Da Atti del XVIII convegno UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica (1996)

Continuità nella costruzione del pensiero algebrico

Maria Reggiani
Dipartimento di Matematica - Università di Pavia

Da alcuni anni la ricerca in didattica della matematica, a livello nazionale ed internazionale, ha rivolto la propria attenzione ai problemi legati all'insegnamento-apprendimento dell'algebra e al passaggio dall'aritmetica intesa come operatività nell'ambito di singoli insiemi numerici, all'algebra intesa nella molteplicità delle sue funzioni (di sintesi, generalizzazione, rappresentazione, trasformazione, ...).
Le principali ricerche degli ultimi anni a livello nazionale sono state recentemente sintetizzate da Bazzini, Gallo e Lemut in un articolo in Italian Research in Mathematics Education 1988-95, quaderno sulle ricerche italiane in didattica della matematica presentato a ICME 8 (cfr. Bazzini-Gallo-Lemut 1996).
Si tratta di ricerche teoriche, mirate alla costruzione di un modello atto ad interpretare difficoltà, ostacoli, errori (ad esempio quello proposto in Arzarello-Bazzini-Chiappini,1994) e di ricerche più strettamente didattiche che analizzano difficoltà nell'apprendimento e nell'uso dell'algebra o che si propongono di studiare le attività intellettuali coinvolte nell'acquisizione e nell'uso dei concetti algebrici, anche in relazione al problem solving (Boero 1992, Chiappini-Lemut 1991, Gallo 1994,...).
Molte ricerche mettono in relazione i due momenti apprendimento-insegnamento e configurano proposte di lavoro in classe o metodologie di intervento su particolari problemi cognitivi (Gallo et alii 1995, Gherpelli-Malara 1996; Reggiani 1994 e 1995).
Tali ricerche si collocano nel quadro più ampio dei numerosi studi internazionali. Fra questi possiamo ricordare in particolare quelli della Sfard nei quali viene messa in rilievo la duplicità processo-oggetto delle espressioni algebriche (Sfard 1991). Da qualche anno una serie di seminari italo-francesi sulla didattica dell'algebra, denominati SFIDA (Séminaire Franco - Italien de Didactique de l'Algèbre) consente un confronto e una interazione fra le ricerche sul tema svolte in questi due paesi.
Il problema della continuità nell'insegnamento nel passaggio dalla scuola media alla scuola secondaria superiore, affrontato in modo particolare da Malara (1994), coincide con il problema della continuità nella formazione del pensiero algebrico e dunque non può prescindere dalle ricerche citate.

L'algebra nei programmi di scuola media e biennio

Per affrontare il problema della continuità di insegnamento fra scuola media e biennio, è opportuno partire da uno sguardo ai programmi dei due livelli scolari relativamente ai temi in oggetto.

Gli elementi di aritmetica e algebra previsti dai programmi della scuola media inferiore sono contenuti nei punti intitolati rispettivamente "insiemi numerici", "problemi ed equazioni", "il metodo delle coordinate", "corrispondenze e analogie strutturali". Il termine "algebra" non vi compare in modo esplicito, tuttavia si parla di “esercizi di calcolo esatto e approssimato, approssimazioni successive come avvio ai numeri reali,..., individuazione di dati e di variabili significative in un problema, risoluzione mediante ricorso a procedimenti diversi (diagramma di flusso, impostazione e calcolo di espressioni aritmetiche), lettura, scrittura, uso e trasformazione di semplici formule, semplici equazioni e disequazioni numeriche di primo grado”. Si tratta di un programma ampio e articolato, commentato negli 'orientamenti per la lettura dei contenuti' in cui si dice che nella risoluzione di problemi "si chiede all'allievo di farsi carico della traduzione in termini matematici. Nell'ambito di questo lavoro di traduzione si troverà, tra l'altro, una motivazione concreta per la costruzione delle espressioni aritmetiche e per le relative convenzioni di scrittura". Più avanti si trova l'invito a "evitare il calcolo letterale avulso da riferimenti concreti".
Nei programmi per il biennio della scuola secondaria superiore (proposta della commissione Brocca, programma B) i temi "Insiemi numerici e calcolo" e "Relazioni e funzioni" riprendono aritmetica e algebra. Nell'elenco dei contenuti possiamo leggere:

“- Operazioni, ordinamento e loro proprietà negli insiemi dei numeri naturali, dei numeri interi relativi e dei numeri razionali.
- Valori approssimati e loro uso nei calcoli elementari. Introduzione intuitiva dei numeri reali. Radicali quadratici ed operazioni elementari su di essi.
- Il linguaggio dell'algebra e il calcolo letterale. Monomi, polinomi, frazioni algebriche
- Equazioni e sistemi di primo e di secondo grado. Disequazioni di primo grado.”

Nel commento ai singoli temi, leggiamo inoltre:
“... La sicurezza nel calcolo si acquisisce gradualmente nell'arco del biennio...
Nel presentare argomenti tradizionali di algebra è opportuno evitare di dare carattere di teoria ad argomenti che si riducono a semplici artifizi e di fornire classificazioni e regole distinte in situazioni in cui valgono gli stessi principi generali”.
Analoghe osservazioni si trovano nelle "indicazioni didattiche"
Risulta dunque evidente che nei programmi è presente la continuità a livello di contenuti (gli elementi fondamentali sugli insiemi numerici sono ripresi con l'intento di sistematizzare, riflettere, approfondire) e soprattutto a livello di indicazioni didattiche e quindi di obiettivi e di metodi.
Sta dunque a chi opera nella scuola trovare i modi perché il processo di costruzione delle conoscenze algebriche sia "continuo", sottolineando, ad esempio, nei diversi momenti, gli aspetti significativi quali le differenti funzioni dell'algebra e aiutando così i ragazzi a costruire per passi il "pensiero algebrico".

La costruzione del 'pensiero algebrico'

E' necessario prima di tutto chiarire che cosa intendiamo con questo termine. In Bazzini et alii, 1996 il pensiero algebrico è definito un “registro per rappresentare e risolvere problemi”. Si tratta cioè di insegnare agli alunni ad utilizzare l'algebra come mezzo di rappresentazione e di risoluzione di problemi: per fare questo bisogna padroneggiare l'algebra e le sue regole, saperne dominare l'aspetto di linguaggio formale.

Osserva giustamente Malara (1994):

"occorre insegnare a tradurre da un linguaggio ad un altro (leggere-interpretare formule in linguaggio algebrico e viceversa esprimere in formule proposizioni del linguaggio ordinario) ed insegnare ad esprimere le proprie idee nel nuovo linguaggio (argomentare e dimostrare tramite formule e loro trasformazioni algebriche)"

Si deve dunque cercare di costruire fra medie e biennio (e forse partendo anche prima) un percorso che abbia come obiettivo la costruzione del "pensiero algebrico".

La continuità consisterà allora nel fatto che attraverso diverse tappe di sviluppo, diverse modalità, momenti forti, eventuali fratture cognitive, ripensamenti, e così via si persegua uno stesso obiettivo.

La continuità sarà dunque di tipo metodologico, intendendo con questo termine non tanto il complesso del comportamento didattico, ma l'attenzione agli aspetti e alle occasioni che consentano di costruire un modo di pensare.

Nei paragrafi che seguono cercherò di mettere in risalto alcuni momenti che possono far parte di questo percorso; per far questo mi servirò di osservazioni didattiche maturate nell'ambito delle ricerche svolte con gli insegnanti di scuola media e superiore del gruppo di Pavia e di spunti tratti dalle ricerche di altri gruppi (cfr. bibliografia).

Algebra e aritmetica

La prima domanda che viene spontaneo porsi quando si affronta il problema di costruire un itinerario che aiuti i ragazzi a costruirsi la capacità di usare l'algebra come "strumento di pensiero" è:

"Quando si comincia a 'fare algebra'?"

E' noto che la tradizione didattica collocava l'algebra in terza media, quando si affrontava lo studio dei numeri relativi, delle equazioni e la manipolazione di espressioni simboliche.

Abbiamo già visto che l'atteggiamento dei programmi della scuola media è invece completamente diverso e del resto è ormai opinione diffusa che le basi del pensiero algebrico si pongano fin dalla scuola elementare, quando si comincia ad operare sui numeri.

E' chiaro che in questa fase l'attenzione dell'alunno sarà completamente concentrata sul singolo problema o sulla particolare operazione, la cui soluzione di per sè presenterà ostacoli ed avrà obiettivi al proprio interno, ma sarà importante proporre fin dall'inizio attività variate che portino a riflettere non solo sul risultato ma sul processo, che facciano vedere l'uguaglianza non solo in senso procedurale ma anche relazionale (ad esempio due modi diversi di scrivere lo stesso numero, cfr. Bertolini et alii 1993, Cavallari et alii 1994), che avviino alla soluzione di semplici equazioni (anche se ovviamente non si userà il termine né si teorizzeranno metodi di soluzione).

Dunque si comincia a fare algebra quando si fa aritmetica.

Quali gli spunti nella scuola media?

Non è mia intenzione, né sarebbe possibile, tracciare un itinerario completo, né essere esaustiva.
Mi limiterò a fornire qualche esempio che possa dare un'idea del metodo di lavoro.
Le occasioni per fare pre-algebra alle medie sono svariate.
Già quando si studiano i numeri naturali e le loro proprietà è abituale evidenziare i sottoinsiemi dei pari e dei dispari. E' abbastanza usuale inoltre sottolineare alcune proprietà relative ad esempio a somme e prodotti di pari e dispari , consecutivi e non. (Cfr. ad esempio Chiappini-Lemut 1991, Gherpelli-Malara 1996, Sibilla 1994).
In queste attività che quasi tutti svolgono e che, in generale, interessano i ragazzi si presentano moltissime occasioni di avviare al pensiero algebrico, prima fra tutte la rappresentazione generale del pari e del dispari. Ad essa si può arrivare facilmente passando attraverso le consuete rappresentazioni grafiche che aiutano anche a congetturare i risultati almeno per quel che riguarda le somme.
Un problema successivo è quello di prendere in considerazione il problema della rappresentazione di due numeri (pari o dispari) del tutto generici. Risulta, come osservato da molte ricerche, che non è un passo immediato il rendersi conto della necessità di ricorrere a rappresentazioni che utilizzano variabili diverse per non ricadere sempre in casi particolari. Per convincere gli alunni sarà utile considerare sia proprietà che hanno validità generale che proprietà che valgono ad esempio per numeri dispari consecutivi e non per due numeri dispari qualunque (ad es. la somma è divisibile per quattro) e confrontare rappresentazioni e verifiche. Risulterà loro chiaro che una rappresentazione scorretta può far ritenere vere proprietà valide solo in casi particolari.
Si propone così il problema della scelta delle variabili e delle rappresentazioni adeguate, problema che può essere allargato facendo vedere che anche l'uso di scritture diverse e corrette, può non consentire di leggere le stesse cose. Fra i numerosi esempi ne citiamo due presentati in Malara (1994, pag70) "se si considera la somma di un numero con il suo quadrato difficilmente la semplice lettura della formula $n+n^2$ porterà l'allievo ad arguire che in ogni caso tale somma sarà un numero pari, ma trasformando la scrittura in $n(n+1)$, quest'ultima potrà suggerirglielo immediatamente. ", così pure la proprietà che il prodotto di tre numeri consecutivi non nulli è uguale al cubo del numero centrale meno questo stesso, si legge facilmente se si sceglie di rappresentare i numeri come $n-1$, n, $n+1$ (infatti $(n-1)n(n+1)=(n^2-1)n=n^3-n$) mentre non è altrettanto immediata, anche se ovviamente deducibile con adeguati passaggi, se si indicano i numeri con n, $n+1$, $n+2$.
Questi esempi ed altri analoghi, oltre ad avviare all'uso corretto delle variabili, educano a distinguere fra senso e denotazione di un'espressione intendendo, come è noto, per denotazione quello cui l'espressione si riferisce e per senso il modo con cui l'oggetto è dato (Arzarello et alii 1994). Gli alunni comprendono cioè che una pluralità di espressioni con senso algebrico differente possono denotare lo stesso oggetto e fornirci peraltro la possibilità di interpretazioni diverse. Così $4x+2$ e $2(2x+1)$ hanno diverso senso ma uguale denotazione, come pure due diverse equazioni che hanno le stesse soluzioni (un caso che può essere interessante è costituito da due equazioni senza soluzioni in un insieme).

Gli esempi visti consentono anche di avviare il discorso sulla funzione di generalizzazione propria del linguaggio algebrico, che può essere osservata anche in numerose altre attività di soluzione di problemi, in cui, a partire dalla soluzione del caso particolare, è possibile portare i ragazzi, attraverso la "messa in espressione" a congetture o osservazioni sulle possibilità di soluzione indipendente dai dati.

L'algebra come linguaggio

Fin qui si sono esposte questioni che riguardano le funzione di rappresentazione, di trasformazione e di generalizzazione del linguaggio algebrico.

Proprio per poter usare correttamente e con sicurezza l'algebra in situazioni problematiche è ineludibile la precondizione di una adeguata conoscenza del linguaggio algebrico anche sul piano sintattico: da questo punto di vista l'insegnamento-apprendimento dell'algebra è oggetto di numerosi studi.

L'impatto iniziale con le regole formali dell'algebra si ha quando si cominciano a considerare successioni di operazioni, ad esempio la sequenza di operazioni necessarie per risolvere un problema: nel momento in cui gli alunni passano dall'espressione verbale all'espressione scritta, constatano la necessità di opportune regole. Le prime fra queste sono la convenzionale precedenza fra operazioni e il conseguente uso di parentesi: in genere gli studenti accettano abbastanza facilmente queste convenzioni e le seguono con una certa facilità quando si tratta di eseguire calcoli già scritti. Diversa è la situazione in cui si tratta di tradurre un testo in espressione o comunque di inserire parentesi. Spesso si osserva che le parentesi esistono nella mente dell'alunno, che esegue i calcoli come se queste ci fossero, ma non compaiono sulla carta. Come è noto per ovviare a questo problema possono essere utili esercizi di lettura incrociata (decodifica di scritture elaborate da altri) o esercizi di calcolo in cui si mettano a confronto espressioni uguali ma con diversa distribuzione delle parentesi.

Un altro punto importante per far acquisire la padronanza del linguaggio algebrico fin dall'inizio della scuola media è quello di far tradurre da un codice all'altro la stessa espressione.

Una prima traduzione, come si è già detto, e la più importante, è quella dal linguaggio verbale a quello algebrico e viceversa. Questa interviene nella soluzione dei problemi, nella costruzione di semplici dimostrazioni di proprietà aritmetiche, nell'interpretazione di formule.

Può essere utile proporre anche il passaggio dal codice algebrico ad altri codici.

E' importante, ad esempio, saper tradurre dal "linguaggio delle frecce", spesso usato per la codifica delle operazioni e che risulta particolarmente efficace ad esempio quando si tratta di invertire un procedimento, al linguaggio algebrico. E' facile costruire esempi in cui la codifica in linguaggio algebrico di una espressione scritta nel "linguaggio delle frecce" richiede l'inserimento di opportune parentesi e può presentare qualche difficoltà.

Un'altra occasione perché gli alunni si rendano conto della necessità e della relatività al tempo stesso delle convenzioni di scrittura è l'uso di un linguaggio di programmazione dove si incontrano, in generale convenzioni parzialmente diverse e a volte più rigide di quelle usualmente adottate in algebra: ad esempio l'impossibilità di omettere il segno di moltiplicazione, la scrittura della potenza nella forma a^b, l'uso di una funzione al posto del segno di radice, la necessità di una maggiore attenzione nell'uso delle parentesi nella scrittura di espressioni frazionarie,...
Analogamente è interessante e, qualche volta può essere utile, scrivere un'espressione su una calcolatrice tascabile che non abbia parentesi e non rispetti la gerarchia delle operazioni

Quando si propongono attività che mettono l'accento sulle convenzioni di scrittura dell'algebra, strettamente legate al codice usato, bisogna fare attenzione ad alcuni fraintendimenti.
Infatti le convenzioni in tutta la matematica e nel linguaggio algebrico in particolare sono per noi così usuali che spesso non poniamo la necessaria attenzione alle difficoltà che queste possono costituire per un alunno.
E' forse necessario chiarire, con linguaggio accessibile, che in una visione convenzionalistica della matematica tutta la sua costruzione è basata su "regole del gioco" che possono essere stabilite in modo sostanzialmente "libero", purché il sistema che ne risulta rispetti alcune condizioni più generali (ad esempio sia non contraddittorio).
Tuttavia fra le regole del gioco ve ne sono alcune da cui dipende la particolare teoria e che, se modificate, portano alla costruzione di un'altra teoria, altre che sono spesso soltanto regole di scrittura o modi di operare che devono essere conosciute e accettate per "usare la stessa lingua" ma la cui modifica non altera la teoria nel suo complesso.
Uno studio da noi condotto su alunni di terza media ci ha convinto che il problema didattico centrale è proprio quello di portare gli alunni a distinguere fra diversi livelli di "regole del gioco": parlando di ambito aritmetico-algebrico, fra proprietà delle operazioni e regole di scrittura delle stesse. Questa distinzione fra livelli diversi di convenzionalità non è agevole per gli alunni che tendono a mettere tutte le regole sullo stesso piano non essendo in grado di associare alle trasformazioni l'adeguato "senso algebrico".
Il nostro studio sul livello di conoscenza delle convenzioni del linguaggio algebrico in terza media ha suggerito di effettuare discussioni in classe, con le quali si è cercato di aiutare i ragazzi a stabilire una gerarchia fra le convenzioni e a capire meglio alcune proprietà.
Mi sembra interessante citare l'affermazione di un alunno:
"Non ho incontrato convenzioni che non sia riuscito a capire, anche se le ho capite con difficoltà infine le ho capite.". Questa frase che nell'intenzione dell'alunno significava "ho faticato ad orientarmi fra le 'regole' e le convenzioni ma ci sono riuscito", fa trasparire il fatto meno positivo che l'alunno in questione vede come convenzionale tutto quello a cui non riesce a dare un significato.

Uno dei momenti in cui la distinzione fra convenzioni di scrittura, definizioni, proprietà, regole operative risulta particolarmente delicata è l'introduzione dei numeri relativi e delle operazioni su di essi. Senza entrare in dettagli, per i quali rimandiamo ad esempio a Reggiani 1994b e 1995, osserviamo che abitualmente si fanno accettare dagli alunni, in un tempo abbastanza breve, diverse convenzioni, in particolare:

* la notazione usuale in base alla quale i numeri positivi si indicano con il segno + , i numeri negativi con il segno -,
* l'utilizzo delle notazioni + e - anche per le operazioni di addizione e sottrazione,
* la possibilità di omettere il segno + che indica il numero positivo,
* la possibilità di omettere anche il segno + che individua l'operazione di addizione quando precede un numero negativo.

Tra queste convenzioni la prima in genere è già nota e non pone problemi. I problemi insorgono con le operazioni. Infatti i simboli + e - sono ovviamente già noti agli alunni anche come segni di operazione (anche se con significato parzialmente diverso) e la novità consiste nell'usare lo stesso simbolo con due significati algebrici diversi. Tuttavia in genere in una prima fase segno del numero e segno di operazione rimangono due oggetti ben distinti, tanto che a volte si usano anche simboli diversi per indicarli.

Le difficoltà si determinano quando, con le due ultime convenzioni, segno del numero e segno di operazione non risultano più oggetti distinti e si ha 5-(+3)=5-3, ma anche 5+(-3)=5-3.

Sul piano teorico il problema si può risolvere ad esempio definendo soltanto le operazioni di somma e di opposto e non, come spesso accade nella prassi didattica e come si è detto sopra, anche una operazione di sottrazione (in questo modo la scrittura 5-3 non ha significato se non come forma convenzionalmente abbreviata di 5+(-3) e dunque non è ambigua). Rimane comunque difficoltoso per l'alunno muoversi in un ambiente in cui lo stesso segno ha convenzionalmente due significati diversi, a volte indistinguibili, non ben padroneggiati.

Problemi di convenzioni e di attribuzione di significati investono, come è noto, anche l'ambito dell'introduzione del prodotto e della conseguente regola dei segni.

La giustificazione tramite la proprietà distributiva è molto formale per la fascia d'età in cui abitualmente il prodotto fra relativi viene presentato (13-14 anni), ma risulta a nostro parere meno problematica delle convenzioni inizialmente adottate per definire la cosiddetta "somma algebrica".

Le difficoltà incontrate dagli alunni nel fare proprie le convenzioni di scrittura dei numeri relativi sono state evidenziate da insegnanti del nostro gruppo di ricerca tramite l'osservazione in classe.

In particolare si è notato che i ragazzi, eseguendo semplici calcoli algebrici, anche quando svolgono correttamente i conti operano a volte secondo una sintassi inutilmente pesante e continuano a trascrivere termini del tipo +(-6) o +(-3)x o ancora +(-3)·(-x), mentre eseguono altri passaggi.

Si tratta di espressioni differenti sia sul piano concettuale che sintattico, ci sembra tuttavia che il comportamento degli alunni nel trattarle sia riconducibile a una resistenza ad accettare le usuali

convenzioni, che può essere spiegata come incertezza e motivata dalla necessità di vedere il numero con il suo segno prima di operare su di esso.
Questo fatto, riscontrato in alunni "bravi" di diverse classi, si perde quando l'operatività tende a diventare di tipo meccanico, e il desiderio di capire, di padroneggiare simboli e significati viene sostituito dall'acquisizione delle cosiddette "regole".
Si pone dunque ancora una volta per l'insegnante il problema della ricerca di un equilibrio fra "meccanismi" e significati, di favorire cioè la necessaria acquisizione di alcuni automatismi, mantenendo viva al tempo stesso la riflessione su quanto si sta facendo.

Ambienti diversi per l'approccio all'algebra
Abbiamo visto che il primo approccio all'algebra è quello di un ampliamento dell'ambiente dell'aritmetica e di una riflessione sulle sue proprietà.
Tuttavia uno dei possibili modi per condurre gli alunni a un corretto uso dell'algebra è quello di proporre l'uso di simboli e la manipolazione su di essi in contesti diversi.
Si è già osservato come l'uso di un linguaggio di programmazione imponga l'apprendimento di regole che spesso, almeno quando il linguaggio viene utilizzato per risolvere problemi di tipo aritmetico-algebrico, sono analoghe a quelle dell'algebra ma non necessariamente identiche. Il contesto informatico è motivante per la presa di coscienza delle convenzioni, in quanto i ragazzi si trovano costretti a fornire al computer messaggi codificati in base alle regole del gioco e trovano i loro errori segnalati e penalizzati dal non corretto funzionamento del programma.

Il collegamento algebra-geometria è presente già nella scuola media attraverso l'introduzione del 'metodo delle coordinate' : proprio con lo studio più ampio e approfondito della geometria analitica, la geometria diventerà per gli alunni nelle scuole superiori un terreno privilegiato di applicazione dell'algebra.
Anche da sola la geometria può costituire un interessante terreno di avvio al pensiero algebrico quando ad esempio si lavora sul calcolo di aree e perimetri, in quanto mette a contatto con l'elaborazione di formule: inoltre essa può fornire un supporto concreto che aiuti la visualizzazione delle proprietà formali.
Attività legate alla geometria sono usuali in terza media quando si riflette sulle proprietà delle operazioni e quando si introduce il calcolo letterale; la nostra ricerca si è posta invece il problema di esplorare la capacità di manipolazione algebrica "spontanea" in problemi geometrici prima di tale momento, a fine seconda media. Con il termine "spontaneo" si fa qui riferimento al fatto che gli alunni, quando si propongono loro i problemi che di seguito diremo, non sono ancora scolarizzati rispetto all'algebra, anche se nella maggior parte dei casi hanno già svolto attività di generalizzazione e di utilizzo di simboli e di formule in contesti diversi.

Sono stati proposti ad alunni di seconda media, che avevano lavorato su perimetri e aree di figure poligonali apprendendo le consuete formule, problemi in cui si richiedeva il calcolo di aree e

perimetri di figure in cui le misure dei lati erano fornite in forma letterale. Le informazioni a volte erano date verbalmente, altre volte dovevano essere dedotte dalla figura.
L'obiettivo era quello di vedere se gli alunni, abituati all'uso delle formule per il calcolo di aree e perimetri sanno utilizzare una lettera come dato di un problema e inserirla correttamente nelle formule note o utilizzarla direttamente per eseguire i calcoli.
In subordine si voleva vedere se gli alunni, qualora scrivano formule che potrebbero essere semplificate attraverso gli abituali passaggi algebrici, lo fanno guidati dal contesto o no. La stessa esigenza di trasformazione potrebbe venire dal confronto di formule diverse ottenute a partire da differenti modi di vedere la figura. Tali trasformazioni non sono richieste e non ci si aspetta che l'alunno di seconda le sappia eseguire, tuttavia può essere interessante osservare se spontaneamente vengono effettuate, soprattutto per poterle utilizzare facendole emergere nella discussione in classe.
Lo studio effettuato su 150 alunni ci ha portato ad evidenziare fra questi, in base alle soluzioni, alcuni gruppi: una prima categoria è costituita da quegli alunni che trasformano il problema assegnato in uno con dati numerici e risolvono il "loro problema". Un secondo gruppo è formato da quei ragazzi che risolvono il problema utilizzando lettere ma inserendone anche altre oltre quelle assegnate. Per questi alunni se b è la base, l'altezza deve essere indicata in modo diverso, frequentemente con *h*, e nel trapezio le basi spesso vengono indicate con b_1 e b_2, mentre in genere per l'altezza viene accettato il valore dato . Questo dipende forse anche dai dati dei problemi assegnati in cui ad esempio una base del trapezio era $3a$. I ragazzi hanno difficoltà ad assegnare questo valore ad una base in quanto il valore assegnato viene spesso inteso come "nome".
La maggior parte degli alunni comunque rispetta la consegna e scrive le formule richieste utilizzando le lettere assegnate, tuttavia le formule prodotte presentano moltissimi errori: è chiaro che tali errori devono essere certamente attribuiti alla difficoltà dell'uso delle lettere in quanto gli stessi problemi, assegnati con dati numerici nelle stesse classi e nello stesso periodo, vengono risolti correttamente dalla quasi totalità degli alunni.
Pochissimi sono invece i ragazzi che elaborano spontaneamente le formule.
E' evidente che sarà compito dell'insegnante favorire il confronto fra i diversi metodi di soluzione e far spiegare come mai le diverse espressioni, ottenute con procedimenti geometricamente diversi possono essere uguagliate, avviando così gli alunni al calcolo letterale.
L'esame degli elaborati ha consentito anche di focalizzare ad esempio la difficoltà di molti alunni ad esprimere il fatto che un lato è il triplo dell'altro quando uno è indicato con una lettera. Si è osservato che gli alunni hanno incontrato minori difficoltà in quelle classi in cui nel primo anno si era insistito con attività di generalizzazione e uso di simboli in contesto aritmetico.
Si è notato però che, nonostante le difficoltà , il contesto geometrico è comunque favorevole per l'approccio all'algebra .
Infatti nelle stesse classi sono stati proposti, poco tempo dopo, problemi che portano esattamente alle stesse formule risolutive dei precedenti, tuttavia con un contesto di tipo aritmetico: questi sono risultati estremamente più difficili per la maggior parte degli alunni, probabilmente per la difficoltà di costruire un appoggio visivo alla decodifica del testo.

Le equazioni

La nascita dell'algebra è, anche storicamente, legata allo studio delle equazioni e alla loro soluzione. Dal punto di vista didattico le equazioni rappresentano un momento importante in quanto costituiscono un valido strumento di soluzione di problemi, offrono la possibilità di far capire l'importanza della funzione di trasformazione dell'algebra e di far riflettere sulle proprietà delle operazioni e sull'uso delle variabili.

Limitiamo qui la nostra attenzione alle equazioni di primo grado: la loro collocazione nel normale curriculum degli alunni è sia nella scuola media che nel biennio. Esse dunque rappresentano un'ottima occasione di raccordo fra i due livelli scolari.

I risultati dei test d'ingresso alla scuola superiore mettono in rilievo la difficoltà da parte degli alunni nella risoluzione di semplici equazioni e nell'inversione di formule, soprattutto per il prevalere degli aspetti di esecuzione meccanica in base a regole imparate a memoria.

Abitualmente nella scuola media inferiore le equazioni vengono dapprima affrontate con strumenti risolutivi grafici o verbali e solo verso la fine della terza si propone una sistematizzazione che spesso diventa stabilire "regole" per la risoluzione. Alla scuola media superiore si svolge in genere una trattazione sistematica, collocata solitamente alla fine del primo anno, anche se in molte scuole il saper risolvere equazioni è subito necessario per le applicazioni ad altre discipline.

Frequentemente i due modi di affrontare lo stesso tema rimangono completamente scollegati al punto che gli alunni non riconoscono nei problemi che risolvono con equazioni quegli stessi problemi che, negli anni precedenti, riuscivano a risolvere, sebbene a volte con qualche difficoltà, con metodi intuitivi elementari. Inoltre, mentre i metodi intuitivi sono in genere applicati in modo legato ai significati, la risoluzione delle equazioni diventa spesso semplice meccanismo del tutto scollegato rispetto al significato delle operazioni che si compiono.

E' dunque utile che l'insegnante di scuola superiore presenti le equazioni come uno strumento efficace, ma non unico, per risolvere problemi, valorizzi i metodi elementari di risoluzione, stabilendo un collegamento con gli strumenti risolutivi utilizzati alle medie (uso di frecce, tabelle, diagrammi di flusso e altre rappresentazioni opportune per favorire la padronanza dei significati) e trovi gli esempi adeguati a "mettere in crisi" questi metodi quando non sono "comodi". Nella soluzione di un problema tramite un'equazione il linguaggio algebrico deve essere visto con una doppia valenza: come traduzione stenografica di una strategia risolutiva e come espressione sintetica su cui operare per trarne informazioni.

Naturalmente è essenziale portare avanti anche alcuni punti fondamentali sul piano teorico quali il significato del termine uguaglianza, le ipotesi nelle quali è possibile operare trasformazioni su una uguaglianza, le questioni relative ad esistenza e unicità della soluzione, il significato di termini quali identità ed equazione indeterminata, ...

In particolare è importante condurre i ragazzi a sapere risolvere un'equazione applicando *consapevolmente* i "principi di equivalenza".

Questa consapevolezza è a nostro parere l'obiettivo centrale di un possibile itinerario didattico sulle equazioni.
Devono risultare chiari agli alunni il significato dei principi di equivalenza, il loro ambito di applicazione, e la distinzione fra equazioni equivalenti e equazioni ottenute una dall'altra applicando i principi di equivalenza.
E’ l’occasione per cercare di portare alla luce i problemi legati al già citato binomio senso-denotazione e al concetto di uguaglianza.
Un altro punto centrale nello studio delle equazioni è il riconoscimento consapevole dei casi in cui la soluzione non esiste, o non appartiene all'insieme considerato, oppure ogni elemento dell'insieme è soluzione dell'equazione, che dunque, se questo è infinito, può avere infinite soluzioni.
Si tratta cioè di dare significato ai termini equazione impossibile, identità, equazione indeterminata.
Le equazioni letterali, attraverso la necessaria "discussione sui coefficienti" possono infine offrire lo spunto per sintetizzare tutto il lavoro svolto (cfr. Bovio et alii, 95)

La prima superiore: il momento della riflessione e della sistematizzazione

Con lo studio delle equazioni di primo grado siamo arrivati "con continuità" a parlare di scuola superiore. Come indicato dalle proposte di programmi, ormai seguite in molte sedi in forma sperimentale (abbiamo citato all'inizio i programmi proposti dalla commissione Brocca, ma del tutto analoghi sono quelli del Piano Nazionale per l'Informatica), nella scuola superiore gli insiemi numerici, le operazioni in essi e le relative proprietà sono ripresi in forma più sistematica. Inoltre "....il docente deve programmare lo sviluppo da dare al calcolo letterale per abituare lo studente alla corretta manipolazione di formule, sempre sostenuta dalla comprensione delle procedure da eseguire..."
La prima superiore può essere dunque il momento in cui l’alunno, riflettendo con una diversa maturità su ‘cose già fatte’ le comprende meglio, le generalizza, le unifica, impara a chiamarle con linguaggio più appropriato. L’uso di variabili e la loro manipolazione diventano allora uno strumento indispensabile, che si apprende ad utilizzare in modo più consapevole acquisendo nel contempo nuovi procedimenti e imparando a manipolare nuovi oggetti matematici.
Fra gli argomenti che nel biennio di scuola superiore possono contribuire all'acquisizione di una buona padronanza del calcolo formale e al tempo stesso presentano la possibilità di mettere in rilievo aspetti teorici interessanti accenniamo ad esempio alla scomposizione di polinomi in fattori, eventualmente irriducibili.
Si tratta di un argomento che tradizionalmente viene svolto in tutte le scuole e viene spesso considerato ‘difficile’. Infatti, come è noto, non esiste per la fattorizzazione un algoritmo così generale e immediato come per lo sviluppo, anzi l'insegnante deve mettere in evidenza con opportuni esempi il carattere eccezionale della fattorizzabilità almeno per i polinomi in più variabili (Prodi-Villani 1982). Ciò premesso, il tema può essere trattato a vari livelli di approfondimento ed in genere in effetti viene ripreso in diversi momenti. Il livello minimo è il 'raccoglimento a fattor comune', legato alla comprensione della proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. Il

cosiddetto raccoglimento 'parziale' presenta maggiori difficoltà non sul piano teorico ma su quello operativo in quanto richiede di 'guardare' l'espressione che si ha di fronte prima di operare o tentare trasformazioni che, pur corrette, possono non portare allo scopo che ci si propone.

Si tratta di una occasione didatticamente importante, in quanto l'esercizio algebrico anche se di tipo puramente sintattico richiede la scelta di un procedimento risolutivo anziché l'applicazione di una regola. Accanto ai raccoglimenti è utile promuovere il riconoscimento dei 'prodotti notevoli'.

Più avanti, quando si tratta il problema della divisibilità fra polinomi, è importante affrontare il tema della riducibilità di un polinomio in Q[x] o in R[x] e accennare all'esistenza di 'criteri di irriducibilità'.

E' essenziale che i ragazzi non vedano questo capitolo, che può essere ricco di spunti per dare all'algebra una dimensione più ampia di quella di serie di tecniche di calcolo, come insieme di esercizi inutilmente complessi o, al contrario, banalmente ripetitivi, ma lo affrontino osservandone le analogie con procedimenti appresi nell'ambito dei numeri interi, ne riconoscano l'utilità anche all'interno del calcolo algebrico (ad esempio per semplificare espressioni razionali fratte) e lo colleghino alla risoluzione di semplici problemi o alla dimostrazione di proprietà aritmetiche.

.

Riferimenti bibliografici

ARZARELLO F., BAZZINI L., CHIAPPINI G.P., 1994: *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche,* Progetto Strategico del CNR Tecnologie e Innovazioni Didattiche. Quad.6

BARTOLINI BUSSI M.G., BONI M., 1995: Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol.18A n.3, pagg.221-256

BAZZINI L., GALLO E., LEMUT E., 1996: Studies on Teaching and Learning Algebra, *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*, Malara, Menghini, Reggiani eds, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Consiglio Nazionale delle Ricerche, pagg. 40-55

BERTOLINI C., MAGGI M., PESCI A., TREVISANI M., 1993: Un test esplorativo sul segno di uguaglianza in terza elementare, *Atti Matematica e Difficoltà n.3*, Pitagora ed., pagg73-79

BOERO P., 1992: Sulla specificità delle ricerche in Didattica della Matematica: il caso del formalismo algebrico, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 15, pagg. 963-986

BOVIO M., REGGIANI M., VERCESI N., 1995: Problemi didattici relativi alle equazioni di primo grado nel biennio delle superiori. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol.18b, n.1, pagg. 8-32

CROSIA L., GRIGNANI T., MAGENES M.R., PESCI A., 1996: La divisione tra polinomi: una proposta didattica per la scuola media superiore. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 19b, n.1, pagg. 11-28

CAVALLARI A., DE ANGELIS A., PESCI A., TOMA D., 1994 Il segno di uguaglianza in ambito aritmetico - algebrico. attività per esplorare stereotipie e fraintendimenti, *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo*, Parma, pagg. 43-48

CHIAPPINI G., LEMUT E., 1991: Construction and interpretation of algebraic models, *Proc. PME XV* Assisi, vol.I, pagg.199-206

GALLO E, BATTÙ M., CURLETTI P., LONGO M.L., SAVARINO L., SAVIO T., TESTA C, 1995*:* La manipolazione algebrica: aspetti concettuali e procedurali, *Atti V Internuclei Scuola Superiore*, Pavia, in stampa

GALLO E., 1994 Algebraic manipulation as problem solving, *First Italian Spanish Research Symposium in Mathematics Education,* Malara, Rico eds. , Modena, pagg. 131-138

GHERPELLI L., MALARA N.A.1996: Argomentazione e dimostrazione in aritmetica nel triennio di scuola media, *XV Internuclei Scuola Media* , Grugnetti, Iaderosa, Reggiani eds.pagg.32-43

MALARA N. A., 1994: Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà? *L'apprendimento della Matematica dalla ricerca teorica alla pratica didattica,* D'Amore ed., Pitagora, Bologna, pagg. 67-78

PRODI G., 1975: *Matematica come scoperta,* vol.I (e Guida per insegnante), D'Anna, Firenze

PRODI G., 1977: *Matematica come scoperta,* vol.II (e Guida per insegnante), D'Anna, Firenze

PRODI G., VILLANI V., 1982: Anche il calcolo letterale può essere intelligente, *Archimede*, pagg. 163-173

REGGIANI M., 1994a: Generalization as a basis for algebraic thinking. Observations with 11 -12 year old pupils *Proceedings PME XVIII,* vol.IV , pagg. 97-104

REGGIANI M., 1996: Avvio all'algebra fra scuola media inferiore e biennio, *Rendiconti Seminari Associazione Subalpina Mathesis*, Torino,(in stampa)

REGGIANI M.,1994b:Analisi di difficoltà legate all'uso di convenzioni nel linguaggio aritmetico-algebrico *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo* , pagg.61-66

REGGIANI M.,1995: Linguaggio algebrico e convenzioni: un'analisi del punto di vista degli alunni. *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre, Documents des Séminaires SFIDA 1 à SFIDA 4 1993 - 1995,* Drouhard, Maurel eds., IUFM Nice, pagg. IV 7- IV 14

SFARD A., 1991: On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* vol.22, pagg. 1-36

SIBILLA A., 1994: Approccio alla costruzione degli enunciati, alle dimostrazioni e al formalismo algebrico attraverso lo studio di alcune proprietà nell'insieme dei numeri naturali, *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo* , pagg.49-54