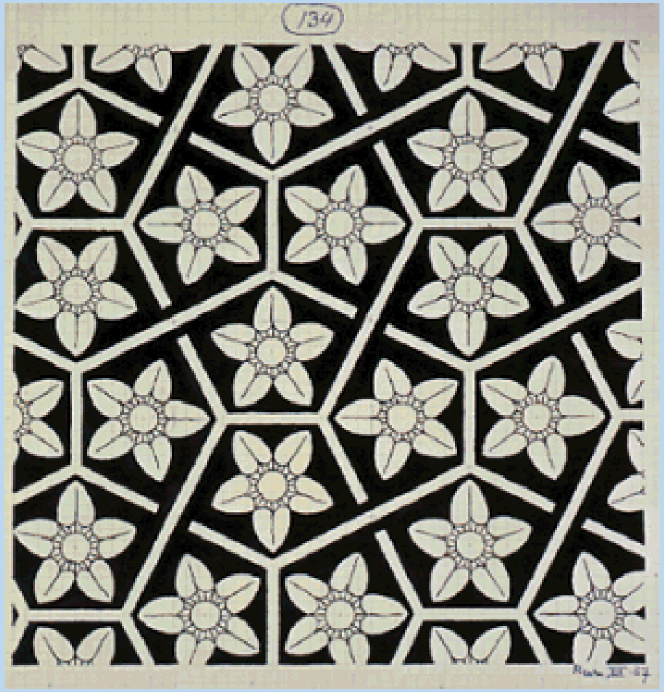

$\vec{v}$
$\vec{t}$
$\vec{u}$
$\vec{v}$
$\vec{z}$
$\vec{w}$

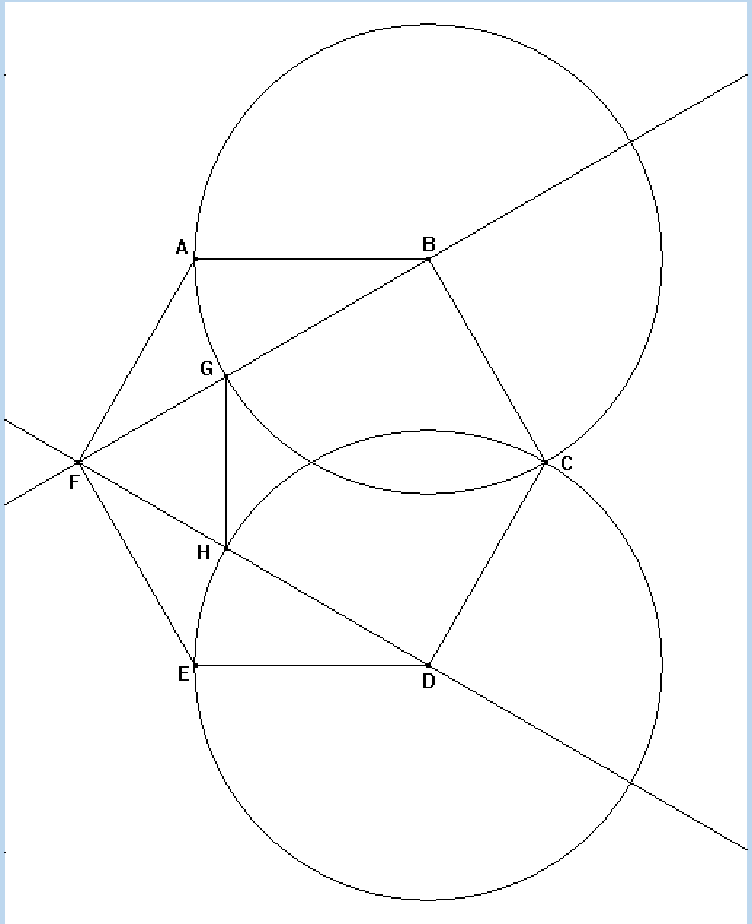
Tappe seguite nell’ambito di ciascuna unità didattica:

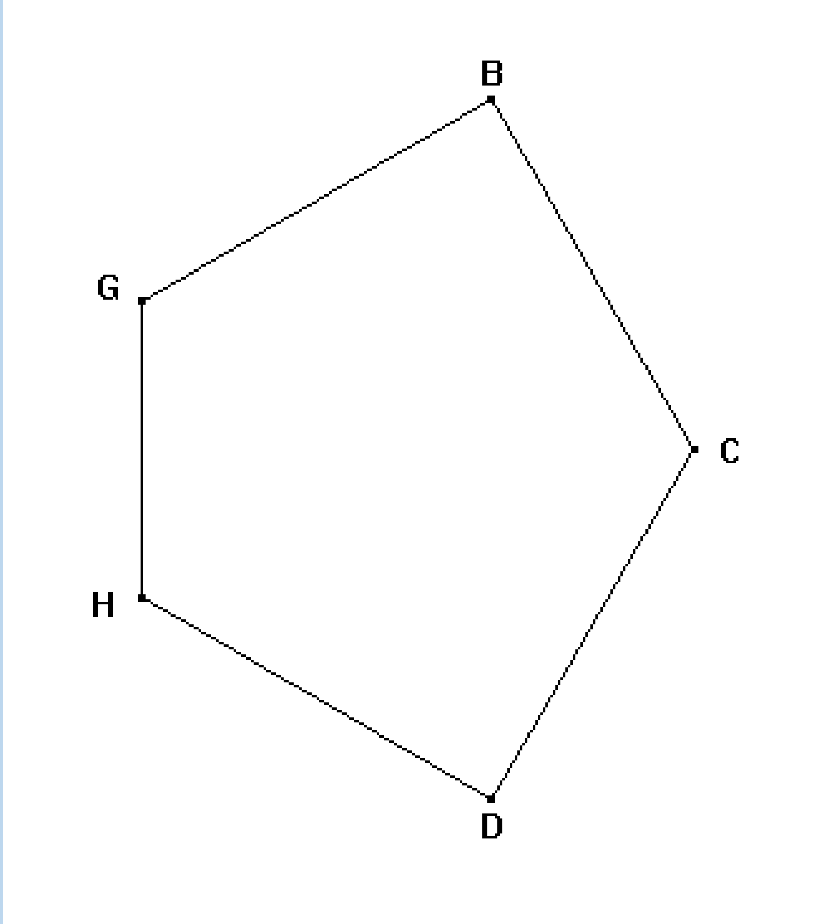
1) Presentazione di un disegno di Escher ed osservazioni di carattere qualitativo
2) Individuazione di un motivo-base
3) Descrizione del movimento che fa passare da una figura ad un’altra
4) Riproduzione del disegno originale
5) Individuazione delle proprietà della trasformazione su cui si basa il disegno
6) Individuazione di punti corrispondenti
7) Studio della linea descritta da un punto durante il movimento
8) Studio degli invarianti
9) Studio di una trasformazione come corrispondenza biunivoca
10) Composizione di trasformazioni

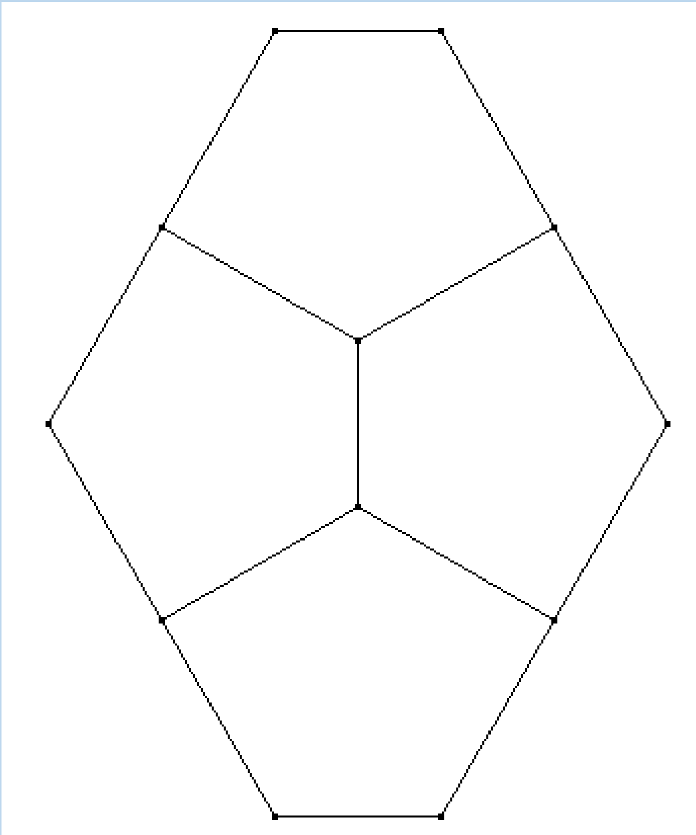
Un'esperienza

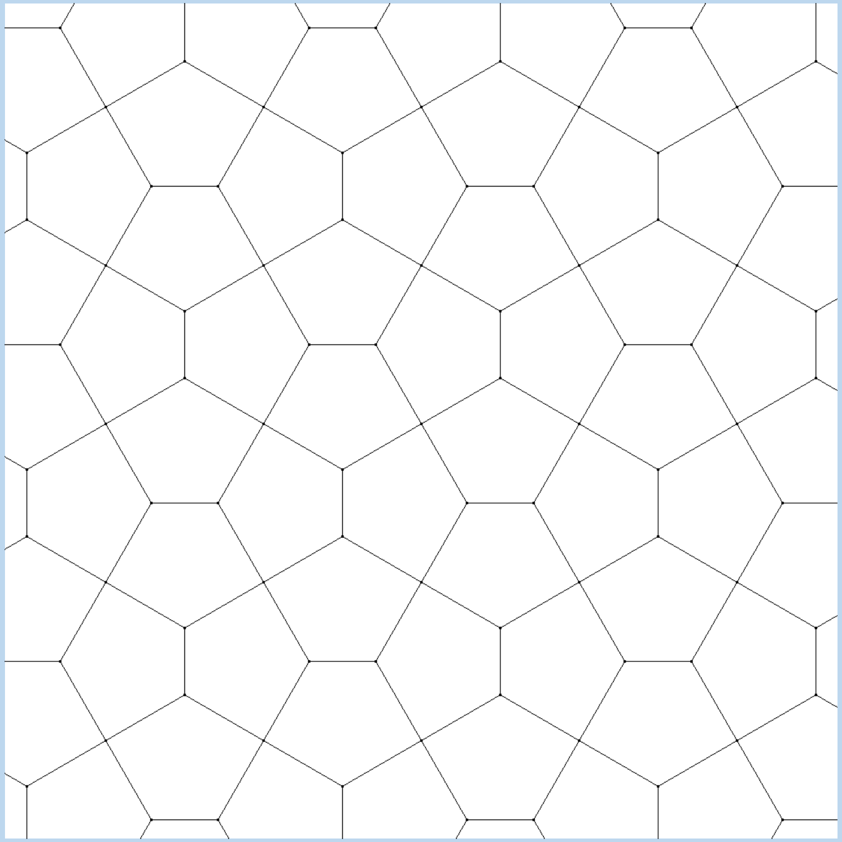


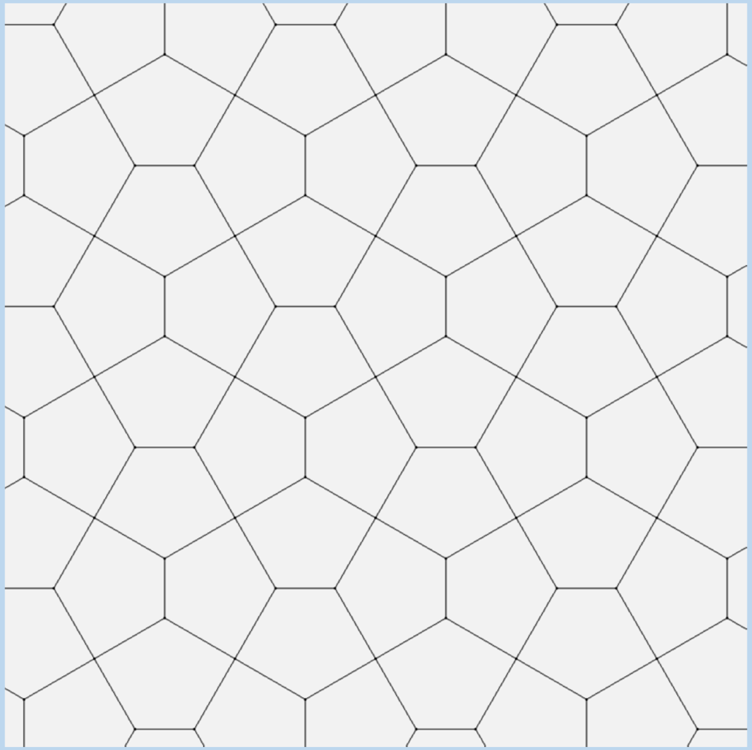


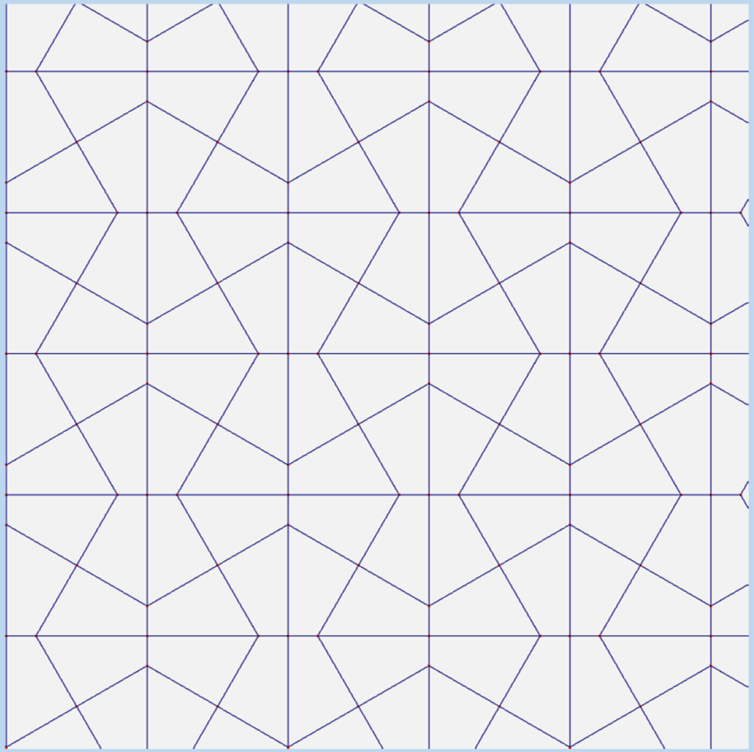

A
B
G
F
C
H
E
D

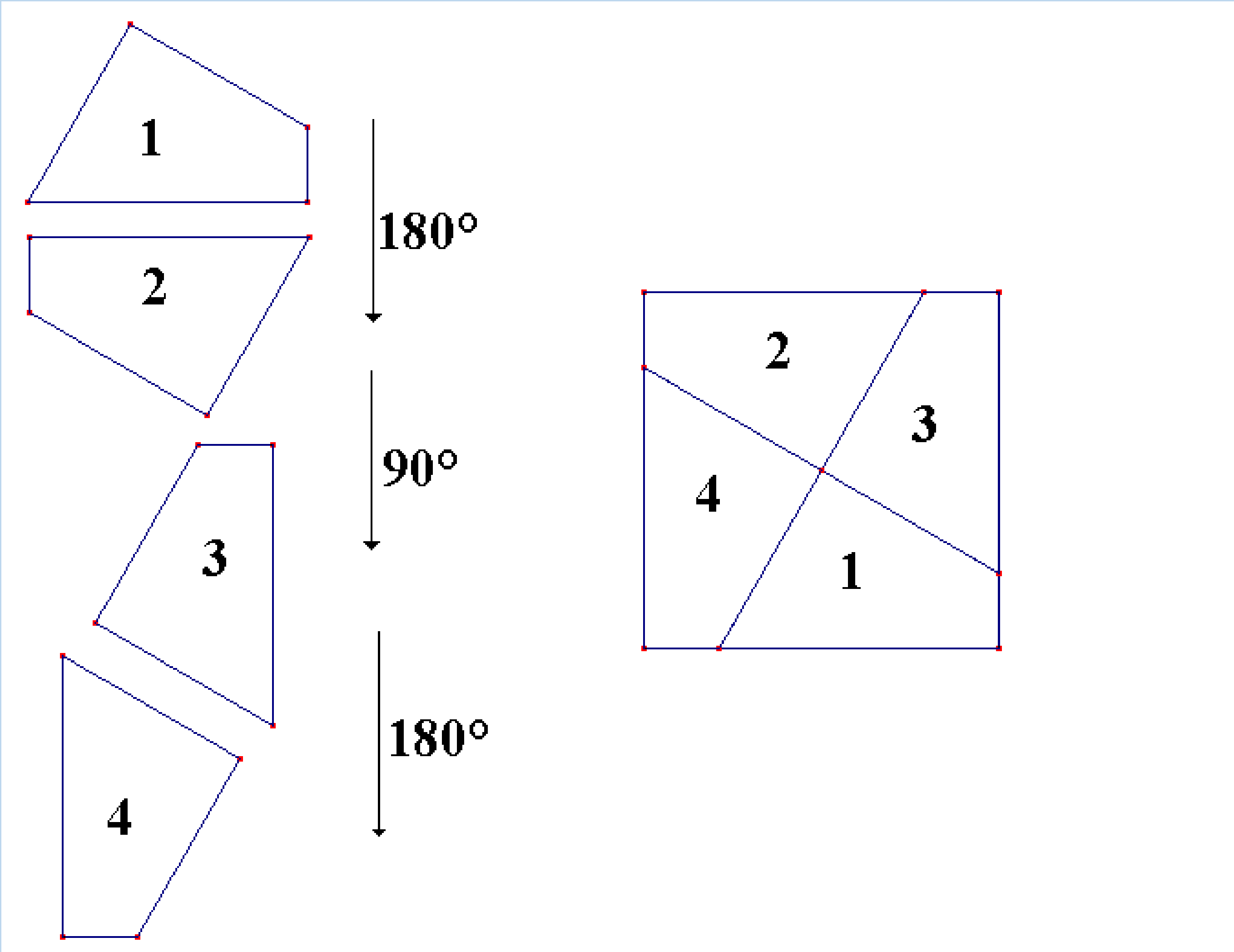

B
G
C
H
D





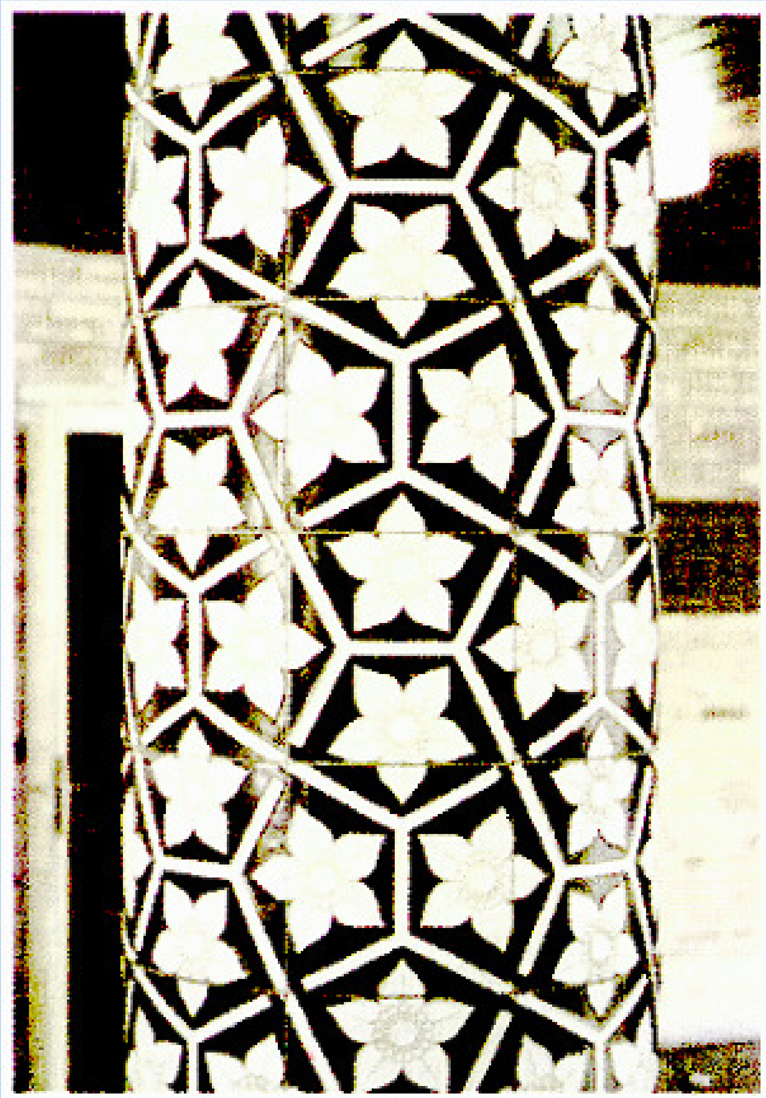




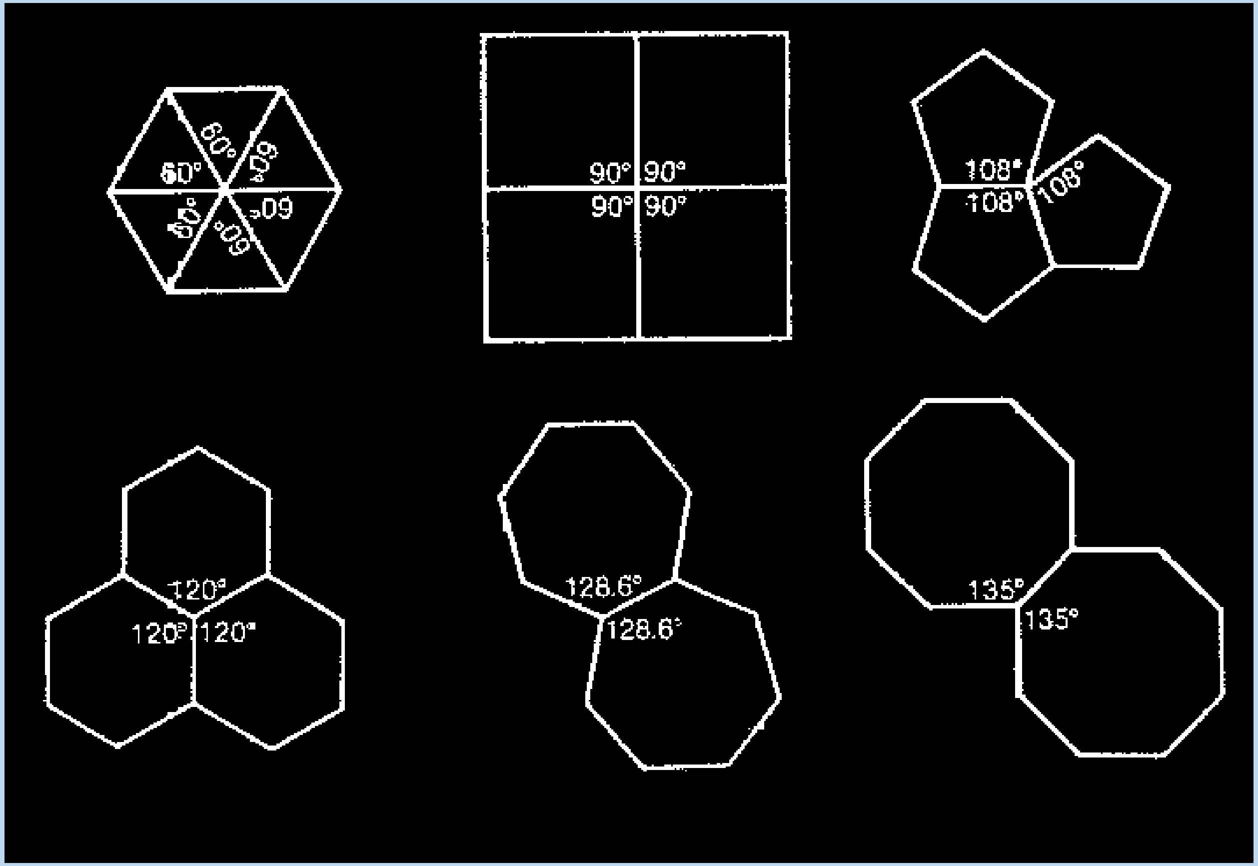

1
2
3
4
180°
90°
180°
2
3
4
1

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Gruppo di tipo p4g



Tra i poligoni regolari, solo triangoli equilateri, quadrati ed esagoni tassellano il piano



TASSELLAZIONI PENTAGONALI

1975 M. Gardner
La tassellazione del piano con poligoni convessi

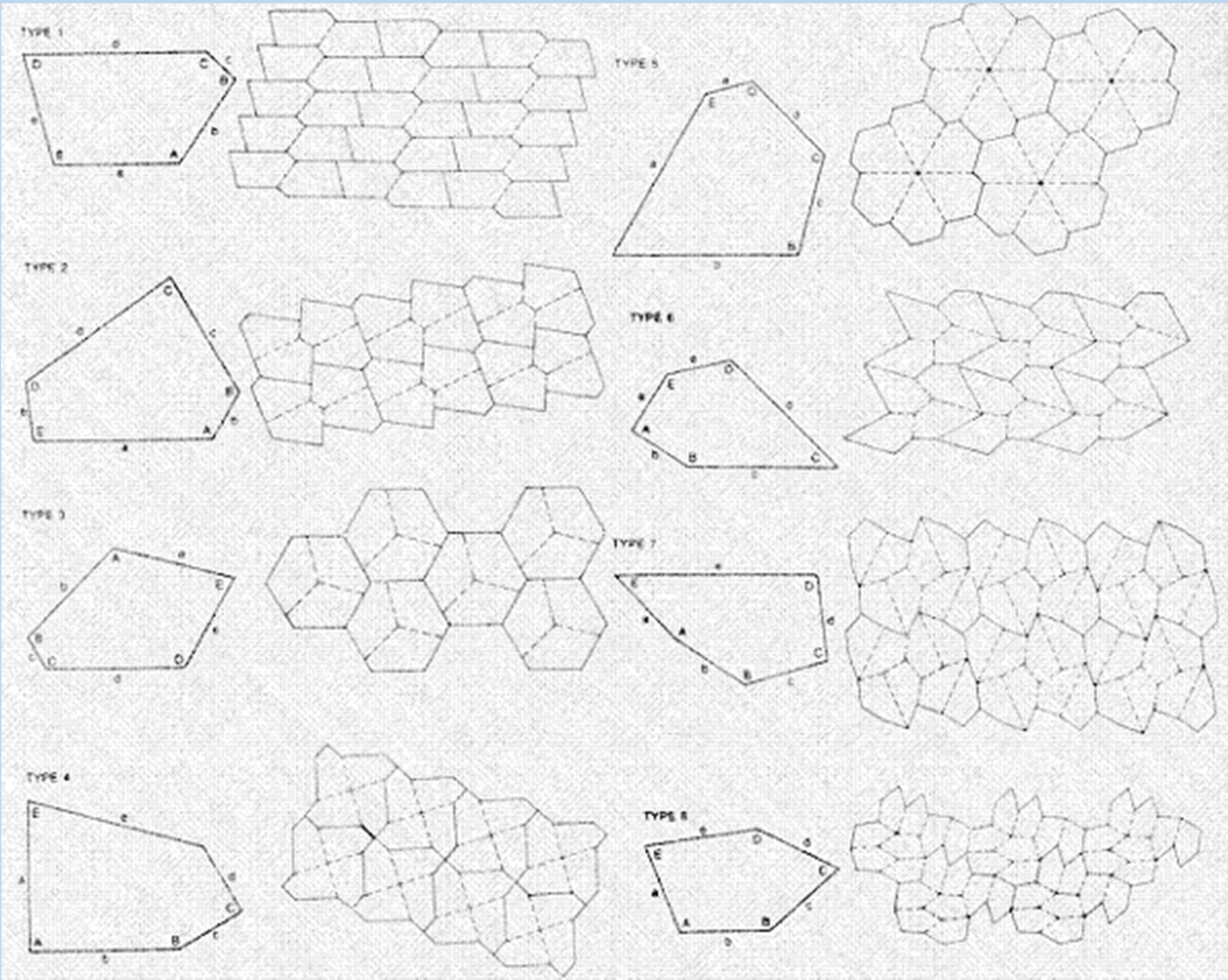
1918 Reinhard *3 tipi di esagono e 5 tipi di pentagono*

1968 Kershner *altri 3 tipi di pentagono*

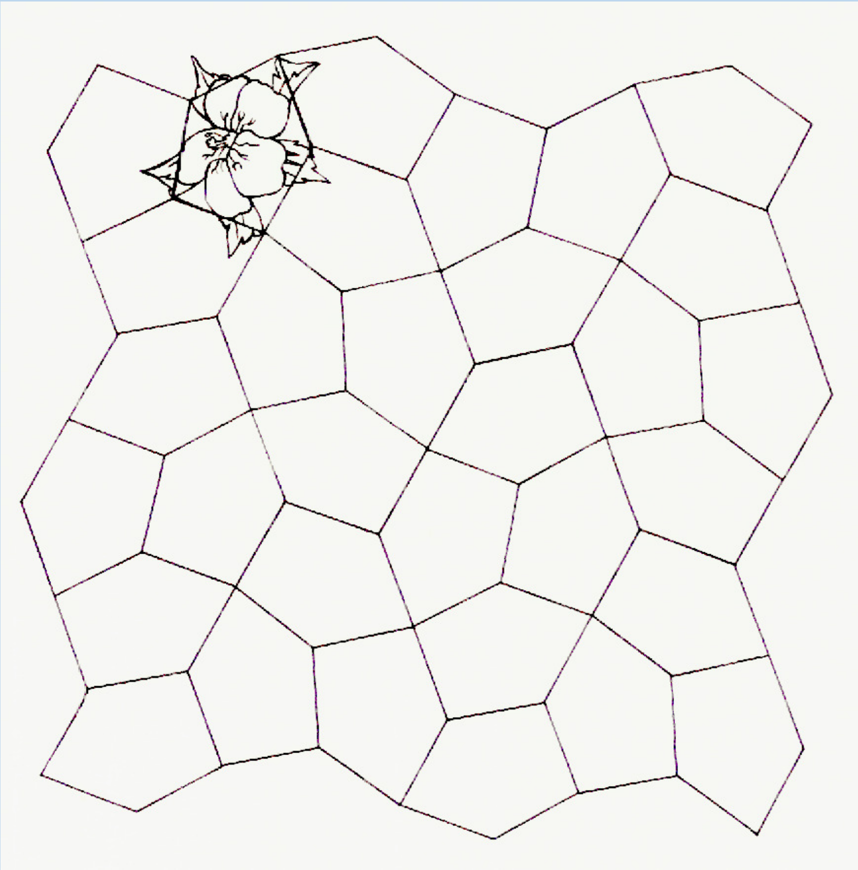
1975 R. James *altro tipo di pentagono*

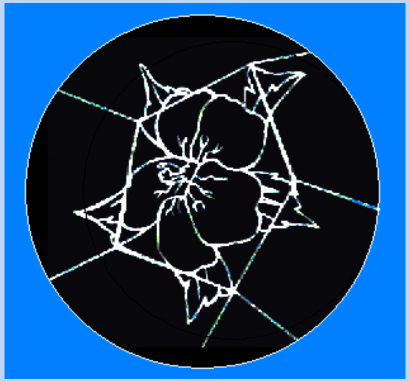
1976 M. Rice *decimo tipo di pentagono*

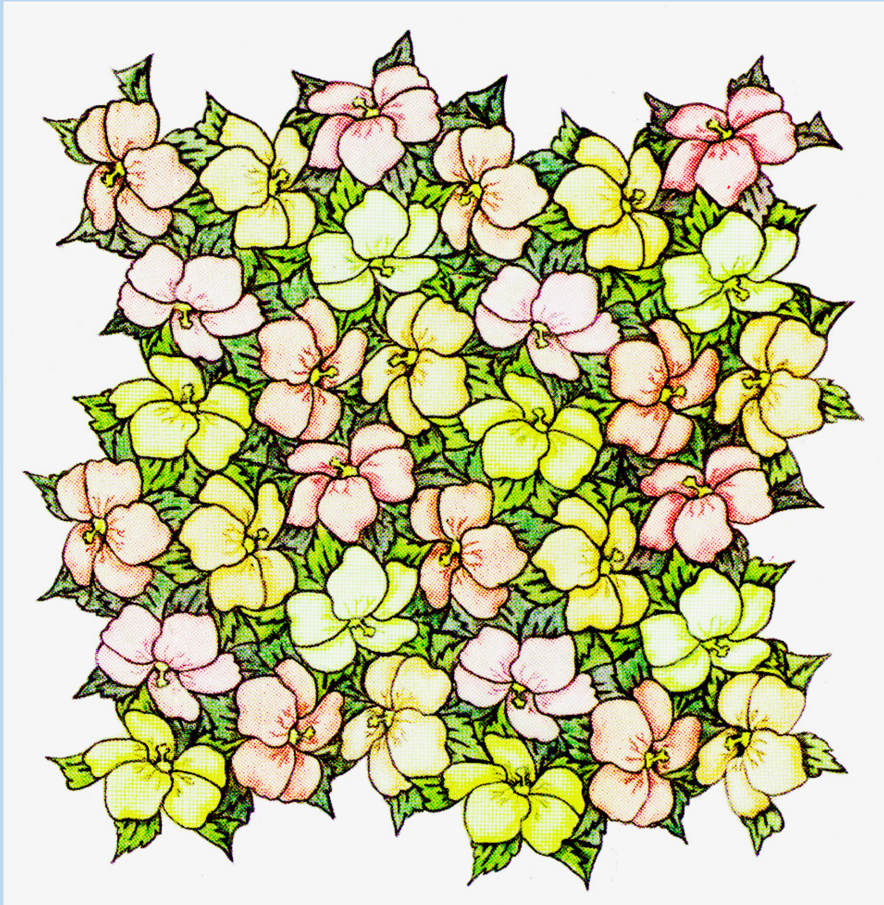
1978 I. Niven
poligoni con 7 o più lati non possono tassellare il piano

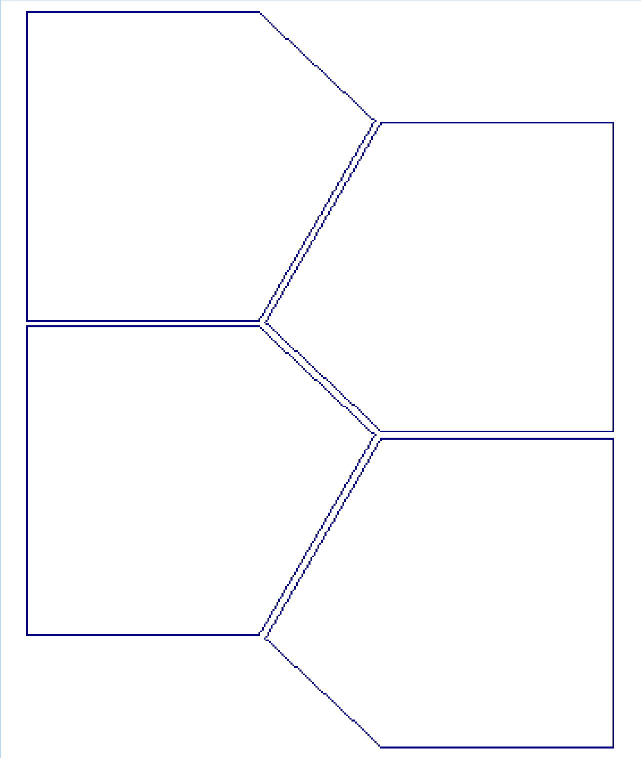


1. $A + B + C = 360°$.
2. $A + B + D = 360°$, and $a = d$.
3. $A = C = D = 120°$, and $a = b$, $d = c + e$
4. $A = C = 90°$, and $a = b$, $c = d$.
5. $A = 60°$, $C = 120°$, and $a = b$, $c = d$.
6. $A + B + D = 360°$, $A = 2C$, and $a = b = e$, $c = d$.
7. $2B + C = 2D + A = 360°$, and $a = b = c = d$.
8. $2A + B = 2D + C = 360°$, and $a = b = c = d$.









Vighi, P. (2000). L’uso di mediatori artistici e informatici per l’insegnamento della Geometria, *Rivista di Matematica dell’Università di Parma*, 6, v. 3*, 183-197.

“[…] vidi un alto muro e poiché avevo il presentimento di trovare qualcosa di enigmatico e di sconosciuto, lo scavalcai faticosamente.

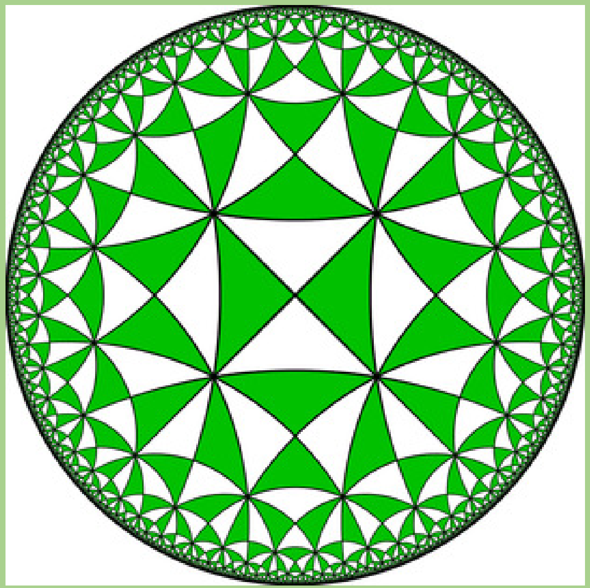
Dall’altra parte c’era un deserto che attraversai con grande fatica fino a quando, seguendo un complicato percorso, mi trovai su una soglia: davanti a me si spalancavano le porte della matematica.

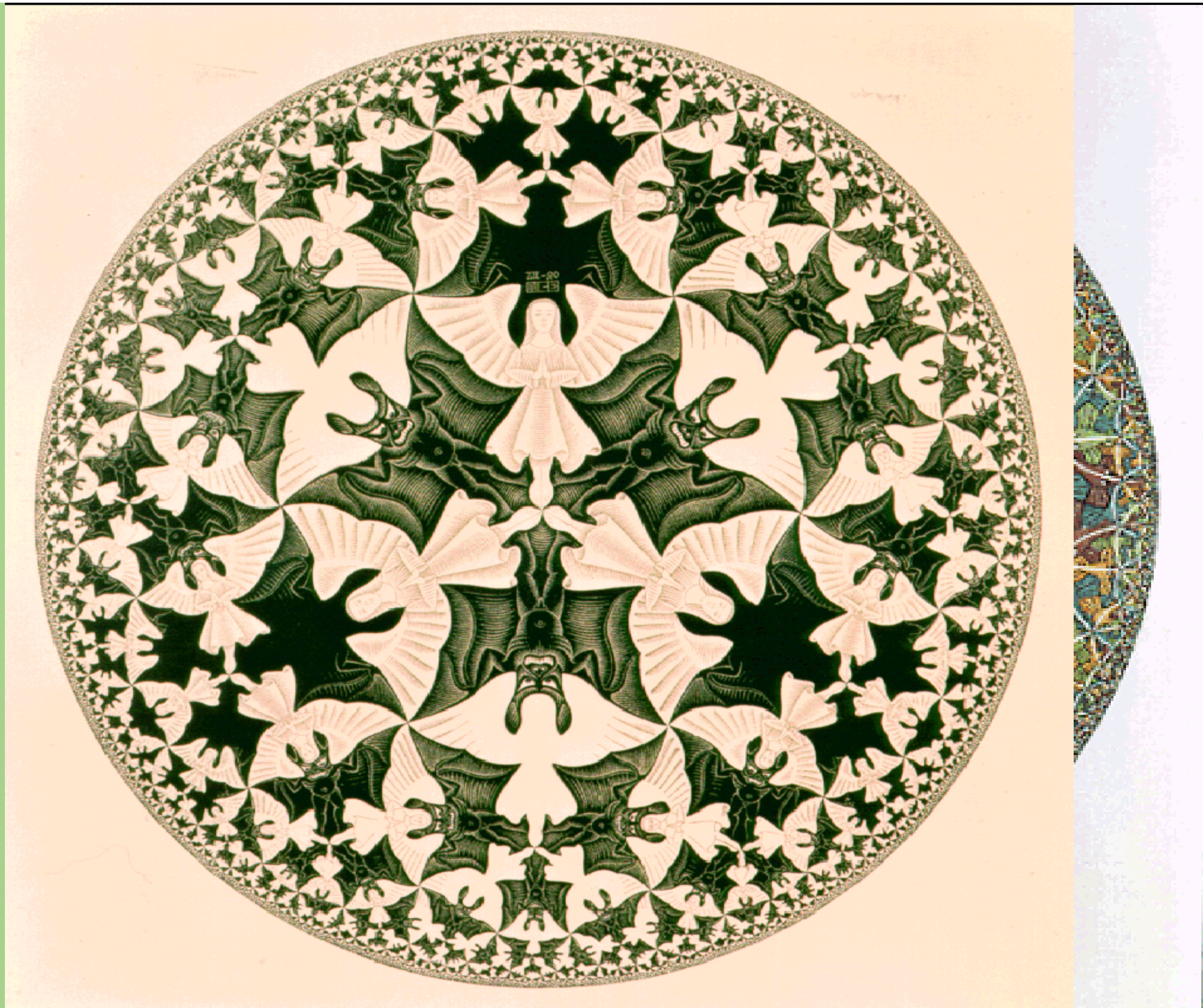
Da qui si dipartivano in diverse direzioni molti sentieri ben tracciati e da allora mi soffermo spesso in questo luogo. Talvolta mi pare di aver perlustrato l’intera zona, di averne percorso ogni sentiero e di averne ammirato ogni veduta; poi, improvvisamente, scopro un sentiero ancora inesplorato e assaporo nuove delizie”

(Schattschneider, 1992, p.21)

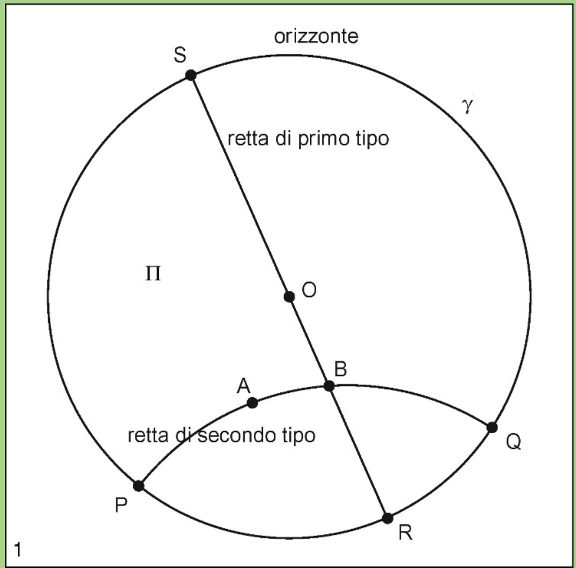
“... può succedere ... che qualcuno ... trascorrendo le sue giornate come altri artisti nelle creazione di immagini più o meno fantastiche, possa un giorno sentir maturare dentro di sé il consapevole desiderio di usare le sue immagini immaginarie per avvicinarsi all’infinito nel modo più puro e più preciso possibile”

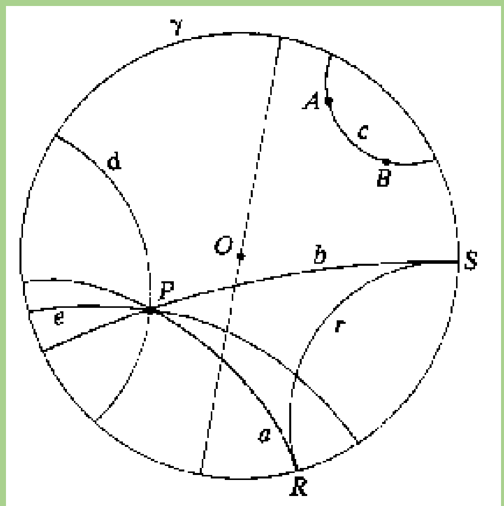
“ Che cosa è stato realizzato con l’ordinata suddivisione della superficie ...? Non ancora il vero infinito, ma comunque un frammento di esso, un pezzo dell’universo dei rettili. Se la superficie in cui essi si inseriscono fosse infinitamente grande, un numero infinito di essi potrebbe esservi rappresentato”

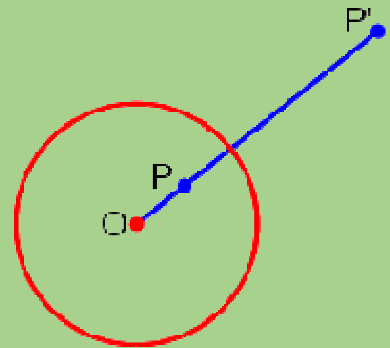


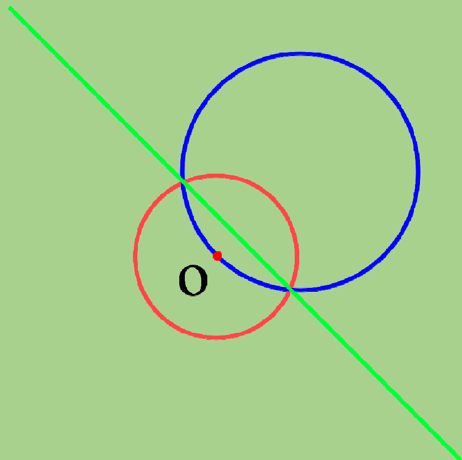


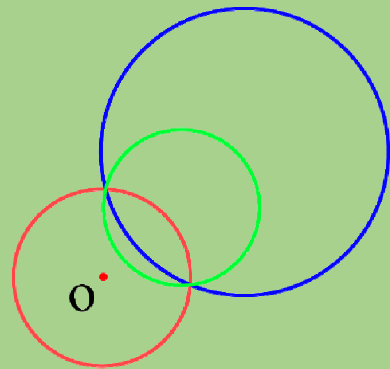
Inversione circolare

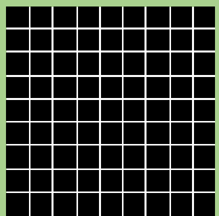


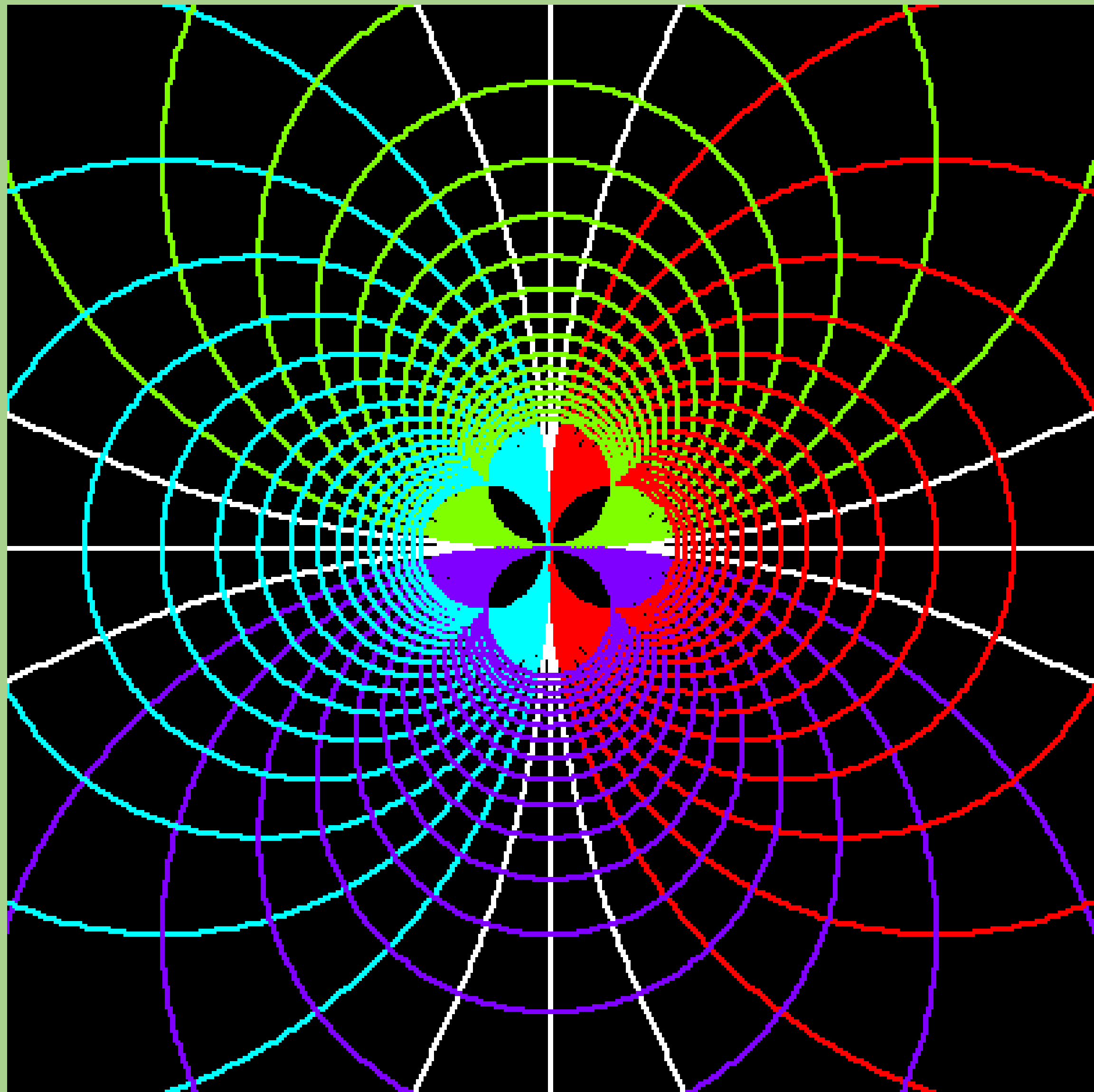






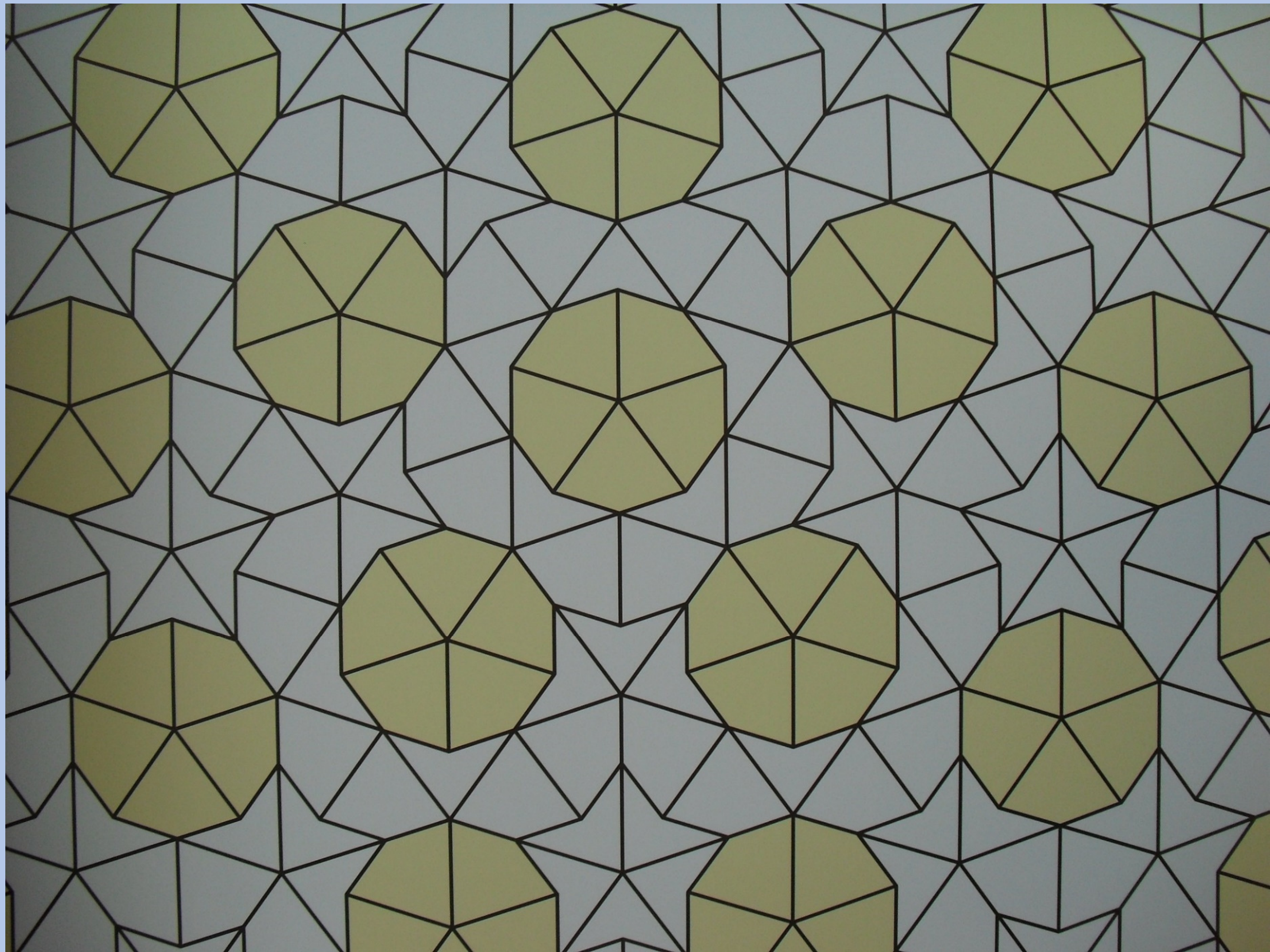


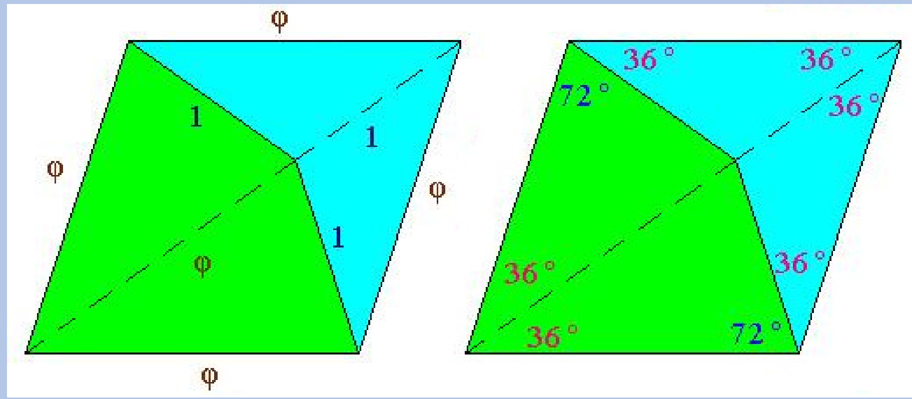


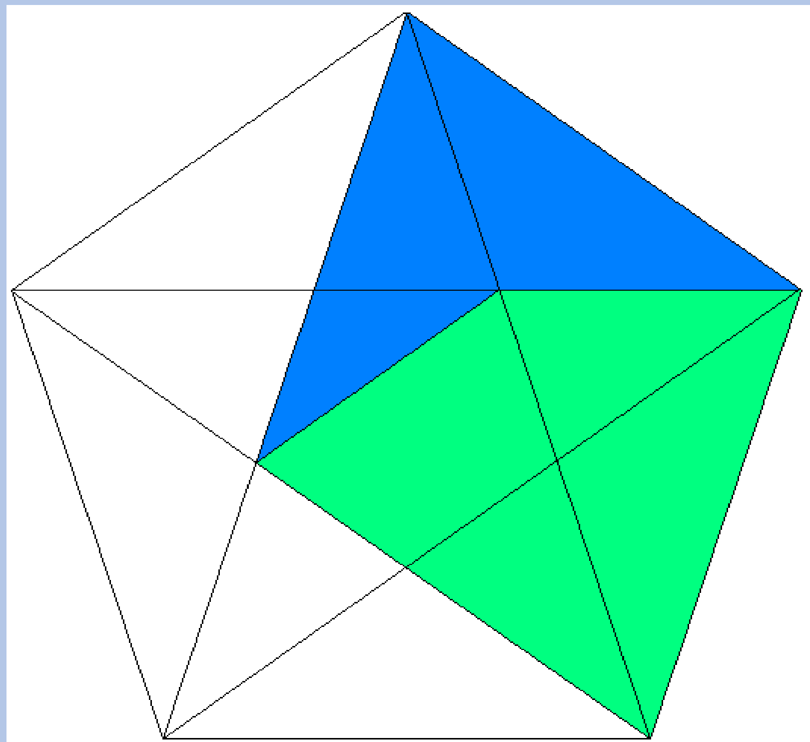


“Dall’analisi degli enigmi che ci circondano e dalle considerazioni e dalle osservazioni che ho fatto, sono arrivato nel campo della matematica. Sebbene sia completamente a digiuno di conoscenze e di esperienze nel campo delle scienze esatte, mi rendo spesso conto di avere più in comune con i matematici che con gli artisti”

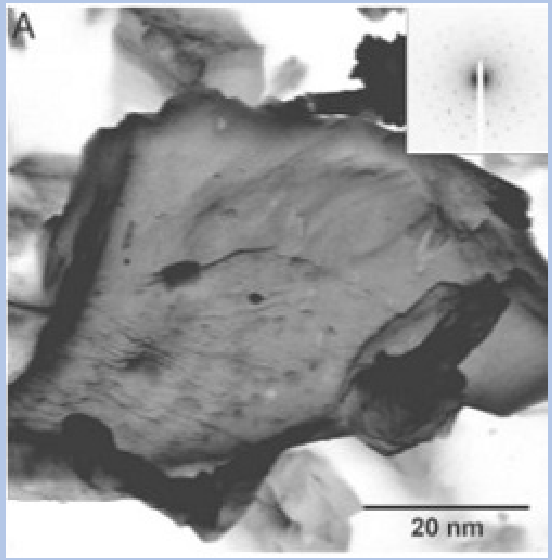
Tassellazione di Penrose

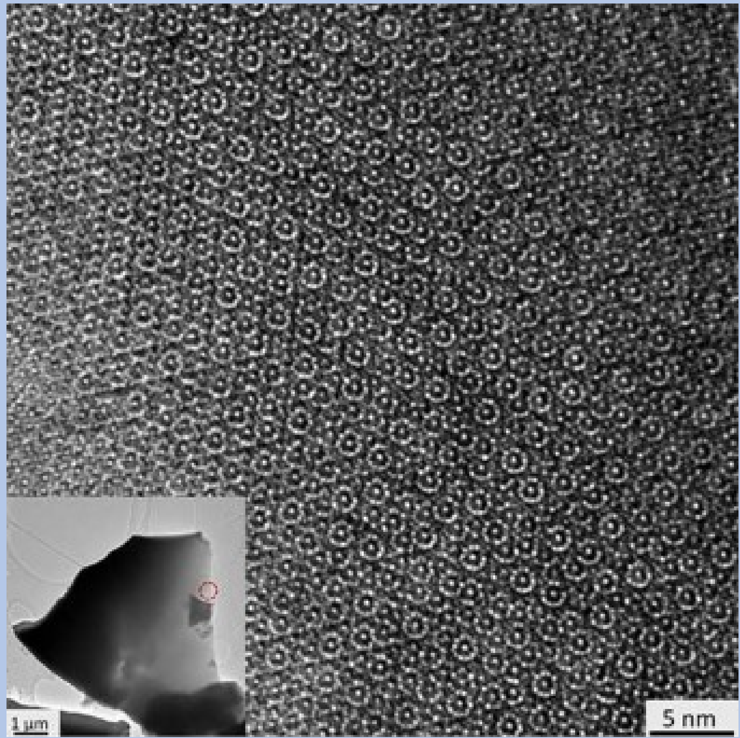



φ
1
1
φ
φ
1
φ
φ
36 °
36 °
72 °
36 °
36 °
36 °
36 °
72 °



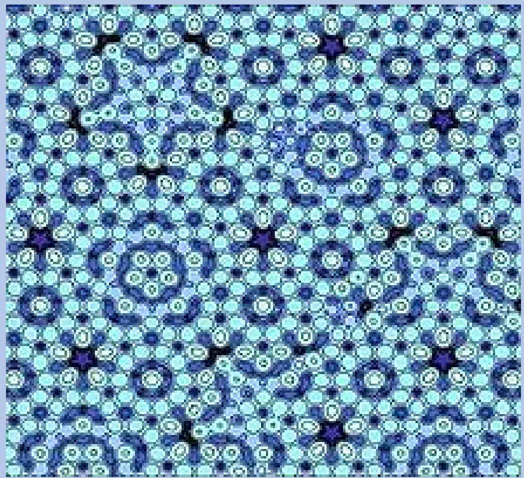
E' extraterrestre il primo quasicristallo naturale
Le Scienze, 3 gennaio 2012



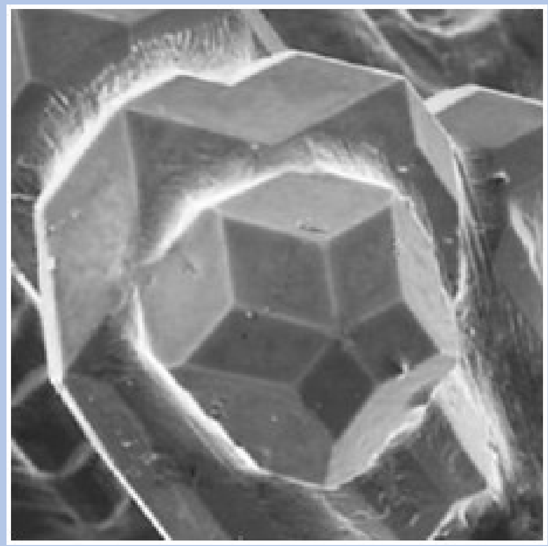


«Sono un esempio meraviglioso di come una scoperta matematica, fatta senza preoccuparsi delle applicazioni, possa rivelarsi familiare da tempo a madre natura»
Martin Gardner, 1977

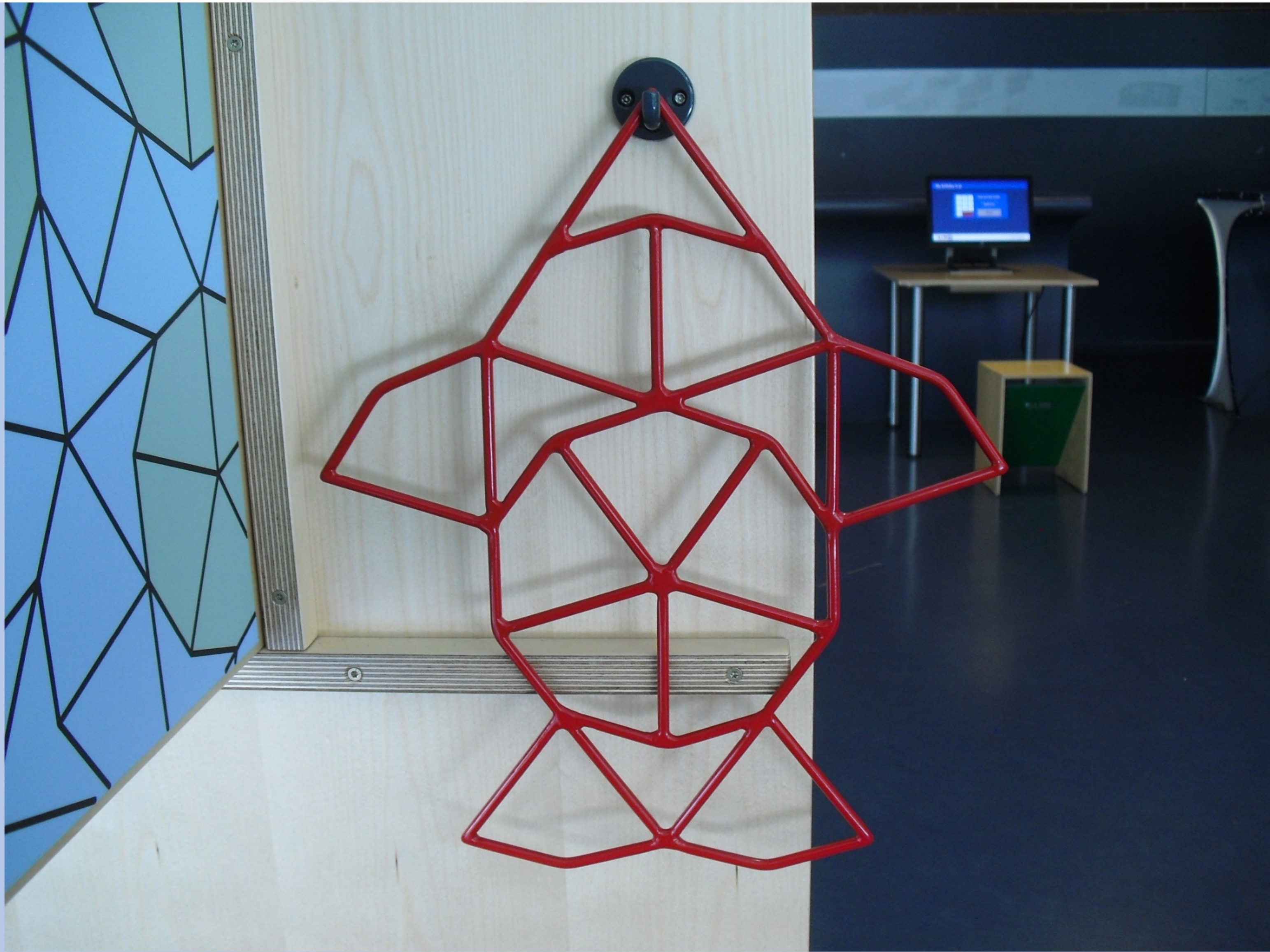
Quasicristalli



Modello atomico di un quasicristallo
di argento-alluminio



1966 Robert Berger dimostra che è possibile tassellare il piano in modo non periodico
1974 tassellazione di Penrose
1984 osservazione dei primi quasicristalli da parte di Dan Shechtman
2009 rinvenimento di un quasicristallo naturale da parte di Luca Bindi

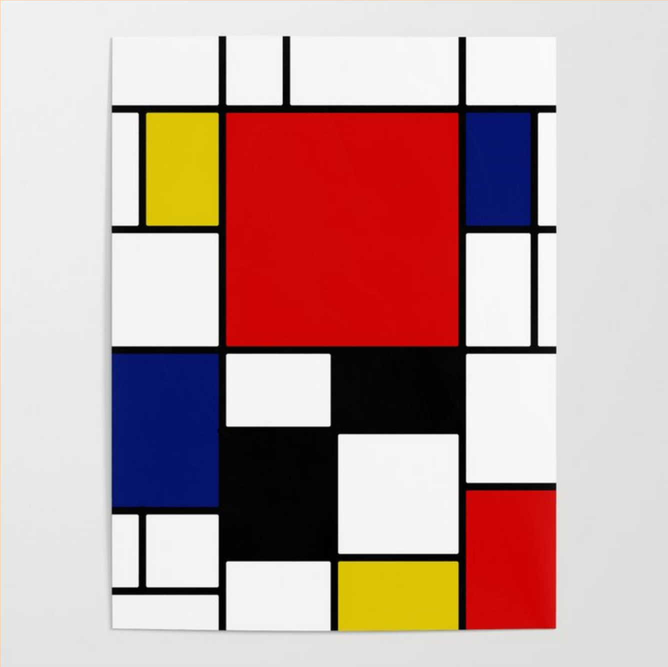


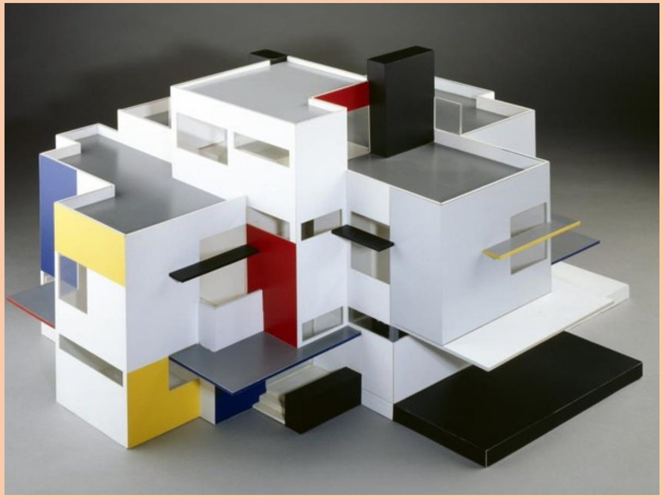
De Stijl (1917)

Fra i membri fondatori troviamo Piet Mondran e Theo van Doesburg

Manifesto per descrivere la loro forma d'arte: astratta, essenziale e geometrica

Finalità è quella di
"ottenere che la **nuova estetica plastica** si riveli, come stile, in tutti gli oggetti, nascendo da nuovi rapporti tra l'artista e la società"





Il “razionalismo” nell’arte: l’influenza della matematica

“L’evoluzione della pittura non è altro che una ricerca intellettuale della verità per mezzo di una cultura visuale.

[…] ***Noi siamo pittori che pensano e misurano****.*

[…] Molti pittori lavorano come pasticcieri e merciai.

Per contro noi usiamo i dati matematici (euclidei o no) e la scienza, vale a dire strumenti intellettuali.

[…] Noi rifiutiamo l’uso artistico del lavoro a mano libera.

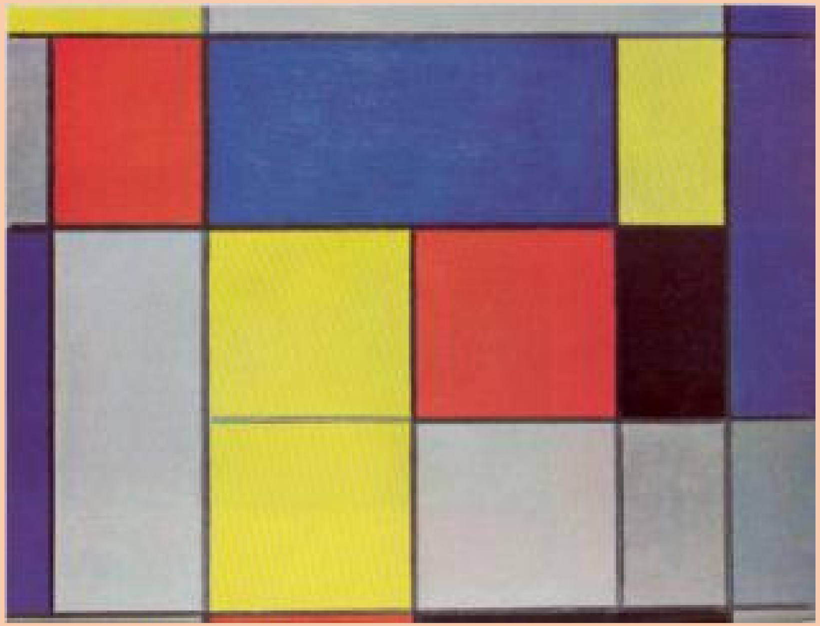
Se non si può disegnare un cerchio con le mani, si può usare un compasso.

Tutti gli strumenti creati dall’intelletto per una necessità di perfezione sono raccomandati”

1924 Conflitto culturale

La ragione è l'introduzione della *diagonale*

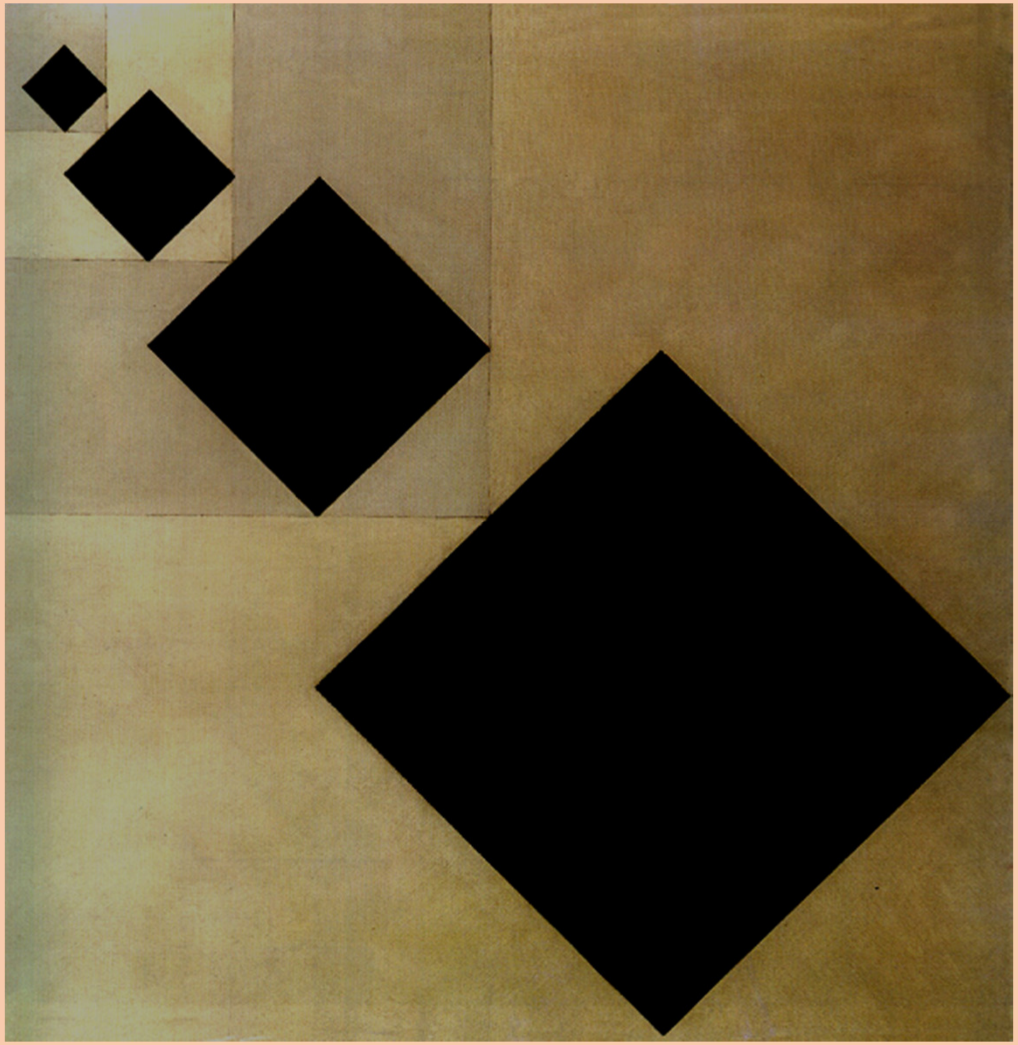
Un fattore dinamico che interrompe l'equilibrio della composizione



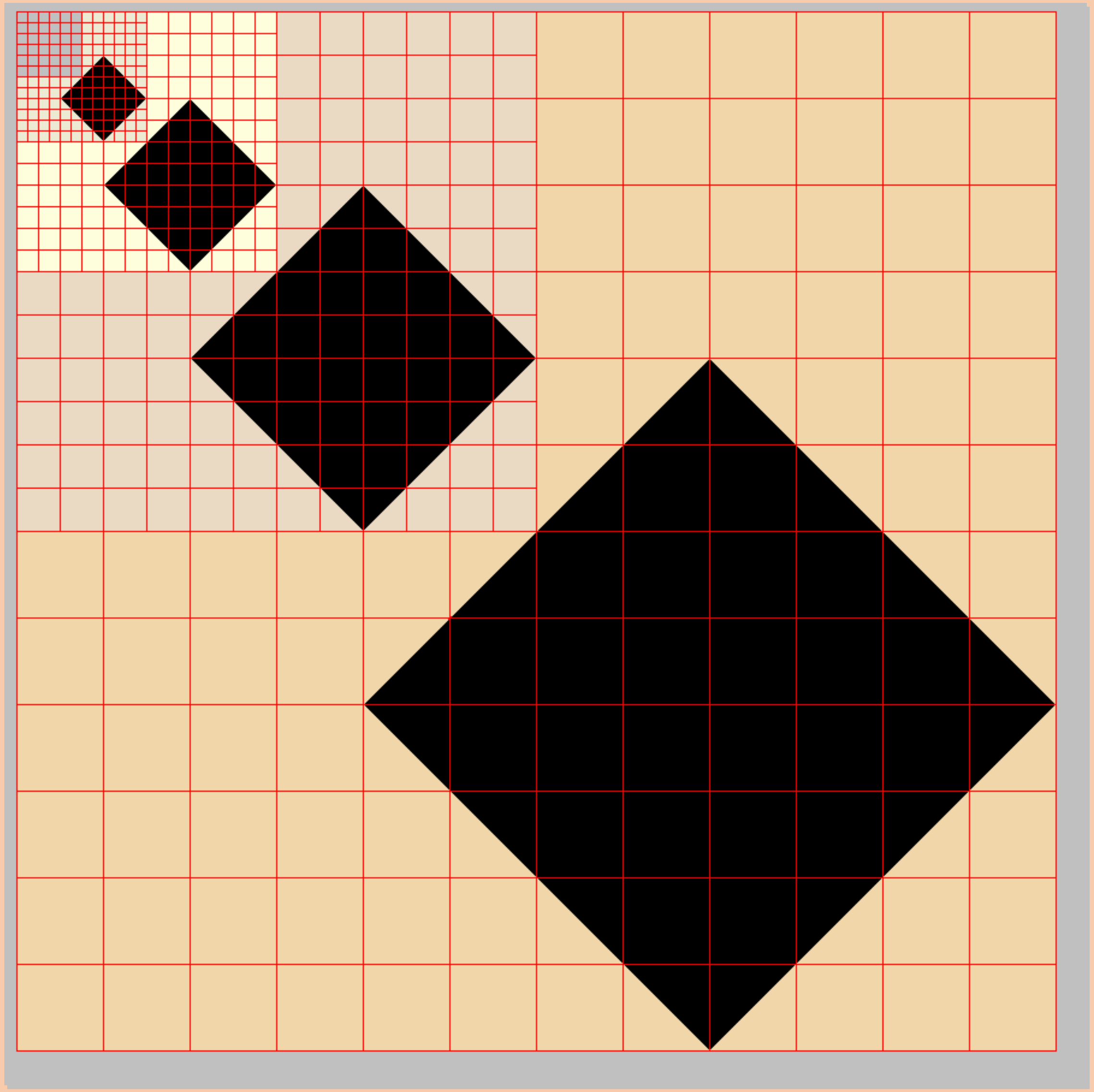
Piet Mondriaan
Compositie XIII (1930)

Theo van Doesburg
Contra-Compositie XIII (1930)

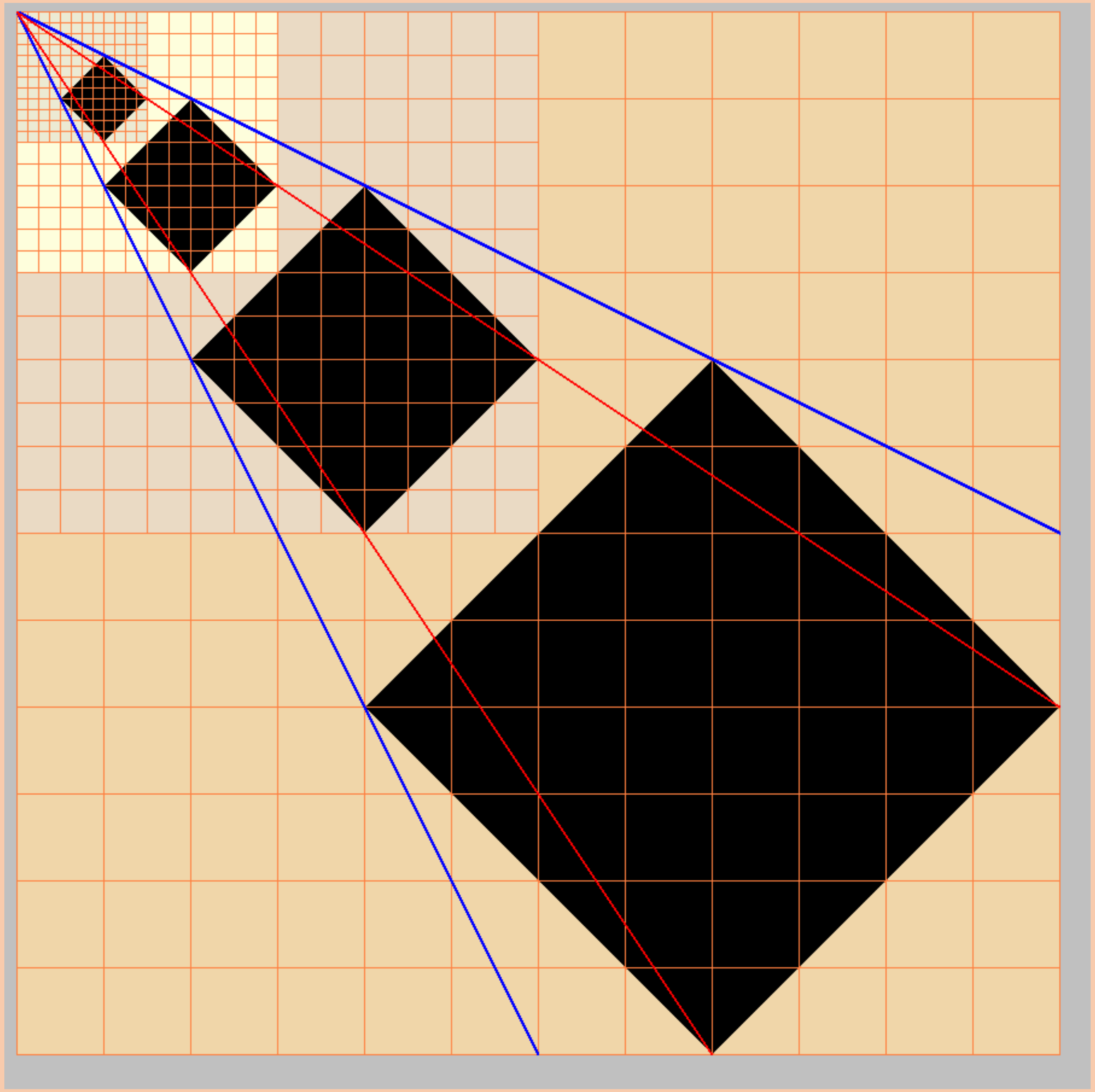
Contre-Compositie V
(1924)

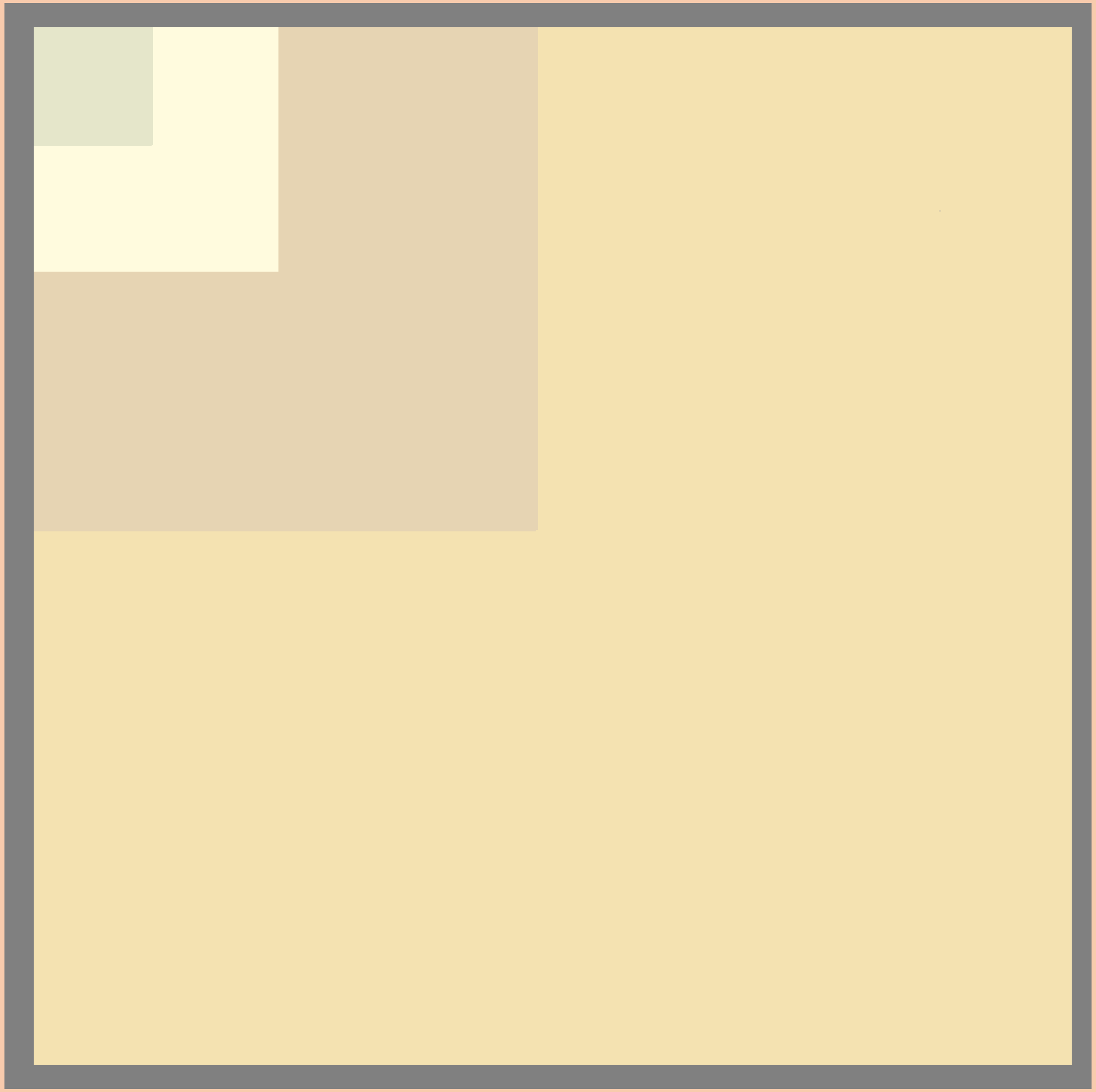


Studio (1926/1929)



Omotetia

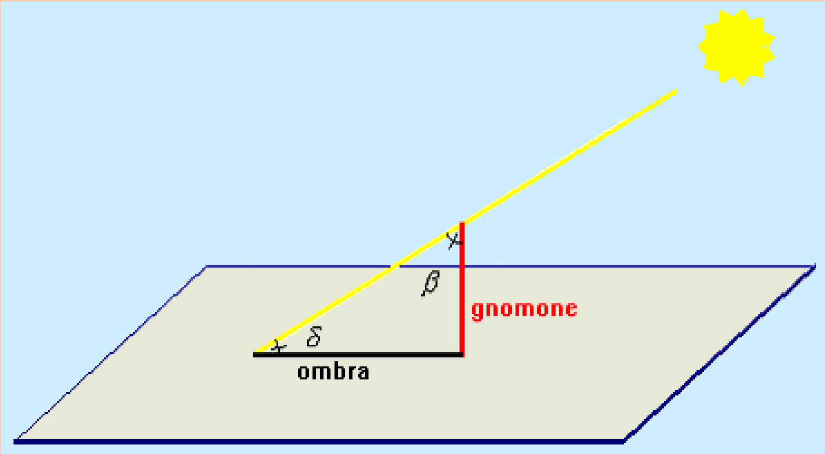


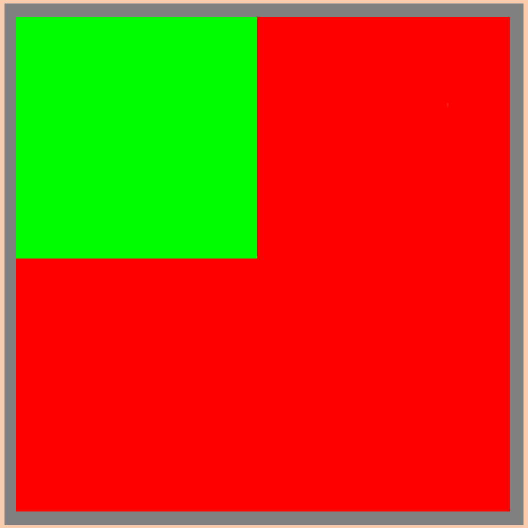


Gnomone

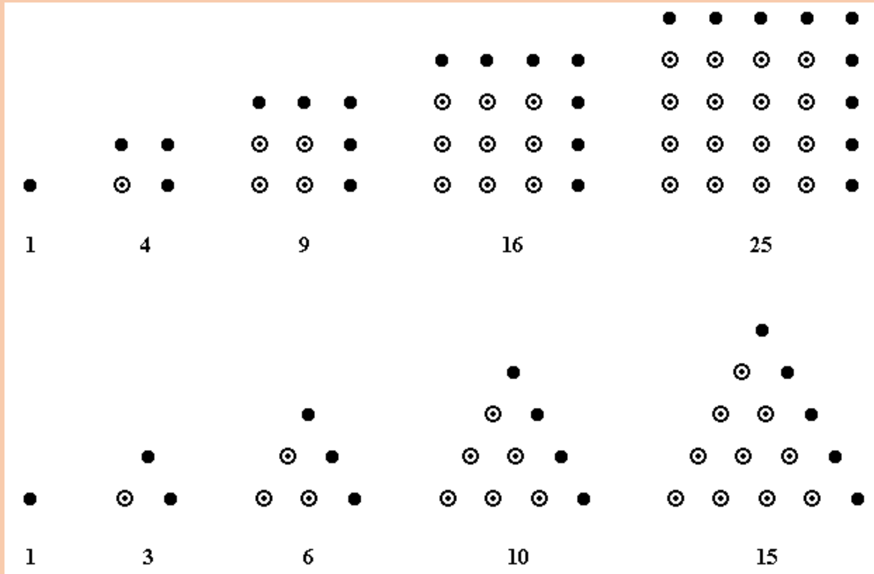
Erone di Alessandria:

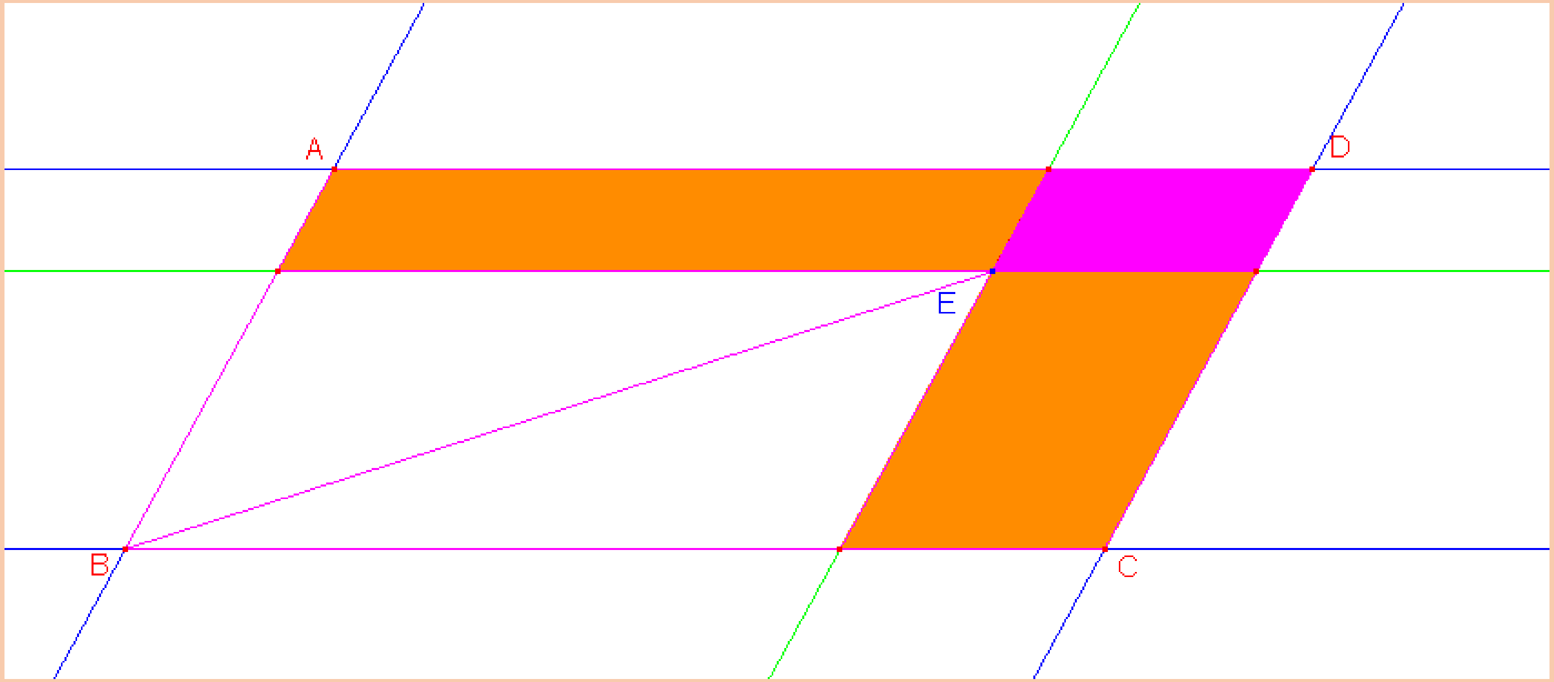
“gnomone è … che aggiunto ad una entità, numero o figura, rende il tutto simile all’entità”
(Definizione 2, libro II, Elementi di Euclide)

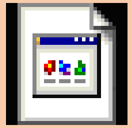




Numeri pitagorici







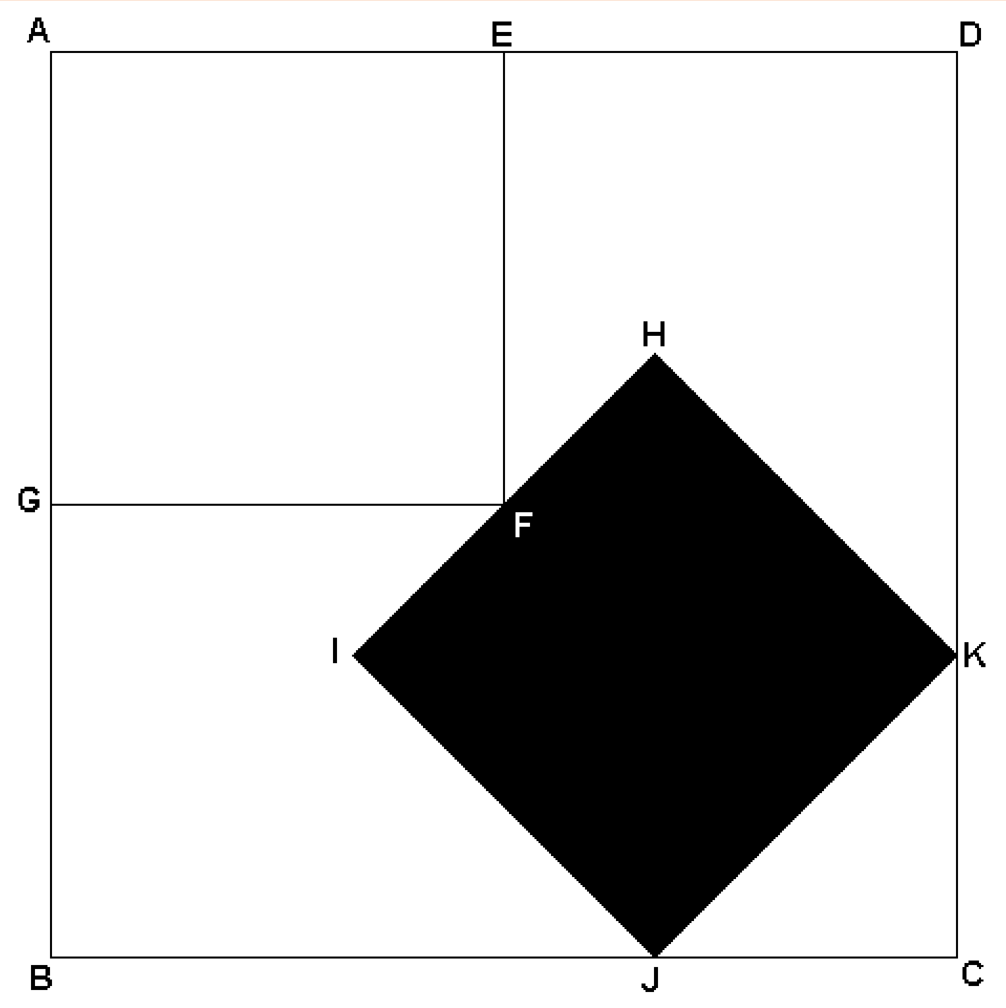
Teorema dello Gnomone

In ogni parallelogramma i complementi intorno alla diagonale sono uguali

Paolo Zellini

Gnomon

Una indagine sul numero

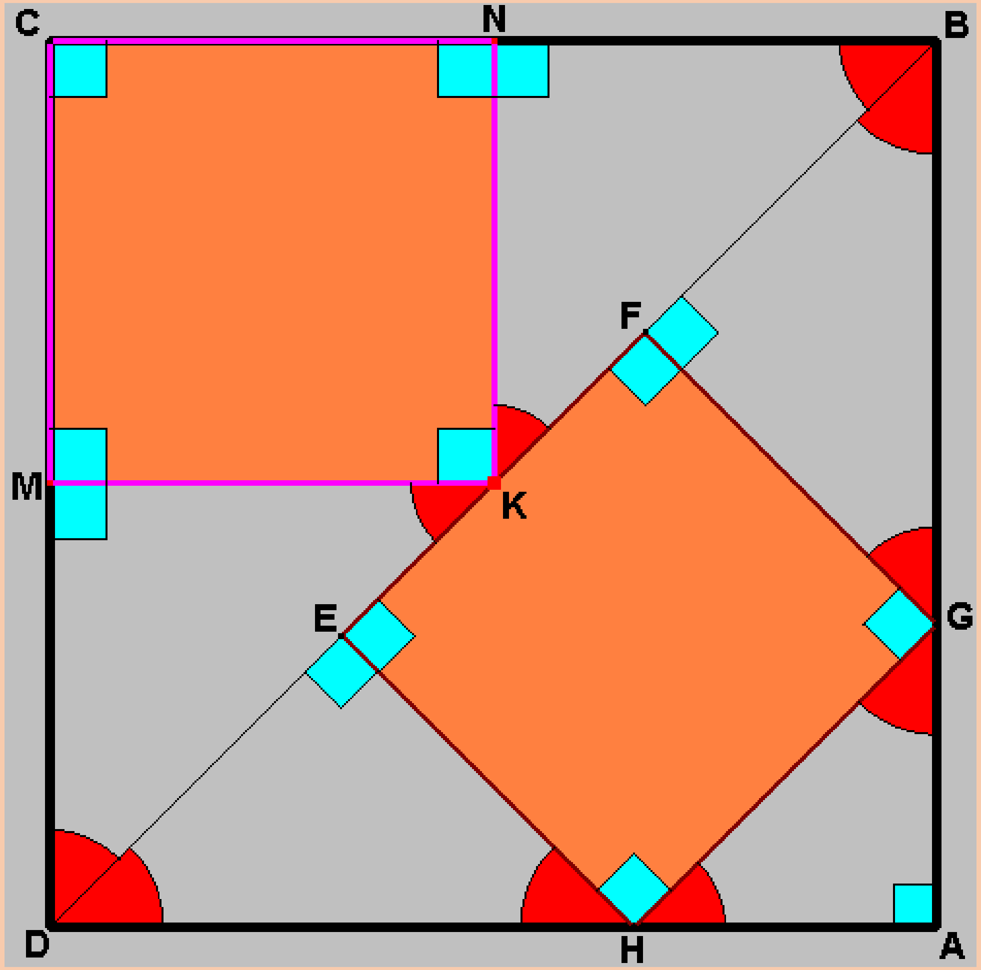


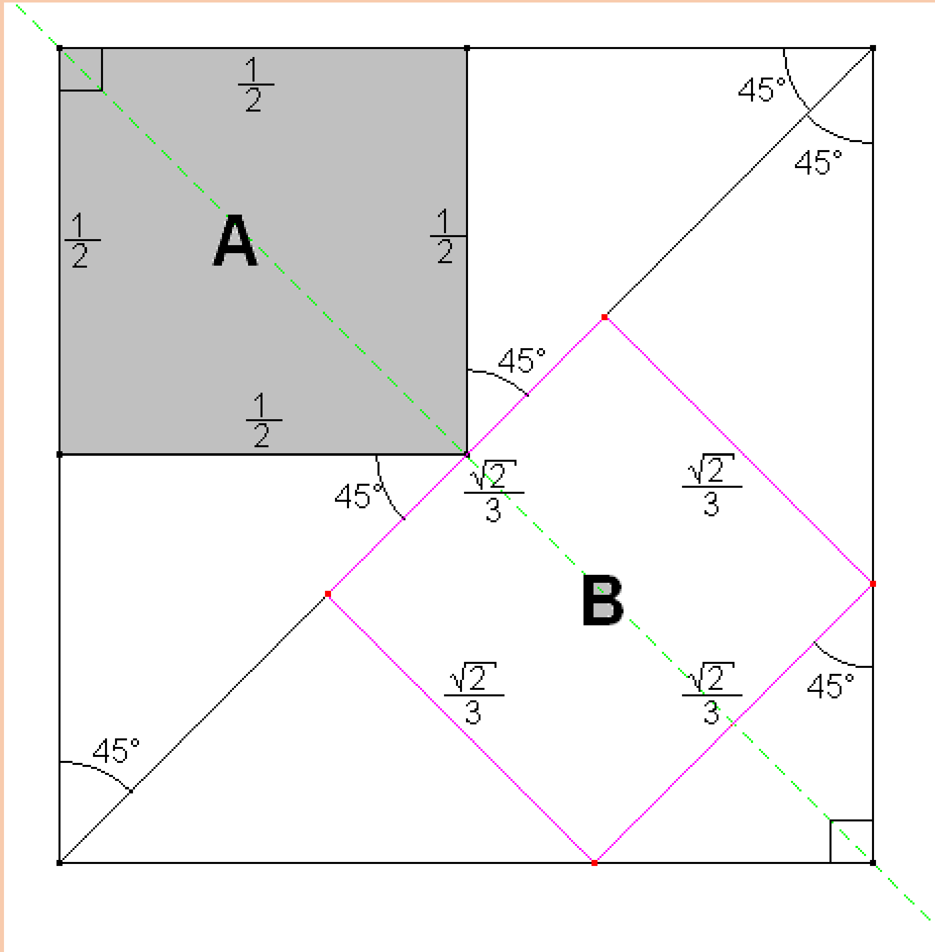
Il quadrato ABCD contiene due quadrati AGFE e HIJK uno "dritto" ed uno "storto" tangenti in un punto F

I due quadrati AGFE e HIJK sono uguali?

Il segmento HI giace sulla diagonale BD?

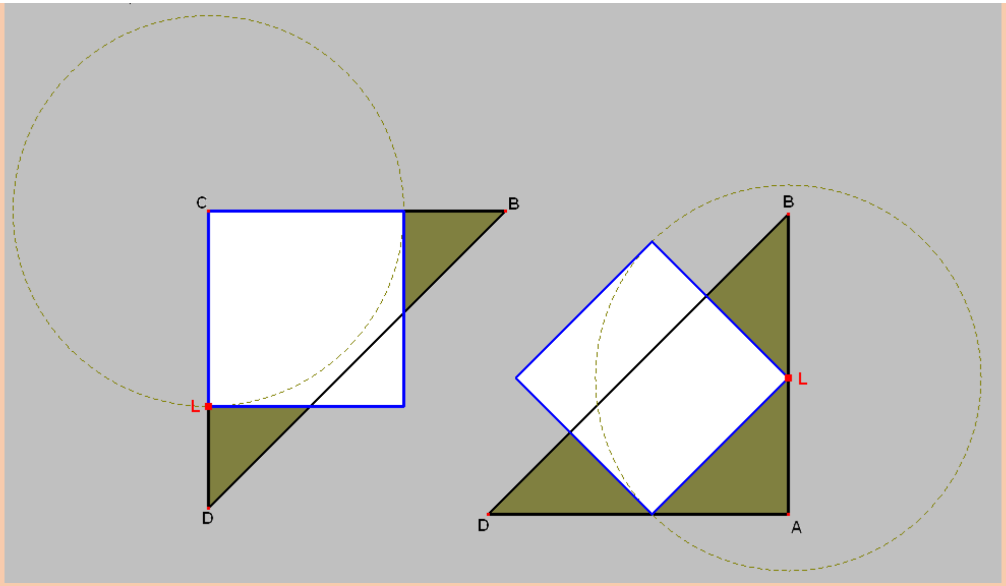
È possibile dare una risposta affermativa ad entrambe le domande?



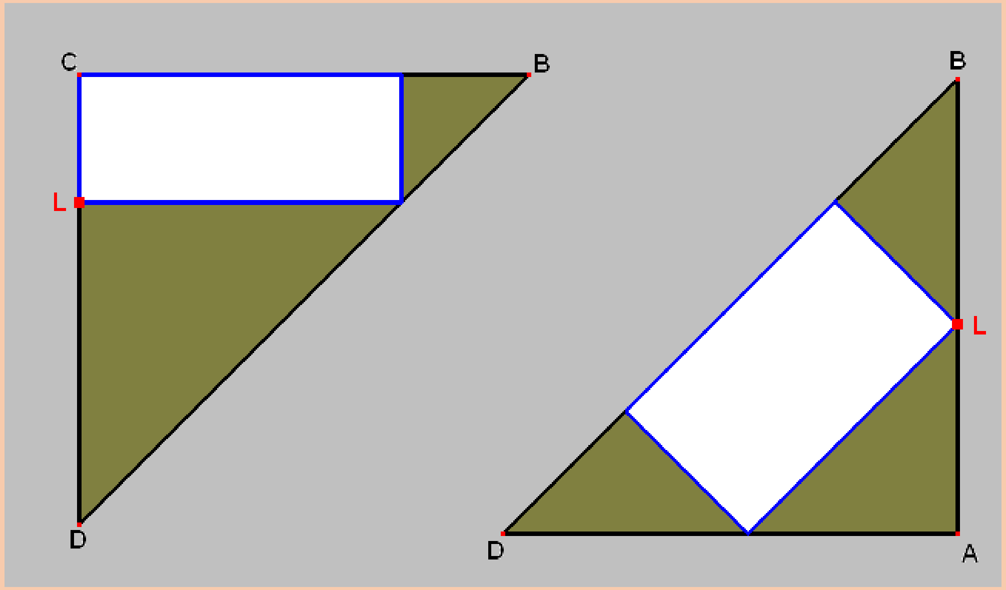


Dunque se i due quadrati si toccano in un solo punto che sta sulla diagonale allora non sono congruenti

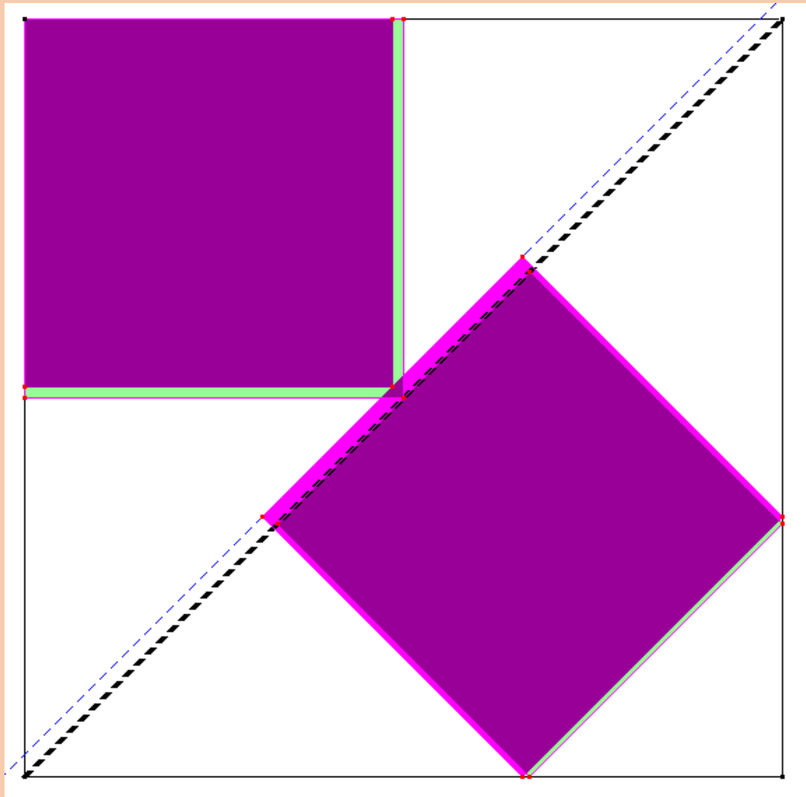
Per quadrati



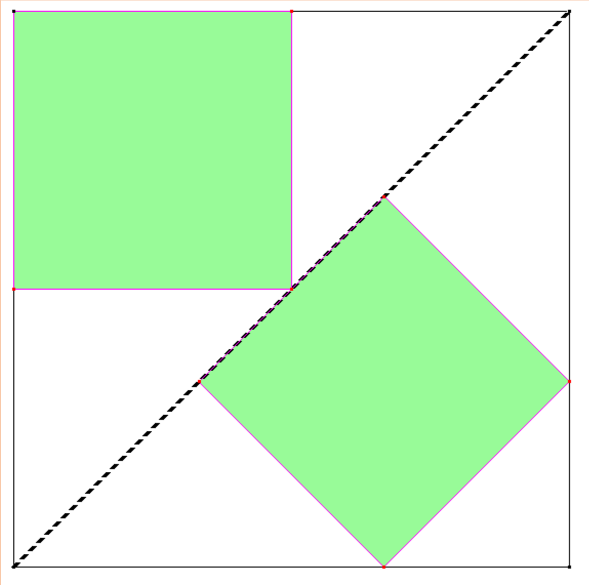
Per rettangoli



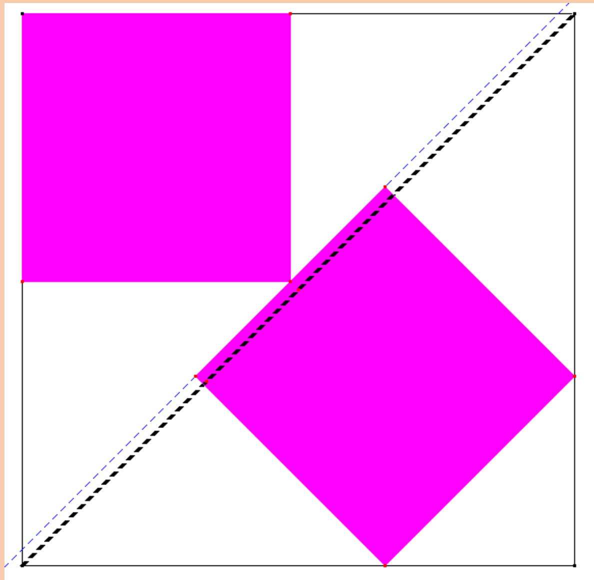
… dunque …



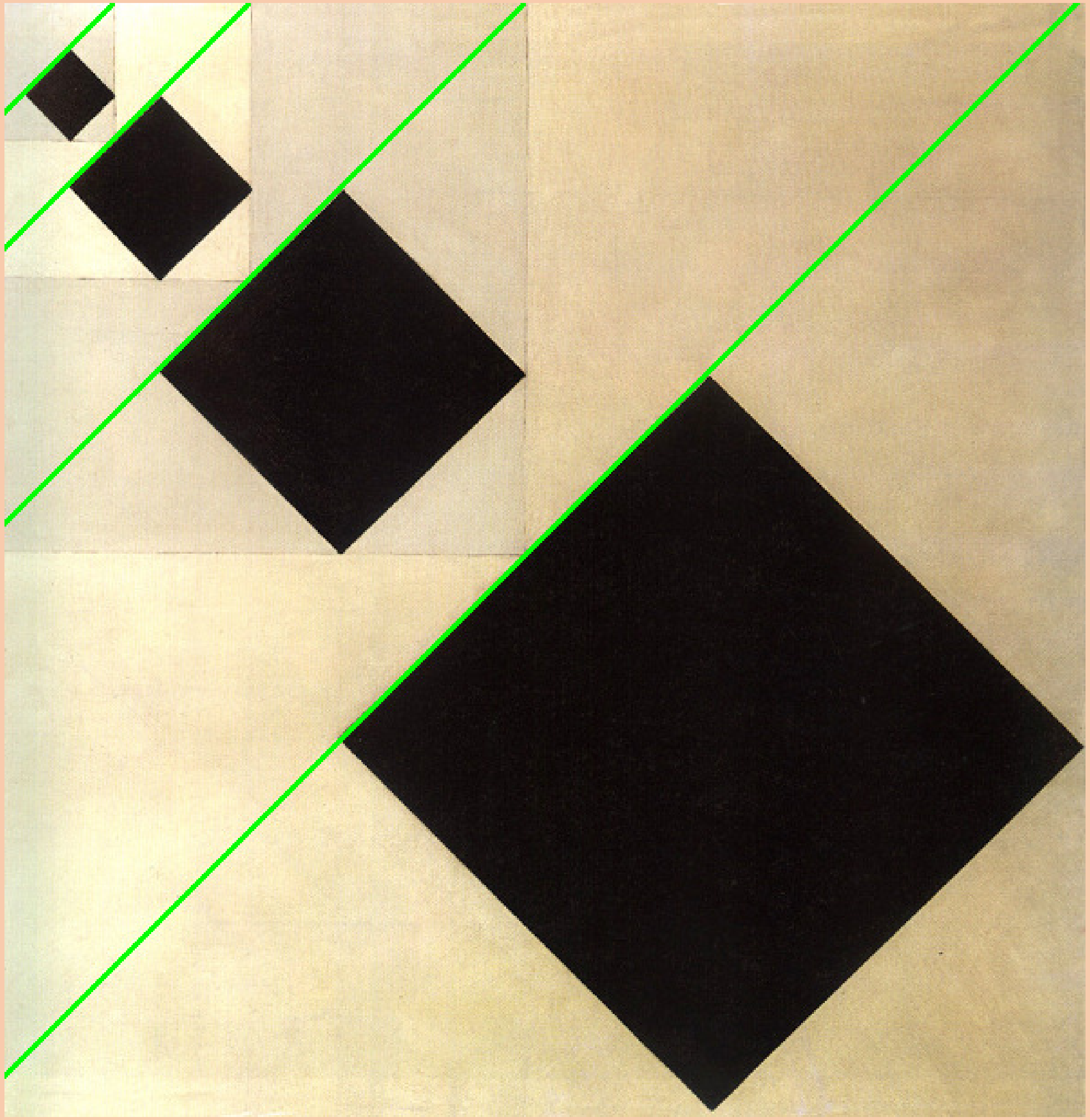
o è

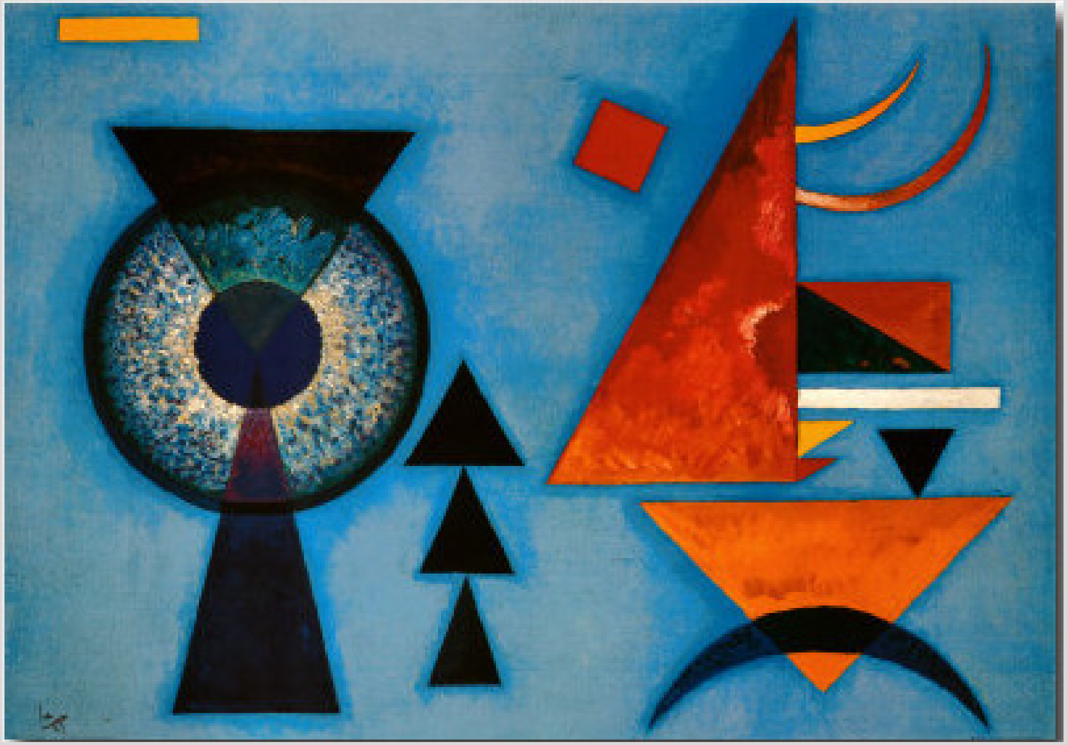


oppure

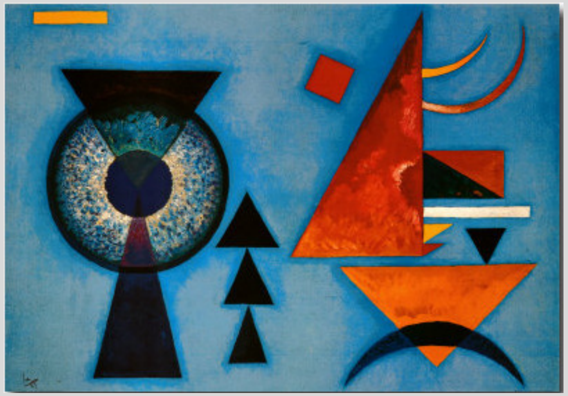


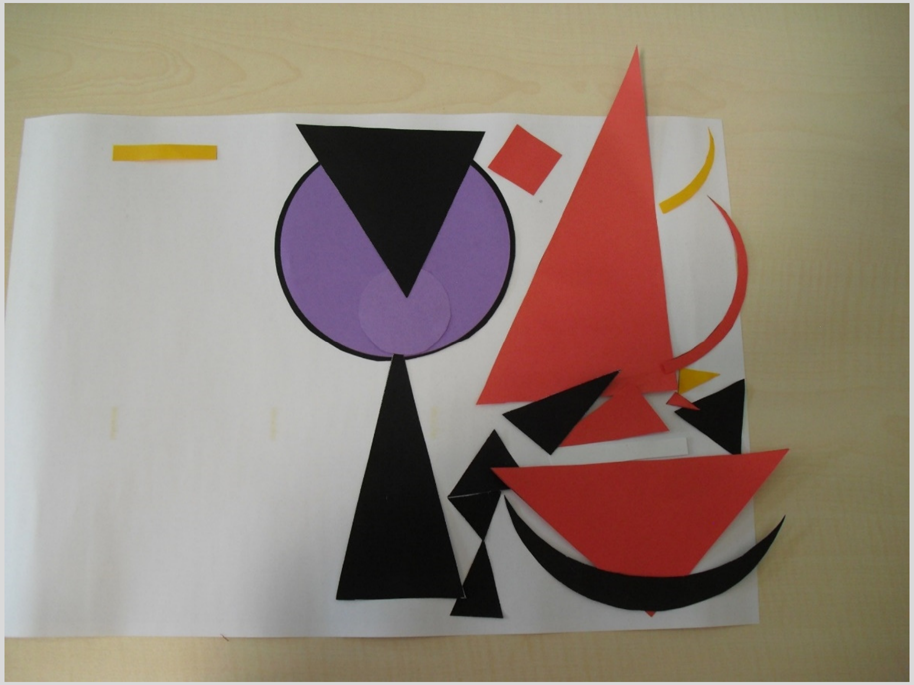
Una conferma del sospetto

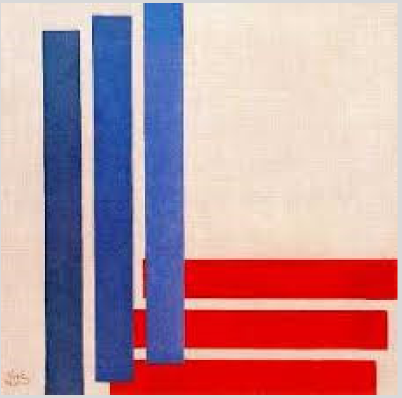


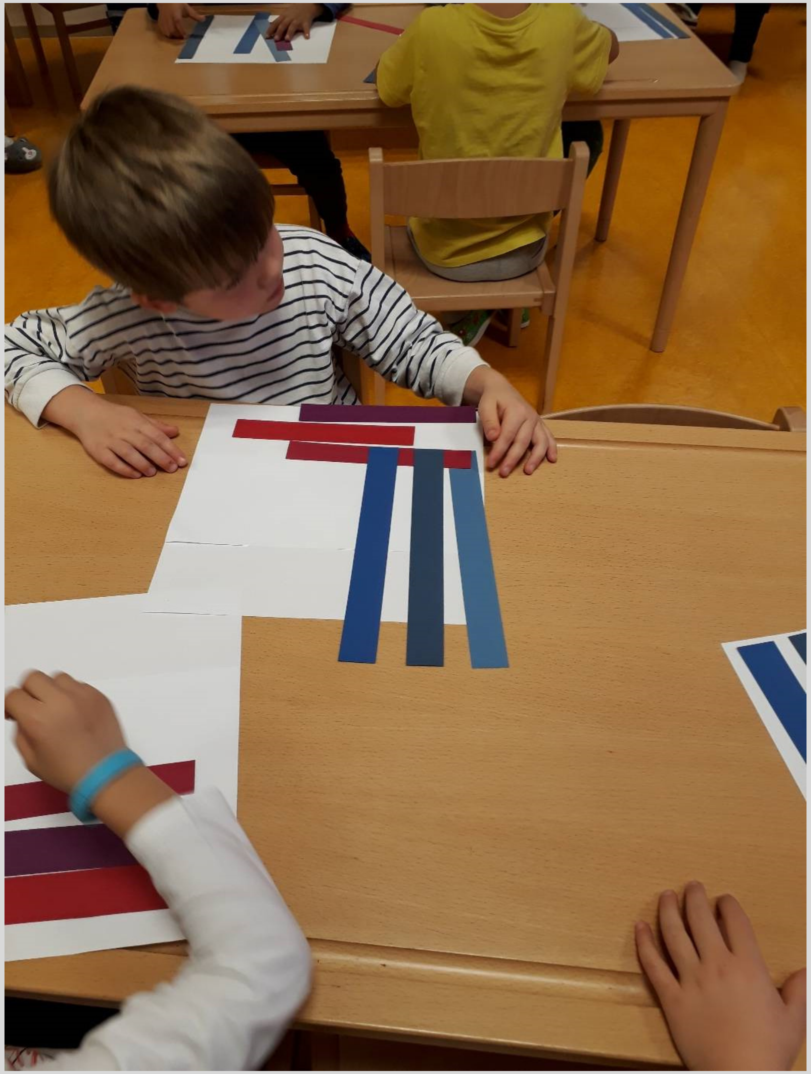


Vasilij Vasil'evič Kandinskij, “Soft Hard” (1927)









Grazie per l'attenzione