La fattorizzazione di polinomi
Osservazioni didattiche

Summary
The divisibility in a ring of polinomials is usually presented in the first (or second) year of upper secondary school and is very difficult for many students. Taking into account some remarks made from the teachers of this school level in the frame of in service training activities, we tried to make some concepts clear also from a theoretical point of view and to propose some didactic observations and appropriate and significant exercices.

M.Bovio, M. Reggiani
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Pavia

La fattorizzazione di polinomi
Osservazioni didattiche

M.Bovio – M.Reggiani
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Università di Pavia

Introduzione

In questo articolo vengono presentate alcune osservazioni sul tema della fattorizzazione di polinomi, argomento affrontato nel primo o nel secondo anno di scuola secondaria superiore (anche se in misura diversa a seconda dell'indirizzo) e spesso fonte di difficoltà per buona parte degli alunni. Le considerazioni che seguono non sono il risultato di una ricerca sistematica ma rappresentano la sintesi di alcune riflessioni svolte dagli autori nell'ambito di attività d'aggiornamento da loro coordinate e tengono conto dell'analisi di protocolli prodotti dai corsisti durante un corso di perfezionamento in didattica della matematica.

Un tentativo di analisi del tema in oggetto porta prima di tutto a chiarire alcuni aspetti teorici anche perché nella pratica didattica spesso questo argomento viene presentato senza adeguate precisazioni sul piano teorico (che cosa si intende per polinomio in una variabile o in più variabili, che cosa significa fattorizzare, come devono essere i fattori, qual è l'importanza del campo in cui si scelgono i coefficienti, ecc.)

Alcuni aspetti della teoria relativa ai polinomi forse non sempre sono completamente presenti nemmeno all'insegnante e, in ogni caso, non è facile decidere quale sia il necessario livello di rigore da proporre e da pretendere dagli alunni.

Da un punto di vista didattico riteniamo che questo tema debba essere proposto in forma e misura diversa a seconda del tipo di scuola. Sarà cura dell'insegnante collegarlo il più possibile alle applicazioni anche interne alla matematica e farne un momento di riflessione e quindi di comprensione del significato del "fare algebra", e non una semplice acquisizione di tecniche.

Un po' di teoria

Richiamiamo in questo paragrafo le definizioni essenziali che l'insegnante deve rivedere, ma non necessariamente proporre agli alunni, per scegliere un proprio itinerario didattico sul tema della fattorizzazione dei polinomi.

Le prime definizioni che riportiamo sono le ben note definizioni delle strutture algebriche fondamentali che sono necessarie per precisare correttamente la definizione di polinomio e le relative questioni di divisibilità.

1. Un insieme non vuoto A è un *anello associativo* se in A sono definite due operazioni, denotate con + e $\cdot$ rispettivamente, tali che per a, b, c in A:

i. $a+b$ sta in A

ii. $a+b = b+a$

iii. $(a+b)+c = a+(b+c)$

iv Esiste in A un elemento 0 tale che $a+0 = a$, per ogni a in A.

v. Per ogni a esiste un elemento $-a$ in A tale che $a+ (-a) = 0$.

vi. $a\cdot b$ sta in A.

vii. $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

viii. $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ e $(b+c)\cdot a = b\cdot a+c\cdot a$

Come è ben noto gli assiomi da i a v dicono che A con l'operazione + è un gruppo abeliano.

2. Un anello A si dice *anello con unità (o unitario)* se esiste in A un elemento 1 tale che $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$, per ogni a di A.

3. Un *anello* A si dice *commutativo* se $a\cdot b = b\cdot a$, per ogni a e b in A.

4. Un anello commutativo si dice *dominio di integrità* se è privo di *divisori dello zero* (cioè non esistono a e b non nulli tali che $a\cdot b=0$).

5. Un anello si dice *anello di divisione o corpo* se i suoi elementi non zero formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

6. Un *campo* è un corpo commutativo.

7. Un dominio di integrità A si dice *anello euclideo* se per ogni elemento a di A non nullo é definito un intero non negativo $d(a)$ tale che

- $\forall a,b \in A$, entrambi diversi da 0, $d(a) \leq d(a\cdot b)$
- $\forall a,b \in A (a,b \neq 0), \exists q,r \in A: a = bq + r$, dove $r=0$ oppure $d(r)<d(b)$

Sono ben noti gli esempi di gruppo, anello, campo.

Può essere invece utile proporre qualche esempio di anello euclideo:

- L'insieme degli interi relativi con le ordinarie operazioni di addizione e di moltiplicazione è un anello euclideo ponendo $d(a)=|a|$
- Gli interi di Gauss, cioè i numeri complessi della forma $a+ib$ con a,b numeri interi, con le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione in $\mathbb{C}$ sono un anello euclideo, ponendo $d(a+ib)=a^2+b^2$.

Vedremo nel seguito che anche i polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo sono un anello euclideo.
L'interesse degli anelli euclidei per il problema di cui ci stiamo occupando sta nel fatto che in un anello euclideo si definisce la divisibilità, si dimostra l'esistenza di un massimo comun divisore, si dà la definizione di elemento primo o irriducibile e si dimostra il teorema di "fattorizzazione unica".
Questi concetti sono ben noti nell'insieme dei numeri interi e possono così essere "trasferiti" ai polinomi. Questa analogia, al di là del livello di formalizzazione e di astrazione a cui si vuole arrivare, è certamente importante dal punto di vista didattico in quanto può fare da guida nella trattazione della fattorizzazione di polinomi in una variabile.
8. In un anello euclideo A un elemento non invertibile p si dice *primo (o irriducibile)* se quando $p=a\cdot b$, con $a,b\in A$, allora a o b è invertibile.
(Ricordiamo che in un anello commutativo A, con unità 1, un elemento a si dice invertibile se esiste un elemento b in A tale che $ab=1$).
9. Un dominio d'integrità A con unità si dice *dominio a fattorizzazione unica* se:
i. Ogni elemento diverso da zero di A o è invertibile o si può scrivere come prodotto di un numero finito di elementi irriducibili di A.
ii. La decomposizione di cui in (i) è unica, a meno dell'ordine e di associati degli elementi irriducibili.
Ricordiamo che un elemento a si dice associato di b se $a=b\cdot u$ dove u è invertibile (ad esempio in $\mathbb{Z}$ due elementi tra loro opposti sono associati in quanto ottenibili uno dall'altro moltiplicando per -1 che è invertibile).

Un anello euclideo è un dominio a fattorizzazione unica. Il viceversa è però falso. Si può ad esempio dimostrare che l'insieme dei polinomi in due variabili a coefficienti in un campo, di cui sarà data una definizione

più precisa in seguito, è un dominio a fattorizzazione unica ma non un anello euclideo.
10. Se $a \neq 0$ e b sono elementi di un anello commutativo A si dice che a divide b se esiste $c \in A$ tale che $b = a \cdot c$.
11. Sia A un anello commutativo con unità. Se $a, b \in A$, allora $d \in A$ si dice *massimo comun divisore* di a e b se
i. d divide a e d divide b
ii. se c divide a e c divide b allora c divide d.

Si dimostra che in un dominio a fattorizzazione unica due elementi qualunque ammettono un massimo comun divisore.

12. Definiamo **polinomio** in una indeterminata x a coefficienti in un campo K una espressione della forma $a_0 + a_1 x + \ldots a_i x^i \ldots\ldots + a_n x^n$, dove i, $0 \leq i \leq n$, è un intero non negativo e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono elementi di K e sono detti coefficienti (x è un simbolo formale).

Con le usuali ben note operazioni di addizione e moltiplicazione l'insieme dei polinomi in x a coefficienti in K risulta un anello commutativo con unità che si indica con $K[x]$

Posto $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ con $a_n \neq 0$, allora l'intero n si chiama grado di $p(x)$ e si indica con deg $p(x)$ o più brevemente deg p.
a_n è invece il coefficiente direttivo del polinomio $p(x)$.
Si dimostra che:
- $K[x]$ è un dominio di integrità,
- $\deg f(x) \leq \deg(f(x)g(x))$, $\forall f(x), g(x)$ diversi dal polinomio nullo,
- vale inoltre il cosiddetto **teorema di divisione per polinomi:**
Sia K un campo. Siano $f(x)$, $g(x)$ polinomi in $K[x]$, con $f(x) \neq 0$.
Allora esistono polinomi $q(x)$, $r(x)$, con $\deg r(x) \leq \deg f(x)$ tali che
$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$.
Se anche $g(x) = f(x)q_1(x) + r_1(x)$ con $\deg r_1(x) < \deg f(x)$,
allora $q(x) = q_1(x)$, $r(x) = r_1(x)$.

Ne segue che $K[x]$ è un anello euclideo ponendo $d(p(x)) = \deg p(x)$.

Dunque
i) due polinomi $f(x)$ e $g(x)$ di $K[x]$ ammettono un massimo comun divisore esprimibile nella forma $d(x)=a(x)f(x)+b(x)g(x)$.
ii) Ogni polinomio di $K[x]$ si può scrivere in modo unico come prodotto di polinomi irriducibili in $K[x]$ (a meno dell'ordine e di associati degli elementi irriducibili, cioè di elementi del campo).

Può essere conveniente riformulare la definizione di elemento primo, già vista per un qualunque anello euclideo, nel caso particolare dei polinomi.

In particolare è utile osservare che:
Un **polinomio** $p(x)$ di $K[x]$ si dice **irriducibile o primo** su K se una fattorizzazione $p(x) = a(x)b(x)$, con $a(x), b(x) \in K[x]$ implica che uno dei due polinomi $a(x)$ o $b(x)$ ha grado 0 (è cioè una costante).
Esempio: in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $2x+4$, $x+2$, $-x-2$, $4x+8$ sono tutti irriducibili. Essi sono anche fra loro "associati" in quanto ottenibili uno dall'altro moltiplicando per un elemento invertibile cioè un polinomio di grado zero (elemento non nullo del campo).
Un polinomio di grado n, a coefficienti in un campo K, si dice allora **riducibile** se può essere espresso come prodotto di due polinomi a coefficienti in K di grado maggiore di 0 e minore di n.
In $K[x]$ è inoltre possibile:
- dimostrare il **teorema del resto (o della radice o di Ruffini)**: *Se $p(x)$ é un polinomio in $K[x]$ (K é un campo) e $a \in K$ é una sua radice (cioè $p(a)=0$) allora $p(x) = (x-a)q(x)$ e viceversa.*
- ricavare costruttivamente il massimo comun divisore con l'algoritmo di Euclide.

Spesso nella pratica didattica si considerano polinomi a coefficienti interi cioè elementi di $\mathbb{Z}[x]$.
Va osservato che $\mathbb{Z}[x]$ é solamente un "dominio a fattorizzazione unica" ma non é euclideo (non sempre esiste un polinomio quoziente a coefficienti interi).
Per quanto riguarda i polinomi in più variabili si è già detto che $K[x,y]$, inteso come $(K[x])[y]$, cioè come insieme dei polinomi in y a coefficienti in $K[x]$, è un dominio a fattorizzazione unica ma non è un anello euclideo.

Esaminiamo ora il problema della fattorizzazione in *ℂ[x], ℝ[x],ℚ[x], ℤ[x].*

Fattorizzazione in *ℂ[x].*
Il teorema fondamentale dell'algebra, come è noto, afferma che un polinomio in *ℂ[x]* di grado n≥ 1 ha una radice in ℂ. Ne segue immediatamente che in *ℂ[x]* ogni polinomio di grado n si scompone nel prodotto di n fattori lineari.

Fattorizzazione in *ℝ[x].*
Se guardiamo un polinomio di *ℝ[x]* come polinomio in *ℂ[x]* esso si scompone in fattori lineari:
$(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n)(x-\alpha_1)(x-\alpha_1^*)\ldots\ldots(x-\alpha_m)(x-\alpha_m^*)$ dove $\beta_1,\ldots,\beta_n$ sono radici reali mentre le α_i , α_i^* sono coppie di soluzioni complesse coniugate. Si dimostra infatti facilmente che se α é una soluzione complessa di un polinomio a coefficienti in ℝ, anche α^*, sua coniugata, é una soluzione. Essendo $(x-\alpha_i)(x-\alpha_i^*)=x^2-2\,\mathrm{Re}(\alpha_i)x+\alpha_i\alpha_i^*$ un polinomio irriducibile in *ℝ[x]* si deduce che in *ℝ[x]* gli unici polinomi irriducibili sono quelli di primo grado e quelli di 2° grado della forma ax^2+bx+c che hanno radici complesse coniugate, cioè, come è noto, quelli in cui $b^2-4ac<0$.
Da queste considerazioni segue anche che un polinomio di grado dispari ha sempre almeno un fattore lineare in *ℝ[x],* un polinomio di grado pari può avere al più un numero pari di fattori lineari. Naturalmente questo risultato ci consente di dire se un polinomio in *ℝ[x]* è o no riducibile ma non ci dà informazioni su come fattorizzare un polinomio riducibile: è noto che non sempre questo può essere fatto in modo semplice.

Fattorizzazione in *ℚ[x].*
In *ℚ[x]* a differenza di quanto accade in *ℝ[x]* e in *ℂ[x]* non possiamo descrivere esplicitamente l'insieme dei polinomi irriducibili ma possiamo solo fornire alcuni criteri che implicano l'irriducibilità.
Il problema della fattorizzazione in *ℚ[x]* è strettamente connesso allo stesso problema in *ℤ[x].* Infatti ogni polinomio di *ℚ[x]* è associato di un polinomio in *ℤ[x]*, ottenuto moltiplicando ciascun coefficiente per il m.c.m. fra i denominatori dei suoi coefficienti. Si dimostra inoltre una proposizione (lemma di Gauss) che asserisce che un polinomio a coefficienti interi è irriducibile in *ℚ[x]* se e solo se lo è in *ℤ[x].* Dunque

un polinomio di $\mathbb{Q}$*[x]* è irriducibile se e solo se lo è in $\mathbb{Z}$*[x]* il polinomio a coefficienti interi ad esso associato.
Esaminiamo allora il problema della fattorizzazione in $\mathbb{Z}$*[x].*

Fattorizzazione in $\mathbb{Z}$*[x].*
Un primo passo nello studio della irriducibilità di un polinomio in $\mathbb{Z}$*[x]* è la ***ricerca di eventuali fattori lineari.***
Si dimostra facilmente che se $a_n\, x^n + \ldots + a_1\, x + a_0$ è un polinomio a coefficienti interi e *a/b* (*a* , *b* primi fra loro) ne è una radice, allora *a* divide il termine noto e *b* divide il coefficiente del termine di grado più alto.
La ricerca delle radici ci consente di dire se il polinomio ha o meno fattori lineari. Questo risolve il problema dell'irriducibilità per polinomi di grado 2 o 3 che, se sono riducibili, hanno almeno un fattore lineare.
Più complicato è stabilire se un polinomio che non ha fattori lineari è o no irriducibile.

Un criterio per dimostrare che alcuni polinomi sono irriducibili è il ***Criterio di Eisenstein***: se $a(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ è un polinomio in $\mathbb{Z}$*[x]* ed esiste un numero primo *p* tale che *p* divide tutti gli a_i tranne il coefficiente di grado massimo e p^2 non divide il termine noto, allora *a(x)* é irriducibile in $\mathbb{Z}$*[x].*

Esempi: 1) $x^5 + 3x^2 - 3x + 6$ risulta irriducibile prendendo *p*=3.
2) $x^4+5x+15$ risulta irriducibile prendendo *p*=5.
3) $x^n - p$ con *p* primo è irriducibile (questo dice tra l'altro che esistono polinomi irriducibili di qualsiasi grado).

Il Criterio di Eisenstein è molto utile ma è evidente che non sempre è possibile applicarlo.
E' chiaro che nei casi in cui tale criterio non si applica il polinomio può essere irriducibile (come ad esempio $x^2-3x+13$) o riducibile (ad esempio $x^5+5x^3+2x^2+10$ che si fattorizza nel prodotto $(x^3+2)(x^2+5)$, come si vede facilmente applicando opportunamente la proprietà distributiva (secondo la terminologia usualmente utilizzata a scuola, effettuando un raccoglimento parziale)).
Nei casi in cui il criterio considerato non si applica e non vi sono fattori lineari si può anche cercare di fattorizzare il polinomio dato scrivendolo come prodotto di due polinomi di grado inferiore con coefficienti incogniti, svolgendo tale prodotto ed imponendo l'uguaglianza fra i

coefficienti così ottenuti e quelli del polinomio dato. Si perviene così ad un sistema di cui si cercano le eventuali soluzioni intere. Tale metodo è però effettivamente praticabile soltanto per polinomi di grado non molto alto (ad esempio 4 o 5), in quanto altrimenti comporta calcoli troppo complessi.

Un'altra possibilità è utilizzare il seguente risultato:
Se un polinomio $p(x)$ é irriducibile in $Z_m[x]$ per un m primo con a_n allora $p(x)$ é irriducibile in $Z[x]$.
Infatti se $a(x)b(x)$ é una fattorizzazione in $Z[x]$ di $p(x)$, ad essa, passando a $Z_m[x]$, corrisponde una effettiva fattorizzazione $\underline{a(x)}\cdot\underline{b(x)}$ se m é primo con a_n.
Ad esempio il polinomio $2x^3+7x^2-3x+2$ è irriducibile in $Z[x]$, in quanto passando a $Z_3[x]$ diventa $\underline{2}x^3+x^2+\underline{2}$ che é irriducibile perché $\underline{0}$,$\underline{1}$,$\underline{2}$ non sono soluzioni.
Analogamente il polinomio x^5+x^3+2x+5 è irriducibile in $Z[x]$ in quanto passando a $Z_2[x]$ si ottiene $x^5+x^3+\underline{1}$ che non ha radici in $Z_2[x]$ e non si scompone nel prodotto di due fattori di 3° e 2° grado rispettivamente come si può facilmente verificare. Notiamo a questo proposito che è evidente che in $Z_m[x]$ la ricerca delle possibili fattorizzazioni anche "per tentativi" risulta più semplice.
E' altrettanto evidente, ma importante sottolineare, che la riducibilità di un polinomio in $Z_m[x]$ non implica la riducibilità in $Z[x]$. (Ad esempio x^2+1 è riducibile in $Z_2[x]$, dove $x^2+\underline{1}=(x+\underline{1})(x+\underline{1})$, mentre è irriducibile in $Z[x]$.)

Alcune note didattiche
Come si è già accennato nell'introduzione, il tema della fattorizzazione di polinomi in una o più variabili è in generale affrontato nel biennio, anzi nel primo anno di scuola superiore.
I programmi ministeriali vi fanno riferimento: ad esempio nei programmi proposti dalla commissione Brocca il tema 2 (Insiemi numerici e calcolo) contiene il seguente punto:
Il linguaggio dell'algebra e il calcolo letterale: monomi, polinomi, frazioni algebriche.

Nel commento a questo tema si raccomanda di “evitare di dare carattere di teoria ad argomenti che si riducono a semplici artifizi e di fornire classificazioni e regole distinte in situazioni in cui valgono gli stessi principi generali”.
Nella pratica didattica, come si può osservare anche dall’esame di molti libri di testo, si dà ampio spazio ai polinomi e alla loro fattorizzazione, spesso però il riferimento agli aspetti teorici è piuttosto limitato, con il conseguente rischio di incorrere nei tecnicismi paventati dai programmi ministeriali.
Come confermato anche da questionari da noi proposti ai corsisti delle attività di aggiornamento e perfezionamento citate nell’introduzione, vengono usualmente proposte agli alunni in successione alcune situazioni che spesso sono presentate come “tecniche”:

- applicazione della proprietà distributiva: il “raccoglimento a fattor comune”
- scelta dei termini fra cui applicare a più riprese la proprietà distributiva: il cosiddetto ben noto “raccoglimento parziale”
- il riconoscimento di prodotti notevoli
- la fattorizzazione basata sulla divisibilità:
  - la regola di Ruffini
  - lo studio di polinomi particolari quali $x^2+(a+b)x+ab$ e $x^n \pm a^n$

Vengono spesso, a nostro parere, elusi nella pratica didattica alcuni punti nodali che emergono chiaramente dall’esame della teoria richiamata nel paragrafo precedente.
Primo fra tutti è il significato da attribuire al termine “fattorizzare”: scrivere il polinomio come prodotto di polinomi di grado inferiore a quello assegnato o scriverlo come prodotto di polinomi irriducibili?
Strettamente legato a questo è il problema della definizione di polinomio irriducibile che, come si è visto nei richiami teorici, è una definizione che dipende dall’anello di polinomi che si sta considerando. Poichè in genere non si svolge una teoria estesa sul significato di irriducibilità nei diversi anelli di polinomi e non si forniscono criteri di irriducibilità in $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}[x]$ si dovrebbe ritenere che il significato usualmente dato al termine fattorizzare sia il primo. In realtà però questo comporterebbe che a livello di esercizi ci si debba accontentare di una qualunque fattorizzazione (ad esempio $x^3-x=x(x^2-1)$) mentre è noto che in generale un insegnante non ritiene corretto un esercizio svolto in questo modo se la consegna è “fattorizzare il seguente polinomio”.

Alcuni testi propongono di utilizzare una sorta di “algoritmo di fattorizzazione” che consiste nell’applicare in successione i metodi sopra elencati. Se nessuno di questi consente la fattorizzazione si può “provvisoriamente considerare irriducibile” il polinomio dato. In un secondo momento si può decidere se è opportuno rivedere la situazione alla luce di approfondimenti teorici e con l’eventuale supporto di un opportuno software quale ad esempio Derive.

Un altro problema teorico che non può essere completamente ignorato sul piano didattico è l’unicità della fattorizzazione e il significato da dare a questo termine. Si è visto che in un anello $K[x]$ la fattorizzazione è unica a meno dell’ordine e di associati degli elementi irriducibili, cioè, in altri termini, a meno di elementi del campo. Si tratta di un punto delicato ed in generale non affrontato. Infatti in base a questa definizione in $\mathbb{Q}[x]$ o in $\mathbb{R}[x]$ le due fattorizzazioni $3x^2+3x=3x(x+1)$ e $3x^2+3x=x(3x+3)$ sono del tutto equivalenti mentre in generale nella pratica didattica la prima viene considerata completa, la seconda no.

Un altro problema significativo sul piano didattico è il fatto che l’accento che molti libri di testo pongono sugli esercizi di fattorizzazione, potrebbe far pensare che quasi tutti i polinomi siano riducibili. In generale in realtà é estremamente improbabile che un polinomio scritto scegliendo a caso i coefficienti sia riducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e che un polinomio in più variabili a coefficienti in un campo lo sia. Si pensi ad esempio alle coniche che nel piano cartesiano si rappresentano con equazioni polinomiali di secondo grado in x,y: la riducibilità del corrispondente polinomio in $\mathbb{R}[x,y]$ corrisponde al fatto che la conica si “spezza” in una coppia di rette.
E’ anche facile far vedere che un polinomio del tipo $xy+ax+by+c$ si può scomporre nel prodotto di due polinomi di primo grado se e solo se $c=ab$; addirittura si dimostra che se a, b e c sono reali e scelti “a caso” in un certo intervallo [-M,M], la probabilità che il polinomio sia fattorizzabile é nulla! (Prodi – Villani, 82).

E’ comunque opportuno che i ragazzi si rendano conto che fattorizzare, quando è possibile, serve (per semplificare frazioni algebriche, per fare le operazioni con esse, per dimostrare semplici proprietà aritmetiche,...). A questo scopo conviene presentare questo capitolo dell’algebra in modo il più possibile collegato alle motivazioni e alle applicazioni ad esso relative.

L'argomento fattorizzazione non può esaurirsi nella sola prima superiore, ma deve essere ripreso più avanti (soluzione di equazioni di grado superiore al secondo, zeri di una funzione, ecc.) anche con il supporto di strumenti non strettamente algebrici.
Naturalmente i livelli di difficoltà fra fattorizzazione basata sulla divisibilità, fattorizzazione basata sul riconoscimento di "prodotti notevoli", applicazione della proprietà distributiva ("raccoglimento"), scelta dei termini fra cui effettuare il cosiddetto "raccoglimento parziale", divisibilità o fattorizzazione di un polinomio in un dato insieme, sono diversi. Questi "metodi" proprio perché non sempre sono efficaci possono essere considerati occasioni da utilizzare per un apprendimento dell'algebra non meccanico in quanto si tratta di scegliere tra diverse strategie risolutive, quella opportuna.

Alcuni esercizi significativi
Nelle pagine che seguono ci proponiamo di presentare alcuni esercizi che ci sembra possano contribuire ad una presentazione ragionata e costruttiva di questo tema.
Molti di questi esercizi sono stati proposti dai corsisti nell'ambito di attività di laboratorio durante il corso di perfezionamento già citato, tutti sono stati discussi con gli insegnanti in corsi d'aggiornamento e perfezionamento.

Li presentiamo tentando una suddivisione per tema che è comunque puramente indicativa e non implica una sequenza temporale.

1) L'anello dei polinomi
Può essere utile far lavorare gli alunni sulla definizione di polinomio e sulle operazioni con i polinomi a coefficienti in un campo (ad esempio $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) per far comprendere, attraverso l'esame delle proprietà, che cosa significa che questi costituiscono un anello. Anche se non si introduce la terminologia è importante lavorare sugli inversi e far notare che l'inverso moltiplicativo di un polinomio in generale non è un polinomio.
La discussione può essere avviata attraverso esercizi di completamento come quello che segue.

Completa, se possibile, inserendo al posto dei puntini opportuni polinomi.

$2a^3 - \frac{5}{2}a^2 + x - 10 + ... = 0$

$-2 \cdot ..... = 1$ $\qquad$ $3x \cdot .... = 2$

$(3x-4) \cdot .... = 1$ $\qquad$ $\frac{5}{4}x + ... = 0$ $\qquad$ ....

2) La divisione con resto

Una interessante attività didattica sulla divisione con resto, mirata specialmente a far acquisire ai ragazzi la consapevolezza dell'algoritmo che normalmente si utilizza per fare le divisioni fra polinomi, è quella proposta in Crosia, Grignani, Magenes, Pesci,1996.

Infatti é opportuno introdurre il teorema di divisione per polinomi in modo costruttivo attraverso la determinazione di quoziente e resto con le "sottrazioni successive": si tratta, come è noto, dati due polinomi *a(x)*, dividendo, e *b(x),* divisore, di togliere dal dividendo *a(x)* un opportuno multiplo del divisore in modo da abbassare di grado *a(x)* sottraendo il monomio di grado massimo.

Il procedimento può essere illustrato con un esempio come quello che segue:

$a(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 4; \qquad b(x) = x^2 + x + 3$

$a(x) - x^2 b(x) = -4x^3 - 3x^2 + 5x + 4 = r_1(x)$

$r_1(x) + 4x \cdot b(x) = x^2 + 17x + 4 = r_2(x)$

$r_2(x) - 1 \cdot b(x) = 16x + 1 = r(x)$

Sommando membro a membro si ottiene

$a(x) - (x^2 - 4x + 1) \cdot b(x) = r(x)$, cioè $a(x) = b(x) \cdot (x^2 - 4x + 1) + r(x)$.

Si sono così costruiti quoziente e resto e si è verificata su un esempio la relazione *a(x)=b(x)·q(x)+r(x).* Inoltre si può far osservare agli alunni che il procedimento ha termine quando si arriva a un polinomio *r(x)* di grado minore di *b(x).*

Appare in questo modo più chiaro e motivato il classico algoritmo di divisione che usualmente viene proposto.

Interessanti anche esercizi del tipo:

Verifica che i polinomi $a(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $b(x) = x - 1$,

$q(x)=x^2 -5x$, $r(x)=6x-6$ soddisfano la nota relazione $a(x)=b(x)q(x)+r(x)$. Possono $q(x)$ e $r(x)$ essere considerati quoziente e resto della divisione fra $a(x)$ e $b(x)$? Per quale motivo?
La discussione di esercizi come questo consente di sottolineare le condizioni per l'unicità di quoziente e resto.

3) Il massimo comun divisore di polinomi
Come si è visto nei richiami teorici due polinomi si dicono associati quando si possono ottenere l'uno dall'altro moltiplicando per un elemento del campo *K* dei coefficienti. E' facile osservare che il massimo comun divisore che si può ottenere, ad esempio, applicando l'algoritmo di Euclide è unico a meno di polinomi associati.
Può essere interessante far riflettere i ragazzi su questo fatto esaminando opportuni esempi.
Si applichi ad esempio l'algoritmo di Euclide ai polinomi di $\mathbb{Q}[x]$ $a(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e $b(x) = x^2 - 1$, si ottiene:

$a(x)$	$b(x)$	$q(x)$	$r(x)$
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$x^2 - 1$	$x - 6$	$12x - 12$
$x^2 - 1$	$12x - 12$	$\frac{1}{12}x + \frac{1}{12}$	0

da cui possiamo dire che il masimo comun divisore dei polinomi assegnati è l'ultimo resto non nullo cioè $12x-12$.
In realtà gli infiniti polinomi del tipo $a(x-1)$ in $\mathbb{Q}[x]$ sono massimo comun divisore dei polinomi assegnati; fra questi di solito si sceglie $x-1$ e molti testi parlano di questo polinomio come *il* massimo comun divisore.
Allo stesso modo possiamo far osservare ai ragazzi che in base alla definizione richiamata il massimo comun divisore fra $2x$ e $4x$ in $\mathbb{Q}[x]$ non é detto che debba essere $2x$; sarà un qualsiasi monomio del tipo ax , con a razionale.

4) L'unicità della fattorizzazione.
Il concetto di unicità della fattorizzazione é più importante di quello che potrebbe sembrare, anche per le sue implicazioni didattiche.
L'unicità della fattorizzazione in elementi primi, ci permette di scomporre agevolmente i polinomi di una frazione algebrica e di semplificarli fra loro, al contrario di quanto avviene in anelli non a fattorizzazione unica come ad esempio $\mathbb{R}[sint, cost]$, l'insieme delle espressioni polinomiali a coefficienti reali in *sint, cost*.

Osserviamo per inciso che $\mathbb{R}$*[sint, cost]* non è un anello di polinomi ma può essere visto come anello delle restrizioni al cerchio unitario delle applicazioni polinomiali da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$..
Si dimostra che si tratta di un dominio di integrità non a fattorizzazione unica (come è ben noto $sin^2 x = sinx \cdot sinx = (1 - cosx) \cdot (1 + cosx)$)
La non unicità della fattorizzazione fa sì che la scelta di una fattorizzazione piuttosto di un'altra renda una semplificazione o la risoluzione di un'equazione più o meno agevole. Questo contribuisce ad aumentare le difficoltà degli alunni quando si trovano di fronte a una identità goniometrica.

Se si sottolinea agli alunni il fatto che l'unicità della fattorizzazione vale a meno di elementi invertibili, hanno importanza anche esercizi di completamento come i seguenti (che sono comunque essenziali per le loro applicazioni):
x+2=1/2(.........); 10x-5= ...(2x-1)= ...(x-1/2)

Per una corretta acquisizione del concetto di polinomio primo, può essere anche proposto il seguente esercizio:
"Tutti i polinomi seguenti possono essere fattorizzati. Quali, secondo te, possono essere definiti primi in Q[x]?"
$2x-4;\ 3x-6;\ x^2-4;\ x^2-2x+1;\ 2x^2-x;\ 3x+3;\ 4x^2+2;\ -x-3;\ 2x^2-10x+12;$

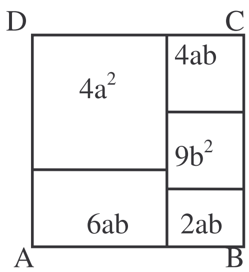
L'unicità della fattorizzazione in polinomi irriducibili permette poi di confrontare situazioni in cui la scelta di un procedimento o di un altro porta a risultati in cui è più meno semplice proseguire il procedimento iniziato.
Un esempio può essere il seguente esercizio:
"Scomponi in due modi $x^6 - 1$ *(come differenza di quadrati e come differenza di cubi) confronta e commenta i risultati ottenuti"*

5) <u>La fattorizzazione: significato e applicazioni</u>
E' molto importante sapere che cosa vuol dire fattorizzare un polinomio. Sembra banale ma alla richiesta, in un compito in classe in una classe prima di un Istituto tecnico per geometri:
"Dire quali tra i seguenti polinomi risultano già fattorizzati:
$(x-1)^2 - (x+y)^2 \qquad x(x+1)+1 \qquad (x+1)x+3 \qquad 2x(x-1)(x+y)$"

si sono avuti questi risultati: 50% di risposte esatte per il primo, 30% per il secondo, 20% per il terzo e 65% per l'ultimo.
Altrettanto importante è motivare l'alunno all'attività di scomporre i polinomi. A tal fine si ritengono utili ed interessanti alcune semplici dimostrazioni di proprietà aritmetiche, come le seguenti:

- *Dimostrare che sommando due numeri dispari consecutivi si ottiene un multiplo di 4.*
- *Dati 3 numeri naturali consecutivi, il quadrato di quello intermedio diminuito di 1 é uguale al prodotto del primo con il terzo.*
- *Dimostrare senza eseguire il calcolo che il numero* $2^6 + 2^3$ *é divisibile per 9.*
- *Dimostrare che la differenza tra il quadrato di un numero naturale maggiore di 2 e 1 é un numero non primo*

Così pure ci sembrano interessanti problemi di tipo geometrico quali:



Scrivi il polinomio che rappresenta l'area del quadrato ABCD in figura e determina il lato del quadrato.

Questi esercizi permettono di verificare la capacità dell'alunno di "tradurre" una frase in un'espressione algebrica, oltre alla sua abilità di riconoscere il metodo più idoneo da utilizzare per giungere alla dimostrazione.
Ci sembra di incentivare in questo modo un uso diverso dell'algebra, cioé un'algebra per risolvere problemi. Si nota infatti (come del resto è confermato dalle numerose ricerche su questi temi) come gli alunni prediligano nella risoluzione di questi problemi l'aritmetica, più controllabile da un punto di vista semantico e come molti allievi rivelino una rottura tra la conoscenza operativa a livello aritmetico e il livello più alto della conoscenza di tipo algebrico, di cui essi dispongono solo come meccanismo formale. Questo tipo di attività non é ovviamente per niente facile per i ragazzi ed è importante che i primi risultati deludenti non scoraggino l'insegnante. E' opinione largamente condivisa che attività

che favoriscono un apprendimento consapevole consentono di ottenere risultati soddisfacenti nel tempo.

Quanto alla fattorizzazione in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$ è importante far riflettere i ragazzi sugli insiemi numerici in cui stanno lavorando quando scompongono un polinomio in fattori.
Notiamo che molte volte i libri di testo non sono chiari su questo punto; pensiamo ad esempio alla richiesta generica "Scomponi in fattori i seguenti polinomi".
Su questo tema si possono proporre esercizi di questo tipo:
Scomponi, se è possibile, in fattori primi i seguenti polinomi in ciascuno degli insiemi indicati in tabella:

Polinomio	in $\mathbb{Z}[x]$	in $\mathbb{Q}[x]$	in $\mathbb{R}[x]$	in $\mathbb{C}[x]$
$x^2 - 4$				
$x^2 - 3$				
$x^2 + 2$				
$6x^2 - 5x + 1$				

Tra i vari test di primalità in $\mathbb{Z}[x]$, quello più accessibile e significativo da proporre agli studenti é quello della ricerca delle soluzioni, valido per polinomi di grado 2 o 3.
Tipologie di esercizi che sembrano interessanti possono essere:

- *Completa la tabella seguente*:

POLINOMIO p(x)	Soluzioni reali dell'equazione p(x)=0	Possibile fattorizzazione di p(x) in Z[x]
	2; 1/2; -1	
		$(x^2+4)(x+1)(3x-5)$
x^3-5x^2+2x+2		
x^3-x^2-2x+2		
		$(x^2+1)(x^2+10)$

- *Dire se é possibile determinare un polinomio p(x) di terzo grado a coefficienti reali la cui equazione p(x)=0:*

a) ha come soluzioni reali 2 e 4
b) ha come unica soluzione reale ½
c) ha come soluzioni 1,2,3

d) non ha nessuna soluzione reale.

- *Dato il polinomio* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *dire quali tra i seguenti polinomi sono suoi divisori:* x-2; x+1; x^2-3.
  Utilizzare i risultati ottenuti per scomporre il polinomio.

Altri esercizi utili possono essere:

- Esercizi di correzione di errori o di completamento di fattorizzazioni incomplete.
- Esercizi a scelta multipla
- Esercizi in cui é richiesto di fornire degli esempi:

Scrivi un polinomio divisibile per x-2a
Scrivi un polinomio divisibile per x+3y

- Esercizi di fattorizzazione di numeri naturali:

"Scomponi in fattori primi i numeri 899 e 319 utilizzando i prodotti notevoli studiati"
(899=900-1=(30-1)(30+1)=29·31; 319=400-81=...)
Esercizi di questo tipo sono poco frequenti nella nostra prassi didattica, mentre la scomposizione in fattori di polinomi finalizzata a scomporre in fattori primi i numeri naturali é espressamente indicata ad esempio nei programmi della scuola francese.

Concludiamo con l'osservazione che spesso, come è noto, si ha a che fare con polinomi in più variabili e che quindi il problema della fattorizzazione é più complesso, come si è già accennato. Riteniamo più opportuno didatticamente limitarci a far riflettere gli alunni sulla fattorizzazione di un polinomio prevalentemente nel caso di polinomi in una variabile.

Riferimenti bibliografici

Arzarello F.,1992
Un'introduzione concreta all'algebra astratta. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate - Vol 15 n.11-12 Nov.-Dic. 92 - CRDUM - Paderno del Grappa (TV).*

Baldassarri S, Margaglio C., Millevoi T., 1967
Introduzione ai metodi della geometria algebrica, Cremonese, Roma
Childs L.,1989
Algebra un'introduzione concreta - ETS Editrice
Citrini L., Castagnola E., Impedovo M., 1995
La Matematica.Strutture, Einaudi scuola, Milano
Crosia L., Grignani T., Magenes M.R., Pesci A., 1996
La divisione tra polinomi: una proposta didattica per la scuola media superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate - Vol 19B n.1 Feb. 1996 - CRDUM - Paderno del Grappa (TV).*
Dubreil P., Dubreil Jacotin M.L.,1961
Leçons d'algèbre moderne, Dunod, Paris
Herstein I.N.,1987
Algebra, Editori Riuniti
Prodi G., 1986
Matematica come scoperta - vol. 2, G. D'Anna, Firenze
Prodi G., Villani V., 1982
Anche il calcolo letterale può essere intelligente - *Archimede - vol. n° 34-35, n° 2, pp.163-173.*
Scimemi B., 1979
Algebretta - *Decibel – Zanichelli*

Si sono inoltre utilizzati:

Acquistapace E. - Osservazioni didattiche sulla fattorizzazione di polinomi - *Tesi di Laurea in Matematica, Università di Pavia A.A. 95/96*

Protocolli di insegnanti del "Corso di perfezionamento in Didattica della Matematica" - A.A.95/96 - Università di Pavia