

***Il laboratorio come "ambiente" per  
l'insegnamento-apprendimento  
della matematica:  
riflessioni***

**Sommario**

*Negli ultimi anni si parla spesso di laboratorio di matematica intendendo con questo termine un modello didattico che si contrappone a quello della didattica frontale e trasmissiva per coinvolgere l'alunno in modo attivo attraverso problemi, uso di strumenti, osservazione, collaborazione. Ci si propone qui di richiamare brevemente le origini del laboratorio didattico con particolare riferimento alla matematica e alla scuola italiana mettendo in evidenza l'evoluzione dell'idea di laboratorio in relazione alle teorie pedagogiche e didattiche. Verranno esaminati alcuni esempi di attività di laboratorio evidenziandone e confrontandone le caratteristiche, anche in relazione all'uso di strumenti tecnologici e non.*

**Summary**

*In recent years the term "mathematical laboratory" has been often used. This term is referred to a teaching model that, in opposition to that of the front didactics, aims at having the student get actively involved by solutions of problems, use of tools, observations and collaborations. Here we want to recall briefly the origins of the didactical laboratory with particular reference to the mathematics and to the italian school, stressing the evolution of the idea of laboratory according to pedagogical and didactical theories. Some examples of laboratory activity are shown highlighting and comparing their features, also in relation to the use of technological tools or not .*

*Maria Reggiani - Pavia*

***Il laboratorio come "ambiente" per  
l'insegnamento-apprendimento  
della matematica:  
riflessioni***

*Maria Reggiani*

*Dipartimento di Matematica - Università di Pavia*

... la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità.

**Plutarco**, *Moralia, De audiendo.*

Negli ultimi anni si è molto parlato di laboratorio di matematica, in particolare dopo che nel volume *Matematica 2003*, contenente le proposte dell'Unione Matematica Italiana per un curriculum adeguato ai bisogni della società nel mondo attuale, è stato dedicato un capitolo a questo tema, compendiando molte idee circolanti nell'ambito della ricerca didattica.

Nel 2007 anche le Indicazioni per il curriculum della scuola dell'infanzia e per il primo ciclo di istruzione e il decreto ministeriale sul nuovo obbligo di istruzione hanno sottolineato l'importanza del laboratorio inteso come "momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, negozia e costruisce significati interindividuali, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze

personali e collettive”<sup>1</sup> in altre parole come “modalità di lavoro che incoraggia la sperimentazione e la progettualità”<sup>2</sup>.

La didattica laboratoriale è dunque proposta come modello che si contrappone a quello della didattica frontale e trasmissiva per coinvolgere l’alunno in modo attivo. L’idea è quella di riproporre come modalità di lavoro il modello delle attività didattiche che si possono svolgere in un laboratorio inteso come luogo fisico in cui è possibile fare esperimenti o apprendere un mestiere o imparare una lingua o utilizzare un computer. Il riferimento è infatti spesso proprio all’apprendistato (da quello della bottega rinascimentale a quello che ancor oggi caratterizza ogni attività artigianale e spesso l’attività artistica): l’apprendista impara lavorando, osservando, collaborando, quasi mai eseguendo dopo aver ascoltato una spiegazione teorica.

E’ evidente che la nozione di didattica laboratoriale non è specifica delle discipline scientifiche né della matematica in particolare. Tuttavia interesse della didattica della matematica è approfondire il significato del termine nell’ambito dell’insegnamento della matematica e metterne a fuoco le specificità.

### **Un po’ di storia**

Dal punto di vista delle teorie pedagogiche l’idea di laboratorio come luogo/modalità (del fare e) dell’apprendere trova le sue radici già nelle idee pedagogiche di Jan Amos Komenski (Comenius) che nell’opera *Didactica Magna*, scritta fra il 1627 e il 1657 (spesso ricordata perché vi si propone l’insegnamento per cicli), mette in risalto l’importanza dall’esperienza e il ruolo dell’insegnante inteso come guida e coordinatore di un processo in cui l’alunno è protagonista del suo apprendimento. Un altro pedagogista spesso

---

<sup>1</sup> Da “Indicazioni per il curriculum della scuola dell’infanzia e per il primo ciclo di istruzione”, Allegato al decreto ministeriale del 31/7/2007, pag. 91

<sup>2</sup> *Ibidem*, pag.46

considerato precursore dell'idea di laboratorio è Enrico Pestalozzi che nell'opera "Come Gertrude istruisce i suoi figli" (1801) mette in risalto l'importanza dell'intuizione a partire da esperienze.

Il vero sviluppo di queste idee si ha però, come è noto, con John Dewey, che nel 1896 fonda a Chicago la Scuola Laboratorio nella quale attuare il metodo attivo da lui elaborato che fa dell'esperienza la base di ogni sviluppo di pensiero. L'educazione è per Dewey una continua ricostruzione di esperienza. Lo studente si appropria di una conoscenza tramite un processo che, partendo da un'attività, attraverso prove ed errori, osservazioni, esperimenti, controllo di ipotesi formulate, lo conduce a rielaborare intellettualmente quanto da lui esperito, a formulare nuove idee e a verificarle.

L'esperienza inoltre, secondo Dewey, è guidata dagli interessi dello studente che indicano lo stato di sviluppo da lui raggiunto e lo stato nel quale l'alunno sta per entrare e quindi come segni e sintomi dello sviluppo di capacità. Compito dell'insegnante è cercare, individuare gli interessi dell'alunno, interessi che non vanno né repressi né lusingati, ma coltivati, in quanto offrono il riferimento, l'argomento e la materia sui quali operare con efficacia sul piano educativo.

Fra i primi esponenti della scuola attiva in Europa ricordiamo Ovide Decroly (1871-1932) e Maria Montessori (1870 -1952), che propongono per le materie scientifiche e la matematica in particolare un metodo basato sull'uso di materiale per la Montessori e sull'osservazione della natura per Decroly, metodo che favorisce il passaggio dal concreto all'astratto.

La diffusione della prospettiva strutturalista segna, intorno agli anni '60, un momento di profonda evoluzione nel modo di intendere il rapporto tra educazione e costruzione di esperienza, modo che si differenzia da quello che aveva caratterizzato la scuola attiva. In campo educativo questo approccio fa proprie le riflessioni epistemologiche che avevano messo in discussione le concezioni

empiriche e induttivistiche della scienza e, di conseguenza, critica l'ottica che era coerente con tale visione dello sviluppo scientifico, quella cioè che aveva caratterizzato il movimento della scuola attiva; per analogia viene anche messa in discussione la didattica basata sull'acquisizione individuale della conoscenza.

Secondo l'approccio strutturalista un insegnamento orientato a far compiere allo studente esperienze di fatti e fenomeni non è in grado di garantire la possibilità di un transfert di tale esperienza in altri contesti, in quanto è solo attraverso l'insegnamento e l'apprendimento di una struttura che ciò può realizzarsi. Anzi, secondo l'approccio strutturalista l'insegnamento di contenuti specifici o lo sviluppo di esperienze specifiche di fatti e fenomeni, disgiunti dalla chiarificazione del loro contesto nella più vasta struttura di un campo di conoscenza, sono controproducenti in quanto non favoriscono il processo di generalizzazione, non stimolano l'intelletto e vengono facilmente dimenticati. Le nuove idee dello strutturalismo producono sostanziali cambiamenti sul piano della pratica didattica. La visione puerocentrica ed empirica della scuola attiva, centrata sulla costruzione di conoscenza a partire dagli interessi del fanciullo attraverso lo sviluppo di esperienze empiriche e la riflessione su di esse viene sostituita da una visione teoristica della didattica, centrata sugli aspetti strutturanti della conoscenza in grado di dare significato ai molteplici aspetti dell'esperienza e sullo sviluppo di competenze che riflettono sul piano operativo e concettuale l'organizzazione di tale struttura. Tuttavia nella pratica reale, questo cambiamento non avviene sempre in modo netto e lineare. Molte esperienze di innovazione didattica, soprattutto in Italia, mostrano profonde contaminazioni tra i due approcci e dunque costituiscono un importante riferimento per lo studio di esperienze di scuola laboratorio.

## **Il laboratorio di matematica nella nostra tradizione didattica**

A differenza di quanto avvenuto in altri paesi la scuola attiva in Italia si è affermata soprattutto nel secondo dopoguerra grazie a vari pedagogisti, fra cui ricordiamo Codignola, Borghi, De Bartolomeis, Visalberghi, ed è stata alla base di molte innovazioni didattiche e di varie sperimentazioni della seconda metà del novecento.

All'inizio del novecento, con particolare riferimento alla matematica, va ricordata la posizione di Giovanni Vailati (1863-1909), che si occupò attivamente di problemi relativi all'insegnamento e alla istituzione scolastica (nel 1905 fece parte di una commissione per la riforma della scuola media), proponendo il modello di una scuola laboratorio da lui intesa come luogo "dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a misurarsi e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa" (Vailati 1906)

Negli anni '60, in particolare in Italia, soprattutto in campo matematico, convivono approcci didattici profondamente diversi tra loro. Da una parte emergono progetti didattici profondamente segnati dalle nuove idee strutturaliste (si veda per esempio i numerosi progetti centrati sullo sviluppo delle "matematiche moderne") dall'altra si sviluppano progetti di innovazione didattica che cercano di coniugare il meglio del movimento della scuola attiva (importanza della motivazione e dell'esperienza attiva, conoscenza come rielaborazione di esperienza ..) con le nuove idee di matrice strutturalista, queste ultime usate soprattutto per spiegare e inquadrare teoricamente i processi di apprendimento sviluppati.

E' di questo periodo il "Sistema dei laboratori" di F. De Bartolomeis che propone una scuola (effettivamente sperimentata negli anni '70) interamente costituita come insieme di laboratori con specificità legate alle singole discipline. De Bartolomeis riguardo al laboratorio di matematica mette in risalto da un lato l'importanza di manipolare strumenti per "costruire" la matematica (come suggerito ad esempio da Z.P. Dienes, E. Castelnuovo, L. Lombardo Radice), dall'altro quella di "un approccio di laboratorio interno alla matematica e non finalizzato ai suoi usi applicativi" che permetterebbe di accostarsi all'apprendimento degli aspetti più teorici con atteggiamento di ricerca. Si può considerare a mio parere una espressione di questa modalità di concepire il fare laboratorio in matematica il lavorare su problemi per costruire/scoprire la matematica come proposto ad esempio da G. Prodi nel progetto Matematica come scoperta (1975-1985)

Nel clima sopra descritto si collocano alcune particolari esperienze di laboratorio di quegli anni che sono le mostre di materiale didattico per l'insegnamento della matematica: la "visita" alle mostre di materiale didattico (anni '70) può essere infatti considerata una particolare modalità di laboratorio.

Fra le mostre di quegli anni ricordo quella di Emma Castelnuovo (Castelnuovo E., Barra M., 1976) proposta nell'aprile del 1974 dagli alunni della scuola media Tasso di Roma, mostra che presenta diversi temi di matematica classica e di matematica "moderna" nella forma con cui gli alunni della scuola, sotto la guida della Castelnuovo, li avevano affrontati con atteggiamento di scoperta, sempre prendendo spunto dalla realtà.

Degli stessi anni è la mostra sulle isometrie piane elaborata dal gruppo di ricerca didattica di Pavia (Ferrari et alii, 1988). Si tratta di una sequenza di cartelloni che venivano proposti come oggetto di studio a gruppi di alunni e ad insegnanti in attività di aggiornamento. Il visitatore della mostra doveva osservare, leggere,

rispondere alle domande, a volte interpretare o eseguire disegni, risolvere problemi, giocare. Accanto ai cartelloni erano messi a disposizione i materiali da manipolare seguendo le indicazioni contenute nei cartelloni o da utilizzare nei giochi e nella risoluzione dei problemi proposti. Fondamentali in questo percorso erano i momenti di puntualizzazione, necessari per sistemare le conoscenze acquisite, corrispondenti a cartelli contrassegnati con un segnale di STOP.

Cito per ultima, in questo breve elenco, la mostra di Vittorio Checcucci “L’impatto della scuola con il mondo moderno: mostra di materiale didattico per l’insegnamento della matematica” in quanto su di essa mi voglio soffermare un po’ più a lungo, descrivendone la metodologia e i principi ispiratori, a partire dalla descrizione che Checcucci stesso fa del suo materiale e delle sue idee.

Il tema della mostra è “I numeri naturali quando servono per ragionare” e il contenuto è la numerazione con particolare riferimento alle basi diverse da 10, in particolare 2 e 4. La mostra contiene materiali da manipolare, molti giochi, in genere di non facile soluzione ed è caratterizzata dal fatto che, nelle schede descrittive che l’accompagnano, non ci sono molte spiegazioni. Dice Checcucci: “Non serve a nulla guardare la mostra; si partecipa alla mostra manipolando ed elaborandone le proposte sotto lo stimolo di ciò che si vede o si legge... La guida evita la spiegazione: quando lo fa è per superare un blocco.”

L’autore definisce i laboratori didattici con l’espressione “la scoperta della ricerca” (Checcucci 1993, pag 528). Scopo dell’attività di laboratorio proposta con la mostra è per lui promuovere, attraverso la percezione, l’interiorizzazione, la conquista dei concetti, lo sviluppo delle capacità logiche.

I concetti devono essere acquisiti attraverso tutte le attività proposte. Uno degli obiettivi della mostra è la “conquista del linguaggio” che si raggiunge solo attraverso un processo di



apprendimento globale che parte dalla attività e che è alla base della “crescita dello sviluppo cognitivo” (Bruner).

Fondamentali sono anche gli aspetti sociali dell’apprendimento: la comunicazione fra insegnante e alunni, fra alunni, il gioco, il lavoro di gruppo....

Uno dei giochi proposti nella mostra di Checcucci è quello ben noto come “La torre di Hanoi”, un problema presentato in forma di favola risalente a Edouard Lucas 1883, la cui soluzione porta alla costruzione di un algoritmo molto noto agli informatici, già da me riproposto su questa rivista due volte in contesti e con motivazioni diverse negli anni scorsi (Reggiani 2006; Antonini, Reggiani 2007). Rimandando dunque a quelle descrizioni riporto qui solo alcune considerazioni rispetto alla problematica che ci interessa.

Ricordo che la favola narra di alcuni monaci che dall’inizio dei tempi spostano, da una colonna ad un’altra, 64 dischi d’oro di diametro decrescente seguendo la regola che i dischi vanno spostati uno alla volta e un disco non deve essere mai posto su un altro di diametro inferiore. Per effettuare lo spostamento seguendo la regola utilizzano come “tappa intermedia” una terza colonna. Quando tutti i dischi saranno trasferiti il mondo finirà.



Checcucci propone nella mostra per capire il problema questo modello in legno e lo accompagna con questo breve commento:

“Sembra che tutto dipenda dal piccoletto, purché riesca, senza mai sbagliarsi, a saltare da un piolo all’altro, muovendosi una volta sì e una no e girando sempre nello stesso verso.”

Egli dunque fornisce una indicazione per capire “come fare” e suggerisce una ciclicità supportata anche dalla disposizione inusuale dei pioli nel suo modello.

Tuttavia, come si è visto nei già citati articoli, una volta capito “come si fa” la domanda diventa “quante mosse ci vogliono”, dunque come passare da una formula ricorsiva (che a seconda di come viene letta la ricorsività, può essere scritta in più modi), alla formula generale per poi rispondere alla domanda fantastica posta dal problema “quando finirà il mondo?”.

Nei già citati articoli si sono esaminate possibili soluzioni anche in riferimento a congetture e strategie utilizzate da alunni cui è stato proposto.

Aggiungo qui che dal punto di vista di quello che usualmente si intende per laboratorio di matematica ci sono tutti gli ingredienti: il problema, la manipolazione, la ricerca, le soluzioni parziali che portano spontaneamente al rilancio di nuove domande da parte degli alunni stessi o se necessario dell’insegnante.

La risposta può essere data a diversi livelli di complessità (dalla semplice verifica, alla numerazione in base due, alla teoria delle progressioni geometriche) e questo è un aspetto centrale in una didattica di tipo laboratoriale. La soluzione di un problema non deve essere fine a se stessa ma deve aprire la strada alla teoria sottostante.

Del gioco della torre di Hanoi oggi si trovano in rete molte versioni interattive: il confronto potrebbe offrire spunti di riflessione interessanti.

### **Quale laboratorio oggi**

Dopo queste particolari esperienze di laboratorio didattico e di scuola attiva che hanno caratterizzato alcuni settori della scuola italiana negli anni '60 e '70, si arriva, come si è detto, alla ripresa dell'idea di Laboratorio didattico negli ultimi dieci anni.

Due sono, a mio parere, gli aspetti fondamentali che differenziano il laboratorio di matematica oggi da come era concepito nel periodo precedentemente considerato:

- lo sviluppo e la diffusione della tecnologia,
- lo sviluppo, a partire dalla fine degli anni '70, della ricerca in didattica della matematica e dei quadri teorici relativi alle modalità di insegnamento - apprendimento che forniscono strumenti di analisi per le attività, le relazioni e i processi che costituiscono il laboratorio stesso.

Fra i quadri teorici fondamentali per questa ridefinizione del laboratorio didattico, ricordiamo in particolare quelli di matrice costruttivista

Il costruttivismo ha contribuito a mettere in relazione gli aspetti psicopedagogici, coinvolti nell'apprendimento e nello sviluppo, con la riflessione epistemologica sulla conoscenza da apprendere e con l'analisi delle specifiche strutture concettuali che caratterizzano le varie discipline. Tutto ciò al fine di meglio comprendere come gli studenti agiscono nel complesso mondo fisico, sociale, e nel più ampio contesto culturale che modella le attività attraverso le quali prende forma e vita il loro apprendimento.

Sul piano educativo ciò ha portato ad assegnare grande importanza allo sviluppo di una articolata e ricca esperienza relativa al dominio di conoscenza oggetto di studio da parte degli studenti, vista come fattore chiave nella costruzione di concetti e significati relativi a tale dominio.

Inoltre la diffusione della tecnologia, dagli anni '80 in poi, ha reso necessario studiare il ruolo degli strumenti e la loro relazione con gli oggetti matematici e con la costruzione dei concetti. A questo proposito fra gli elementi teorici che possono fornire elementi per ridefinire la nozione di laboratorio di matematica tenendo conto della tecnologia hanno assunto in questi anni un ruolo centrale:

- la distinzione fra strumenti tecnici e strumenti psicologici, il loro ruolo di mediazione semiotica (Vygotskij, 1980)
- la teoria ergonomica di Rabardel (Vérillon P. Rabardel P. 1995)
- la nozione di riconfigurazione di una conoscenza (SSK - Sociology of Scientific Knowledge, Knorr-Cetina, 1981)
- la nozione di spazio di Azione, Produzione e Comunicazione (Arzarello, 2007)

che ci permettono di trovare chiavi di lettura per il ruolo degli strumenti, dei loro schemi d'uso, sulle relazioni fra insegnanti e alunni e fra alunni e alunni in attività di laboratorio.

Fra queste in particolare alcune idee elaborate nel campo di ricerca della Sociologia della Conoscenza Scientifica (SSK) consentono di inquadrare la nozione di laboratorio in ambito costruttivista. Per la SSK i laboratori non sono solo lo spazio fisico dove vengono effettuati esperimenti elaborando ciò che è al centro della ricerca, ma possono essere visti come uno "spazio della conoscenza" in cui aspetti della realtà che si vogliono studiare vengono riconfigurati per poter essere indagati. Trasponendo queste teorie in ambito didattico possiamo vedere il laboratorio didattico di matematica come un ambiente nel quale le conoscenze matematiche vengono riconfigurate e ricostruite attraverso l'uso di tecniche, di strumenti e di interazioni tra soggetti.

Quello che oggi intendiamo per *laboratorio di matematica* è dunque il risultato di un percorso di esperienze e di teorie che racchiude e sintetizza diverse componenti, la cui analisi può aiutare lo studio e la comprensione delle relazioni che si stabiliscono tra costruzione di esperienza, apprendimento e sviluppo in campo matematico.

Tale nozione da noi studiata alcuni anni fa in relazione soprattutto all'uso di tecnologie (Chiappini, Reggiani 2003) è stata proposta e sintetizzata in un recente documento da G. Chiappini (Chiappini 2007). Qui il laboratorio didattico di matematica è definito come

“quello spazio fenomenologico dell’insegnamento apprendimento della matematica che si struttura attraverso l’uso di specifici strumenti tecnologici e di articolati processi di negoziazione e in cui la conoscenza matematica viene assoggettata a un nuovo ordine rappresentativo, operativo e sociale per essere riconfigurata in oggetto di investigazione e poter essere quindi più efficacemente insegnata e appresa”.

Alla luce delle teorie qui brevemente sintetizzate e delle numerose esperienze che abbiamo ricordato, possiamo dire che fra gli elementi che caratterizzano una attività di laboratorio (di matematica) sono centrali:

- un problema da affrontare
- la presenza di oggetti / strumenti che si possono utilizzare - manipolare
- la modalità di lavoro (relazioni – interazione)
- la presenza e il ruolo dell’esperto - coordinatore
- .....

L’ultima riga (aperta) indica la possibilità che il laboratorio abbia anche caratteristiche aggiuntive, oltre alle precedenti che sono indispensabili alla sua identificazione.

Può essere interessante esaminare questi ‘ingredienti’ in alcune attività significative scelte a titolo di esempio.

Si è già parlato, nel paragrafo precedente, del gioco noto come “la torre di Hanoi”. L’attività di laboratorio proposta da Checcucci attraverso la mostra era centrata sui primi due punti (il problema e gli oggetti) ma lasciava in ombra l’importanza delle modalità di lavoro, delle interazioni e della collaborazione fra i partecipanti (visitatori, alunni o insegnanti). Era invece indicato in modo ben preciso, come si è già detto, il ruolo della “guida”. Nella riproposizione dello stesso gioco in una attività di laboratorio nell’ambito del progetto Lauree scientifiche (Antonini Reggiani 2007), invece, l’attività è proposta in gruppi cooperativi. Il ruolo

dell'interazione fra alunni all'interno del gruppo e del confronto fra gruppi è fondamentale e consente di far nascere dalla discussione nuovi aspetti della situazione problematica e dunque di formulare nuove domande nel problema.

Un altro aspetto che notiamo nell'analisi dei laboratori descritti nell'articolo appena citato, è l'uso della formula come "strumento", dunque l'estensione del significato dell'uso di oggetti a oggetti formali e al linguaggio verbale o simbolico, in linea con alcuni aspetti delle teorie precedentemente delineate e anche con quanto affermato da De Bartolomeis negli anni '70.

### **Laboratorio di matematica e tecnologia**

Abbiamo già detto delle teorie didattiche che forniscono quadri teorici per costruire e analizzare attività di laboratorio di matematica mediate dalla tecnologia.

Mi pare che due siano gli aspetti fondamentali che devono essere considerati:

- La "manipolazione" avviene in modo indiretto attraverso il computer (tastiera, mouse) e il software con modalità (istruzioni, comandi,...) più o meno "rigide" e "trasparenti"
- Gli "oggetti matematici" mediati dal software sono "riconfigurati" (figure, simboli, variabili, grafici, discreto/continuo,...)

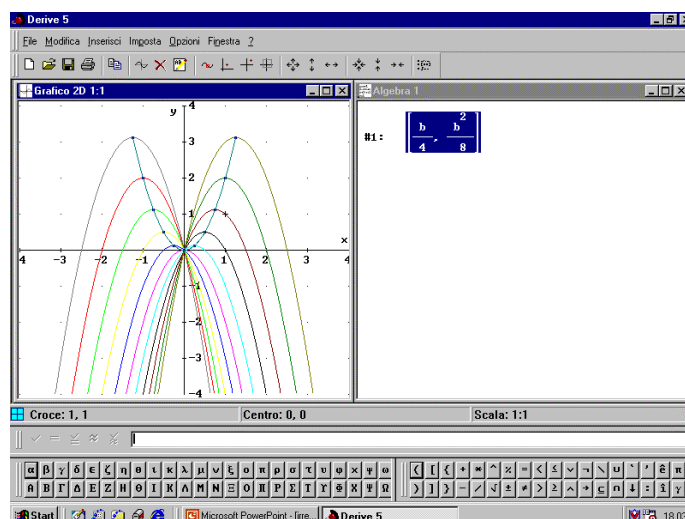
Vediamo due esempi che illustrano rispettivamente i due punti appena citati:

La scrittura e manipolazione di espressioni algebriche svolta con un manipolatore simbolico può essere di per sé oggetto di attività di laboratorio oppure può essere una fase di una attività più complessa all'interno della quale sia necessario svolgere calcoli.

In entrambe i casi la manipolazione avviene attraverso l'uso di opportuni comandi che operano sulle espressioni seguendo regole non sempre dichiarate e non sempre facilmente decodificabili, in ogni caso spesso non conosciute dallo studente che le utilizza.

Il contrasto fra la facilità d'uso e la complessità dei concetti matematici incorporati dal software e sottesi al semplice gesto con cui, con un click del mouse, si ottiene la semplificazione di una espressione, la risoluzione di una equazione, la fattorizzazione di un polinomio e così via deve essere motivo di riflessione per l'insegnante che deve organizzare occasioni di studio proprio a partire dall'interpretazione dei risultati e dei procedimenti.

Prendiamo ora in considerazione una attività di laboratorio sul significato del parametro nell'equazione di un fascio di curve, ad esempio lo studio di un fascio di parabole. Un software come *Derive* ci permette di visualizzare alcune parabole del fascio e di vedere facilmente a quali valori del parametro corrispondono. La variazione del parametro è in un insieme finito di valori ma la visualizzazione, se gli estremi dell'intervallo di variazione e il passo sono scelti opportunamente, permette di percepire "come è fatto il fascio". Se poi ci si propone ad esempio di determinare il luogo dei vertici delle parabole del fascio, scritto il luogo in forma parametrica, scritte cioè le coordinate del generico vertice, e scelti per il parametro gli stessi valori utilizzati per rappresentare il fascio, il software permette di rappresentare e unire i punti corrispondenti ottenendo così la rappresentazione di una porzione finita del luogo. Risulta allora facile congetturare di quale curva si tratti. Il passo successivo è la determinazione dell'equazione cartesiana.



Se analizziamo il lavoro proposto e confrontiamo con analoghe attività svolta con carta e penna, vediamo come la concretizzazione fornita dal software per gli oggetti matematici in gioco trasformi il problema facendo prevalere l'aspetto geometrico e visivo su quello algebrico. Alcuni aspetti non vanno però sottovalutati, in particolare il fatto che si opera in ambito discreto, come sempre quando si utilizza un computer, e dunque non si può far variare il parametro con continuità e che si prende in considerazione un insieme finito di curve identificandolo, assumendolo mentalmente, come modello, di un insieme infinito.

L'uso di tecnologie informatiche e in particolare di software offre molte opportunità di svolgere attività di laboratorio ma è peraltro evidente che una attività in laboratorio non è di per sé un "laboratorio" nel senso fin qui delineato.

Fondamentale a questo proposito è la scelta del software che deve essere adeguato alla risoluzione del particolare problema scelto e permettere un approccio alla sua soluzione che si differenzi da quello con carta e penna per almeno uno dei seguenti motivi:



- permette di osservare aspetti dinamici della situazione
- consente di visualizzare, di rappresentare
- fornisce punti di partenza per congetturare
- svolge rapidamente calcoli che fatti a mano richiederebbero troppo tempo e impegno e distoglierebbero dagli aspetti concettuali del procedimento.

Naturalmente questo elenco si può allungare. Ritengo invece che non siano in linea con quanto detto attività svolte in laboratorio con il solo obiettivo di utilizzare un software e che prevedono di svolgere esercizi che si fanno risolvere con facilità, a volte maggiore, con carta e penna, senza avere neppure l'obiettivo di analizzare o studiare quanto fa il computer.

Spesso uno stesso problema può essere affrontato in laboratorio con software diversi e con modalità diverse e questa scelta può renderlo più o meno significativo per questo tipo di attività.

Prendiamo come esempio le trasformazioni geometriche di curve algebriche nel piano cartesiano.

Il problema può essere affrontato con *Derive* operando prevalentemente nella pagina algebra, sostituendo alle variabili nell'equazione della curva da trasformare le espressioni ricavate dalle equazioni della trasformazione. Si tratta di ripetere, utilizzando il comando SUB del software, lo stesso procedimento che si fa con carta e penna. Il vantaggio può essere esclusivamente nei calcoli ma non sempre è significativo.

Sempre con *Derive* è possibile affrontare il problema utilizzando le matrici associate alle trasformazioni e operando sulle equazioni delle curve espresse in forma parametrica.

Il vantaggio dal punto di vista operativo è evidente. Inoltre il software permette di ottenere la rappresentazione grafica delle curve espresse in forma parametrica ed è quindi possibile una

immediata visualizzazione e quindi un controllo sulla correttezza dei passaggi svolti.

Il problema può essere anche affrontato con Cabri géomètre, che ha comandi predefiniti per le trasformazioni e, introdotto un riferimento cartesiano, permette di visualizzare le equazioni delle curve costruite geometricamente e delle loro trasformate. Una analisi dei grafici ottenuti e delle relative equazioni e il confronto con le equazioni ottenute svolgendo i conti in modalità esatta mette però in evidenza l'incidenza degli errori di approssimazione nelle trasformazioni operate con Cabri.

Il confronto fra le tre modalità proposte permette di evidenziare le caratteristiche di ognuna di esse al fine dell'organizzazione di una attività di laboratorio:

- la prima, come si è detto, è centrata su procedimenti algebrici come traduzione di relazioni geometriche, richiede di saper controllare il formalismo algebrico, pur svincolando dai calcoli;
- la seconda sfrutta meglio a mio parere le potenzialità del software e consente di apprezzare l'essenzialità della rappresentazione matriciale delle trasformazioni e conseguentemente parametrica delle curve;
- l'ultima, quella che utilizza il software Cabri, si basa sugli aspetti geometrici della trasformazione, può essere utilizzata per trasformare curve costruite come luoghi e grafici di funzioni. Con le impostazioni di default che forniscono una approssimazione inadeguata offre lo spunto per avviare una utile attività di esplorazione sugli errori.

Dunque ognuno di questi approcci e di queste scelte consente di avviare una differente attività di laboratorio. E' necessario però che questo scaturisca da un progetto consapevole, mirato a sfruttare le potenzialità della scelta fatta.

## **Conclusioni: progettare un laboratorio di matematica**

Quali compiti dunque per l'insegnante che progetta una attività di laboratorio?

Risulta evidente da quanto detto che il primo passo è la scelta del problema che, per essere tale, non ha bisogno di un particolare contesto ma deve suscitare l'interesse e il coinvolgimento degli alunni a cui è rivolto, non può essere troppo facile perché non aggiungerebbe nulla alle conoscenze e alle competenze di chi lo affronta e non deve essere troppo difficile per non demotivare. E' utile inoltre che possa essere affrontato in più modi per consentire di far nascere nuove domande dal confronto di strategie o da differenti soluzioni.

Un secondo passo è la scelta degli strumenti da mettere a disposizione degli alunni e della modalità di lavoro, la definizione dei compiti e dei ruoli. Su questo punto è fondamentale il contributo delle ricerche sulla cooperazione a scuola.

Il punto centrale resta comunque creare le condizioni per il passaggio dalla "manipolazione" di "oggetti", che come abbiamo visto possono essere reali, virtuali, formali..., alla costruzione dei concetti, che è frutto di una rielaborazione di quanto fatto, visto, discusso con i compagni e con l'insegnante e può avvenire secondo modalità e in tempi diversi per ciascun alunno.

## **Riferimenti bibliografici**

**Antonini S., Reggiani M.** (2007): Il piacere di giocare con i numeri, L'Ins. della Matematica e delle Scienze Integrate, 30 A-B, n.4, 316-354

**Arzarello, F.** (2007): Verso un possibile quadro teorico. Azioni pragmatiche, empiriche ed epistemiche in TI - Nspire, Sperimentazioni didattiche con TI - Nspire<sup>TM</sup> CAS. ADT - Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 7 -16.

**Castelnuovo E.**(1963): Didattica della Matematica, La nuova Italia ed., Firenze 1963

- Castelnuovo E., Barra M.**(1976) *Matematica nella realtà (didattica, proposte ed esercizi)*, Boringhieri, Torino
- Checucci V.** (1971): *Creatività e matematica*, Quaderni di Corea n.5, Libreria Editrice Fiorentina, Firenze
- Checucci V.**, (1993): *Scritti, L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 16, 5-6, 564-567
- Chiappini G.** (2007), *Il laboratorio didattico di matematica: riferimenti teorici per la sua costruzione*, in Garuti R., Orlandoni A., Ricci R. eds, *Il laboratorio matematico scientifico: suggerimenti ed esperienze*, allegato al n.8 di *Innovazione educativa*, IRRE Emilia Romagna, ottobre 2007.
- Chiappini G., Reggiani M.**(2003): *Toward a didactical practice based on mathematics laboratory activities*, Proc. of Cerme 3 (Third Conf. of the European Society for Research in Mathematics Education), [http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9\\_list.html](http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9_list.html)
- De Bartolomeis F.** (1979), *Sistema dei laboratori*, Feltrinelli, Milano
- Dienes Z.P.** (1962): *Costruiamo la matematica*, O.S., Firenze 1962.
- Ferrari M., Bazzini L., Pesci A., Reggiani M.**, 1988 *Le isometrie piane: mostra di materiale didattico*, Progetto CNR Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n.3
- Giacardi L.** (1999): *Matematica e humanitas scientifica. Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati*, Bollettino UMI – La matematica nella Società e nella cultura (8) 3 – A, 1999
- Knorr-Cetina, K.** (1981): *The Manufacture of Knowledge*. Oxford:Pergamon, 1981
- Reggiani M.** (2006): *Mathematics laboratory activities with Derive: examples of approaches to algebra*. Proceedings of Cerme 4 (Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Bosch M. ed. , 1082-1091  
<http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/9/wg9listofpapers.htm>
- Vailati G.**(1906), *Idee pedagogiche di H.G. Wells*, in “*Rivista di Psicologia applicata alla pedagogia e alla psicopatologia*”, anno II, n.3, maggio-giugno 1906
- Vérillon, P. & Rabardel, P.:** (1995), ‘*Artefact and cognition: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity*’. *European Journal of Psychology in Education*, vol. IX, n°3.
- Vygotskij L.S.** (1980), *Il processo cognitivo*. Boringhieri, Torino