L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate
vol.18B -1 – 1995

PROBLEMI DIDATTICI RELATIVI ALLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO NEL BIENNIO DELLE SUPERIORI

Summary

The article is the result of the work of some of the members of the Didactic Research Group of Pavia. Working on difficulties Upper Secondary School students meet in solving equations, they sketch a didactic outline to follow, connecting it to the work usually done in Junior Secondary School. They focus on nodal points which are not always clear in textbooks and which teachers not always make so clear as they should. The topics relevant to equations which are dealt with, are the traditional ones, but the purpose is to make them become basic points in a didactic planning and not only instruments as they are usually considered.

Mauro Bovio*, Maria Reggiani**, Nicoletta Vercesi*
**Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Pavia*
***Dipartimento di Matematica Università di Pavia*

PROBLEMI DIDATTICI RELATIVI ALLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO NEL BIENNIO DELLE SUPERIORI

Mauro Bovio*, Maria Reggiani**, Nicoletta Vercesi*
**Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Pavia*
***Dipartimento di Matematica Università di Pavia*

INTRODUZIONE

Questo articolo si propone di presentare il risultato dello studio, delle riflessioni, delle osservazioni in classe e delle esperienze didattiche, condotte per quasi tre anni da alcuni insegnanti del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica per la Scuola Secondaria Superiore di Pavia.
Alla elaborazione di quanto vi è proposto hanno partecipato, lavorando con gli autori, anche se in forma e misura differenti gli insegnanti: *Simona Bologna, Giuseppina Dell'Aquila, Emiliana Mazzilli, Angelo Molina, Luisa Nascimbene, Raffaella Pani, Elvira Peviani, Clara Rossi, Paola Zanibelli.*
Il nostro gruppo si è proposto già da alcuni anni come tema di ricerca l'insegnamento dell'algebra nel biennio della scuola secondaria superiore esaminando anche gli aspetti legati al problema del raccordo con la scuola media inferiore.
I collegamenti con la scuola Media Inferiore sono stati realizzati prevalentemente attraverso scambi di materiale con il Gruppo di Ricerca Didattica di Pavia per la Scuola Media, che ha affrontato, negli ultimi anni, lo studio dei problemi didattici relativi al passaggio aritmetica - algebra (cfr. Cavallari et alii 1994, Reggiani 1994).
Inoltre una insegnante del gruppo lavora in una scuola media inferiore.

La scelta del tema è stata suggerita dalla constatazione delle difficoltà che gli alunni spesso incontrano nel biennio della scuola superiore nell'affrontare lo studio dell'algebra ripetendo alcuni ben noti errori che, come confermato da numerose ricerche, hanno la loro origine in fraintendimenti e fratture fra operatività e significati che si determinano già nei livelli scolari precedenti, cioè in fase prealgebrica.

Il lavoro cui qui si fa riferimento ha tratto spunto dai risultati di una prova d'ingresso esclusivamente su argomenti di algebra (cfr. Reggiani 1993), elaborata dal gruppo e proposta ad inizio scuola superiore in dieci prime classi di scuole di differenti indirizzi (professionale, tecnico commerciale e industriale, psicopedagogico, scientifico).
Tale prova si proponeva di verificare la padronanza delle operazioni nell'insieme dei numeri razionali relativi, attraverso esercizi limitati all'esecuzione di calcoli semplici ma tali da testare la conoscenza dell'uso delle parentesi, delle "regole dei segni", delle operazioni con le frazioni, delle proprietà delle potenze,etc..In questo test erano state proposte anche alcune semplici equazioni, un problema sulla percentuale, traducibile in equazione e un'inversione di formula (equazione letterale). Si trattava in ogni caso di equazioni molto semplici che potevano essere risolte con metodi intuitivi, ricorrendo al significato delle operazioni in gioco e alle relative operazioni inverse.
L'esito di questa parte del test anche relativamente agli esempi più semplici è risultato in generale negativo, molto inferiore a quello degli altri settori dello stesso test. L'incidenza di errori che denotavano il tentativo di operare in modo meccanico, ricordando a memoria regole e trascurando completamente il significato delle scritture proposte, ci ha indotto ad approfondire il tema dal punto di vista didattico.

Al fine di una corretta traduzione didattica, pur limitandosi ad equazioni di primo grado in una incognita o a queste riconducibili, è necessario avere presenti dal punto di vista teorico alcuni punti nodali fra i quali ci sembrano rilevanti: il significato del termine uguaglianza (cfr. Dedò 1973, Kieran 1981, Bernardi 1987), la reversibilità delle trasformazioni operabili su di essa, le questioni relative ad esistenza e unicità della soluzione nelle diverse strutture algebriche, il significato di termini quali identità ed equazione indeterminata.

E' noto che il tema "equazioni" è stato studiato da numerosi autori dal punto di vista dei processi d'apprendimento coinvolti nell'uso di equazioni per tradurre un problema e nella loro risoluzione, sia come tema specifico che nell'ambito di più ampi studi sul pensiero algebrico e sulla sua modellizzazione (cfr. ad es. Arzarello, Bazzini, Chiappini 1994, Boero 1992, Filloy e Rojano 1989, Sfard 1992).

La parte del nostro lavoro presentata in questo articolo, pur non prescindendo dalle ricerche teoriche sul pensiero algebrico, ma anzi partendo dai loro risultati, si pone su un piano strettamente didattico metodologico proponendo una traccia per l'insegnante che mette in risalto problemi teorici, obiettivi, strategie didattiche, possibili approfondimenti, collegamenti con le conoscenze già possedute dagli alunni, momenti di verifica.

Abbiamo utilizzato come punto di partenza per il nostro lavoro i libri di testo in uso nelle classi degli insegnanti del gruppo (l'elenco è in bibliografia): non ci proponiamo qui in alcun modo di farne un'analisi critica e ci limitiamo dunque a riportare eventuali spunti che ci sono parsi utili o loro rielaborazioni. Abbiamo inoltre spesso fatto riferimento al testo "Matematica come Scoperta " di G.Prodi ed a materiale didattico ad uso interno del Nucleo di Ricerca Didattica di Genova per la Scuola Media Inferiore.

Notiamo che in questa traccia didattica l'equazione è vista essenzialmente come "oggetto matematico", solo inizialmente presentata come strumento di risoluzione di problemi. Infatti la sua risoluzione e le questioni ad essa connesse sono studiate da un punto di vista teorico, senza alcuna interpretazione nei contesti applicativi. Ciò rientra nella tradizione didattica dell'insegnamento al biennio della scuola secondaria superiore, in cui gli ambiti applicativi spesso non sono gestiti in modo coordinato con l'insegnamento della matematica. Tuttavia questa strategia ci pare opportuna in quanto consente di far apprezzare l'esistenza di diversi livelli semantici nelle trasformazioni algebriche.

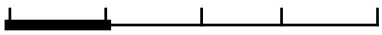
APPROCCIO ALLE EQUAZIONI

Si ritiene, come si è detto, che nell'affrontare lo studio delle equazioni il primo obiettivo che ci si deve porre sia quello di condurre i ragazzi a scoprire la potenza dell'equazione come strumento di risoluzione di problemi attraverso un itinerario guidato. Ritenendo poco motivante un'introduzione aprioristica dell'argomento, si è stabilito di proporre agli

studenti alcuni problemi da risolvere individualmente in classe, applicando le tecniche apprese alla scuola media, con la richiesta di fornire esplicitamente una spiegazione dettagliata del metodo di soluzione. Questa è la strategia adottata anche da altre proposte didattiche quali, ad esempio, quella del Nucleo di Ricerca Didattica di Genova.
In questa prima fase è opportuno presentare problemi in cui non sia indispensabile impostare un'equazione. Si è infatti potuto osservare che i ragazzi tendono a ricorrere a risoluzioni di altro tipo (grafici,disegni, frecce) e solo in piccola percentuale a far uso delle equazioni che pure tutti hanno imparato a risolvere. Esercizi risolvibili con metodi grafici o intuitivi consentono di richiamare eventualmente queste tecniche.

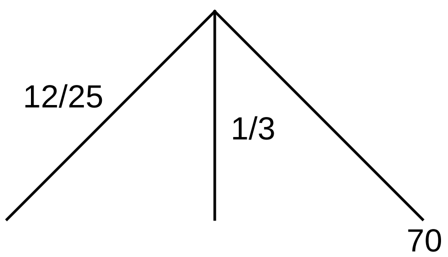
A titolo di esempio, si riportano alcuni problemi con spunti per possibili risoluzioni.

1) Trova un numero che aggiunto al suo triplo dà 76.



76:4=19

2) In una scuola media i $12/25$ dei ragazzi frequentano le prime classi, $1/3$ le seconde e 70 ragazzi le terze. Quanti frequentano le prime e quanti le
seconde?



Trovo la frazione complementare

$1-\left(\frac{12}{25}+\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{75}$, che corrisponde a 70 ragazzi.

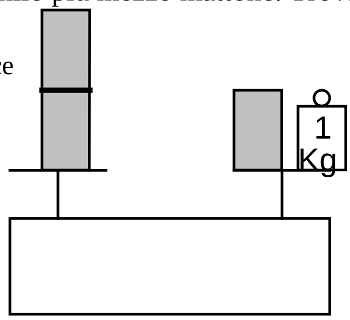
$70\cdot\frac{75}{14}=375$ che è il numero totale dei ragazzi

$375 \cdot \frac{1}{3} = 125$ che è il numero dei ragazzi che frequentano la seconda

....

3) Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Trova il suo peso.

L'immagine suggerisce
in modo spontaneo
la soluzione



4) Penso un numero, ad esso sommo 5, moltiplico il risultato ottenuto per 2, tolgo 8 e ottengo 10. Quale numero ho pensato?

$$\square \underset{\xleftarrow{-5}}{\xrightarrow{+5}} \underset{\xleftarrow{:2}}{\xrightarrow{\cdot 2}} \underset{\xleftarrow{+8}}{\xrightarrow{-8}} 10$$

A questo elenco si può aggiungere qualche semplice problema di geometria piana in cui siano assegnate opportune relazioni fra gli elementi di triangoli o quadrilateri particolari, in quanto in essi il supporto grafico si presta anche a soluzioni alternative.

Riteniamo utile confrontare in un momento di discussione in classe le diverse strategie risolutive. Questa può diventare un' importante occasione per raccordarsi, come si è detto, al programma scolastico svolto nelle medie inferiori e per favorire la costruzione di una visione unitaria delle conoscenze matematiche. Diverse esperienze hanno evidenziato che alcuni ragazzi ritengono che le equazioni si collochino in un ambito disgiunto da quello delle risoluzioni con metodi elementari precedentemente appresi, e che, comunque, una volta trattate le equazioni, esse divengono l'unico modo per risolvere i problemi. E' nostro obiettivo evitare tale scissione.

Successivamente le strategie risolutive, per così dire, "intuitive" vengono messe in crisi con problemi in cui vi è l'esigenza di impostare un'equazione, perchè risulta lo strumento più vantaggioso o addirittura indispensabile.
Eccone un esempio, solo apparentemente analogo al precedente n°4:
Penso ad un numero, ad esso sommo 5, moltiplico il risultato ottenuto per 3, tolgo il doppio del numero che ho pensato ed ottengo 20. A quale numero ho pensato?
Anche in problemi simili sono possibili soluzioni di tipo grafico che risultano, però, meno immediate. Si consiglia, in ogni caso, dopo aver promosso alcuni tentativi da parte dei ragazzi, di rimandare la discussione completa di problemi di questo secondo tipo, a un momento successivo, quando saranno almeno in parte raggiunti gli obiettivi seguenti: acquisire la definizione di equazione, il concetto di equazioni equivalenti, i metodi di risoluzione, la consapevolezza di ogni "passaggio".

ALCUNE DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Riteniamo che la scelta di fornire ai ragazzi le definizioni formali relative all'argomento, e di pretenderne la conoscenza teorica, sia da fare, a discrezione dell'insegnante, in relazione al livello della singola classe e del tipo di scuola. Nella nostra elaborazione abbiamo preferito alcune definizioni rispetto ad altre, nella grande varietà di quelle fornite dai vari libri consultati, e le proponiamo qui in modo che l'insegnante abbia un preciso quadro teorico cui fare riferimento, indipendentemente dal fatto che si intenda proporle o no ai ragazzi.
Osserviamo che è importante far chiarezza su definizioni e terminologia in quanto spesso abbiamo osservato nei testi e nella pratica didattica alcune ambiguità e incoerenze che possono causare fraintendimenti negli alunni.

La prima definizione è, come ovvio, quella di "equazione". Ne riportiamo di seguito tre diverse che comprendono le tipologie più comuni trovate nei testi presi in esame. Esse fanno riferimento a prerequisiti differenti e portano a differenti sviluppi.

Potrebbero essere introdotte gradualmente, in momenti successivi.

Definizione di equazione

1) Si dice equazione un'uguaglianza tra due espressioni algebriche.

Questa definizione non è precisa dal punto di vista formale ("espressione" è un termine ambiguo; rimangono inoltre escluse le equazioni. trascendenti) ma è comprensibile. Sui libri di testo sono frequenti definizioni analoghe a questa, a volte con maggiori specificazioni (si veda ad esempio Dodero N. , Baroncini P. ,Trezzi D.)

Si suggerisce di usarla come prima tappa di un processo che evolve verso gradi di rigore sempre maggiori.

2) Si dice equazione una relazione di uguaglianza "aperta", cioè contenente una lettera che rappresenta un elemento variabile in un certo insieme (cfr. Prodi G.)

3) Date due funzioni definite sullo stesso insieme y=f(x) e y=g(x), si dice equazione l'uguaglianza f(x)=g(x).

La modifica necessaria per il caso in cui le due funzioni abbiano domini diversi è immediata: se il dominio della funzione f(x) è l'insieme A e il dominio della funzione g(x) è B, l'equazione è posta in $A \cap B$, che si dice dominio dell'equazione.

Risoluzione di un'equazione (in un insieme)

Risolvere un'equazione rispetto a una variabile <u>in un dato insieme A</u> significa determinare tutti gli elementi appartenenti all'insieme A che sostituiti alla variabile rendono l'uguaglianza vera.

Tali elementi si dicono **soluzioni** dell'equazione in A. L'insieme delle soluzioni sarà indicato con S_A. Si può stabilire di indicare semplicemente con S l'insieme $S_{\mathbf{R}}$ (oppure $S_{\mathbf{C}}$), cioè di sottointendere che in mancanza di ulteriori precisazioni si risolve nel campo reale **R** o nel campo complesso **C.**

Ci sembra opportuno che in classe venga posto l'accento sul concetto di risoluzione di un'equazione <u>in un insieme</u> che è propedeutico al concetto di equazioni equivalenti. Infatti, come è noto, esistono equazioni che sono equivalenti in un certo insieme, ma non lo sono in un altro.

E' interessante evidenziare, in un tentativo di chiarificazione evaso da pressochè tutti i testi consultati, l'esistenza di insiemi numerici connessi con un'equazione, con valenze profondamente diverse:

a) un insieme in cui ha senso scrivere l'equazione. In esso si scelgono i coefficienti e le operazioni che consentono di scrivere l'equazione. Deve possedere la relazione di uguaglianza.
b) l'insieme delle soluzioni**.**
c) un insieme in cui può essere richiesto di "risolvere l'equazione" intendendo con questa espressione confrontare con esso l'insieme delle soluzioni.
d) un insieme in cui si costruisce un algoritmo che consenta di scrivere la forma generale della soluzione. Questo è,in generale, almeno un gruppo.
E' necessario che l'insegnante abbia ben presente questa distinzione per evitare fraintendimenti sul piano didattico, anche in relazione al fatto che il linguaggio adottato dai libri di testo , come si è detto, non è univoco e talvolta contraddittorio o ambiguo.
A chiarimento di questa affermazione si riportano alcuni esempi:
L'equazione $x + {}^{1}/_{2} = {}^{3}/_{2}$ *è scritta in* ***Q****. Essa però può essere risolta in* ***N****, nel senso del punto* ***c)****.*
E' sensato dare l'equazione. $x^2-2=0$ *in* ***Q****, anche se le soluzioni non appartengono a* ***Q****.*
In alcuni testi "risolvi l'equazione in Z_6*" significa "trova le soluzioni dell'equazione e stabilisci se esse appartengono a* $\mathbf{Z_6}$*" (cfr.****c)****), in altri casi significa "trova le soluzioni svolgendo le operazioni necessarie in* $\mathbf{Z_6}$*" (cfr.****d)****). Allora "risolvi l'equazione* $2*x = 0$ *in* $\mathbf{Z_6}$*" con la prima interpretazione ha come risposta che* $x=0$ *e* $x=3$ *sono soluzioni dell'equazione assegnata, che, come è noto, non può essere risolta in* $\mathbf{Z_6}$ *in base alla seconda interpretazione, perchè 2, divisore dello 0, non ha inverso.*

Definizione di equazione impossibile
Un'equazione si dice impossibile in un insieme A se nessun elemento di A è soluzione dell'equazione stessa.

Definizione di equazione indeterminata.
Un'equazione si dice indeterminata in un insieme A se ha infinite soluzioni in A.

Definizione di identità
Anche per il termine "identità" riportiamo alcune possibili definizioni.

1) Un'equazione. si dice <u>identità in un insieme A</u> se è verificata per qualsiasi elemento di A sostituito alle variabili, esclusi, al più, quegli elementi che fanno perdere di significato all'identità data.
Questa definizione comprende così anche le cosidette "identità condizionate".
Esempio: $(1/_x + 1)(1/_x - 1) = 1/_{x^2} - 1$ *è un'identità per ogni valore attribuito alla x diverso da 0, valore che fa perdere di significato alle espressioni scritte nei due membri.*
2)Un'identità è una tautologia.
3)L'uguaglianza $f(x)=g(x)$ è un'identità in un insieme A se è verificata per ogni x di A.

E' interessante osservare che esistono equazioni che sono identità in un certo insieme ma non lo sono in un altro: $x^2 + 1 = (x + 1)^2$ è un'identità in $\mathbf{Z_2}$, non lo è in **Z**.
Se l'identità ha infinite soluzioni è una **equazione indeterminata**.
I termini equazione indeterminata e identità non devono essere confusi: infatti identità ha il significato sopra riportato, mentre il termine equazione indeterminata fa riferimento all'esistenza di infinite soluzioni.
Pertanto in un insieme finito non esistono equazioni indeterminate: es. $2x+x=3x$ in $\mathbf{Z_5}$ è un'identità, ma non un'equazione indeterminata; mentre ad esempio in **N** è un'identità e un'equazione indeterminata.
In un insieme infinito tutte le identità sono equazioni indeterminate; inoltre esistono equazioni indeterminate che non sono identità: ad esempio, riferendosi a equazioni in due incognite, $x+y=5$ in **Z** , verificata per infinite coppie di valori, ma non per tutte.

Alcune osservazioni didattiche sulle equazioni impossibili e indeterminate verranno riportate in un paragrafo successivo.

Definizione di equazioni equivalenti
Due equazioni si dicono equivalenti in un insieme A se i due insiemi di soluzioni $\mathbf{S'_A}$ e $\mathbf{S''_A}$ coincidono.
Esempio: $2x + 3 = 0$ e $2x + 5 = 0$ sono equivalenti in **N**, non lo sono in **R**.

METODI DI RISOLUZIONE

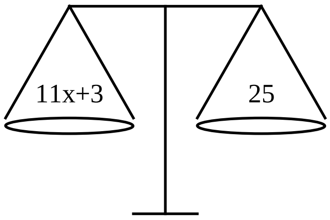
Per quanto riguarda il procedimento risolutivo delle equazioni, si consiglia di sottolinearne sempre il significato: qualunque equazione ridotta nella forma del tipo $ax=b$ può essere interpretata come una domanda "qual è quel numero che moltiplicato per *a* dà *b*?"
La seguente attività può essere strutturata in modo interattivo, per esempio come schede da completare, e corredata da esercizi analoghi di rinforzo. E' molto importante in questa prima fase soffermarsi a lungo sui procedimenti, affinchè i ragazzi acquistino consapevolezza delle operazioni che svolgono. Diverse esperienze hanno mostrato che i ragazzi tendono a meccanizzare i procedimenti, perdendone di vista il significato, ed incorrono in banali errori, a qualunque livello scolastico, nella risoluzione, per esempio, di semplici equazioni del tipo $3x=0$.

1) **Metodo degli operatori inversi.**
Si consideri, a titolo di esempio, l'equazione $11x + 3 = 25$. Le operazioni svolte al primo membro possono essere schematizzate con l'uso di frecce, che consentono di individuare agevolmente il "percorso inverso", non appena a ciascun operatore si sostituisca quello inverso (+k/-k , ·k/:k). Applicando tali operatori al secondo membro si giunge alla soluzione:

$$x \xrightarrow{\cdot 11} 11x \xrightarrow{+3} 11x + 3$$

$$2 \xleftarrow{:11} 22 \xleftarrow{-3} \quad 25$$

2) **Metodo "algebrico"**
E' abbastanza usuale, nell'iconografia tradizionale, porre l'analogia tra l'equazione, come uguaglianza tra due quantità, e una bilancia a due piatti in equilibrio.
L'equilibrio si mantiene se:
- si aggiunge la stessa quantità su ogni piatto, si toglie la stessa quantità da ogni piatto (1° principio di equivalenza);
- si raddoppia, si triplica, si dimezza, ... la quantità che è su ciascun piatto (2° principio di equivalenza).



Applicando questi due principi all'equazione

$$11x + 3 = 25$$

si trova il valore di x per via algebrica

$$11x + 3 - 3 = 25 - 3$$
$$11x = 22$$
$$11x / 11 = 22 / 11$$
$$x = 2$$

3) **Metodo grafico**

Questo metodo, che potrebbe essere proposto in una fase successiva, mette in collegamento le equazioni con il capitolo "funzioni", dato come prerequisito.

Data l'equazione $2x + 3 = 17$, si considera la funzione $x \rightarrow y = 2x + 3$ di cui si costruisce la tabella per alcuni valori di x (p.es. con i numeri interi da 0 a 5) e il grafico. La soluzione graficamente è trovata come controimmagine di 17 o come intersezione delle rette $y=2x+3$ e $y=17$.

Questo tipo di approccio presenta alcune difficoltà, e quindi richiede maggiori cautele se lo si utilizza per l'effettiva determinazione della soluzione, ma risulta particolarmente efficace per la "visualizzazione" e approssimazione della stessa.

E' importante che gli esercizi proposti durante lo svolgimento dell'itinerario didattico siano non ripetitivi, evitino il più possibile calcoli complicati e siano studiati in modo da far riflettere i ragazzi sul significato dei vari concetti, applicando i procedimenti con consapevolezza, comprendendo la doppia valenza del linguaggio algebrico come traduzione stenografica di una strategia risolutiva e come espressione sintetica su cui operare per trarre informazioni.

I PRINCIPI DI EQUIVALENZA.

Fra i diversi metodi risolutivi, poniamo in particolare l'accento sui "principi di equivalenza", poiché permettono di cercare la soluzione di una qualsiasi equazione di primo grado, ricavandone altre ad essa equivalenti, fino a trovare un'equazione la cui soluzione sia evidente. Il nostro primo obiettivo è appunto quello di far capire ai ragazzi che, se da un'equazione se ne ricava un'altra , tramite applicazione dei principi di equivalenza, allora ogni x che soddisfa la prima equazione soddisfa anche la seconda e viceversa, cioè l'insieme delle soluzioni rimane sempre lo stesso. Questo non è poi un fatto così banale, poiché esistono anche operazioni, come elevare al quadrato entrambi i membri, per cui questo processo di trasformazione non è "reversibile" : ad esempio $x=3$ non è equivalente a $x^2 = 9$, perché quest'ultima ha come soluzioni 3 e -3.
E' poi anche importante che lo studente si renda conto di come vengono applicati tali principi durante la risoluzione di un'equazione, evitando che egli "trasporti" a primo e a secondo membro senza conoscerne il motivo.
Si è perciò pensato di fare scoprire e quindi di fare enunciare i principi di equivalenza dai ragazzi, attraverso attività guidate. A questo scopo ci è sembrato utile lo strumento "tabella" usato anche , ad esempio, dal testo di E. Gallo. L'attività consiste nel considerare un'equazione, eseguire le operazioni indicate a primo e a secondo membro, e confrontare le soluzioni della nuova equazione , trovate per tentativi, con quelle dell'equazione di partenza. Presentiamo qui di seguito un esempio di scheda di lavoro, che può essere utilizzata nell'attività in classe.
Da qui in poi, salvo avviso contrario, supponiamo di operare in **R**.

*Completa la seguente tabella trovando le soluzioni in **R** delle equazioni date; trasformale eseguendo in entrambi i membri le operazioni indicate, come viene suggerito dall'esempio, e confronta le soluzioni delle nuove equazioni, con quelle dell'equazione di partenza.*

operazioni	**equazione**	**soluzioni**		**equazione**	**soluzioni**
	x-2=0	$\{2\}$		3x=1	....
aggiungi 2	*x-2+2=2; x=2*	$\{2\}$		......	....

moltiplica per 1/3	$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$	*{2}*		......	....
moltiplica per 0	....	....		....	....
eleva al quadrato	....	....		....	....
....	....	....		....	....

Si presenta poi una tabella analoga a questa, dove vengono fatte operazioni con espressioni contenenti l'incognita *x* (polinomi che si annullano per un certo valore di *x* o che non si annullano mai o frazioni algebriche) per indurre il ragazzo a enunciare i principi di equivalenza "per gradi" e a osservare che:

1) la quantità per cui si devono moltiplicare ambo i membri di un'equazione deve essere diversa da 0;

2) se questa quantità è un polinomio , non si devono "aggiungere soluzioni" , cioè il polinomio non si deve annullare in **R**. (es.: x=2 non è equivalente a $x(x-1)=2(x-1)$ ma è equivalente a $x(x^2+1)=2(x^2+1)$);

3) non bisogna aggiungere una quantità che perde di significato per qualche x (es.: x=0 non è equivalente a $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$).

Anche se è nostra opinione che l'insegnante debba essere disposto ad accettare qualsiasi formulazione dei principi di equivalenza, purché senza errori, proponiamo solamente a titolo di esempio di enunciati corretti, i seguenti:

1) *Se ai due membri di un'equazione f(x)=g(x) si aggiunge lo stesso numero reale o lo stesso polinomio h(x) o la stessa espressione fratta p(x)/q(x) che non perde di significato per qualche x, si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

2) *Se si moltiplicano o si dividono i due membri di un'equazione f(x)=g(x) per lo stesso numero diverso da 0, o per lo stesso polinomio h(x), che non si annulla mai , si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

Nell'enunciato del primo principio sarebbe sufficiente fare riferimento alla sola *espressione fratta p(x)/q(x),* che include polinomi e numeri reali, ma si è scelta una formulazione più dettagliata per maggiore chiarezza.

Nell'enunciare il secondo principio, invece della formulazione estesa *moltiplicando per una frazione algebrica che non si annulla e che non perde di significato...* , si è preferita la formulazione più "snella" *moltiplicando o dividendo per un polinomio che non si annulla..* , senza che si debba escludere l'altra.

Un altro strumento per illustrare e visualizzare i principi di equivalenza può essere l'uso delle frecce, qualora i ragazzi abbiano familiarità con tale strumento. Per risolvere un'equazione del tipo $ax+b=c$, si parte da x, si moltiplica per a, si aggiunge b e si ottiene un risultato c da cui, eseguendo le operazioni inverse, si risale a x come si vede nello schema seguente:

$$
\begin{array}{lccccc}
(1) & (ax)/a & \xleftarrow{:a} & a\cdot x+b-b & \xleftarrow{-b} & a\cdot x+b \\
 & || & & || & & || \\
 & x & \xrightarrow{\cdot a} & a\cdot x & \xrightarrow{+b} & a\cdot x+b \\
 & || & & || & & || \\
(2) & (c-b)/a & \xleftarrow{:a} & c-b & \xleftarrow{-b} & c
\end{array}
$$

Le (1) sono le operazioni che vengono fatte al primo membro dell'equazione, mentre le (2) vengono fatte al secondo membro. Quindi , osservando il diagramma, si passa a scrivere le equazioni equivalenti alla prima equazione

$$ax + b = c$$
$$ax + b - b = c - b$$
$$ax = c- b$$
$$\frac{ax}{a} = \frac{c-b}{a}$$

e vengono enunciati i due principi di equivalenza.

Quest'ultima attività non permette di arrivare a enunciati precisi dei principi di equivalenza, poiché l'uso delle frecce illustra solamente le prime parti degli enunciati (cioè quelle relative alle operazioni con costanti numeriche).
Non pensiamo però di introdurre in classe, specialmente in questa fase iniziale, dimostrazioni vere e proprie dei principi di equivalenza, perché in questo momento dell'itinerario didattico la nostra attenzione è rivolta verso altri obiettivi.

Proponiamo ugualmente qui di seguito un esempio di dimostrazione dei due principi di equivalenza.

Sia

(3) $\quad f(x)=g(x)$

un'equazione con a soluzione (unica)[1]. *Sia k(x) una espressione polinomiale o fratta che non perda di significato per qualche x. Sommando ad ambo i membri k(x) si ottiene*

(4) $\quad f(x)+k(x)=g(x)+k(x).$

Per verificare se a è soluzione, bisogna verificare che f(a)+k(a)=g(a)+k(a); ma questo è vero essendo per ipotesi f(a)=g(a). La (4) non ha altre soluzioni perché se b≠a fosse soluzione, essa sarebbe anche soluzione della (3) che può essere ottenuta dalla (4) aggiungendo ad ambo i membri -k(x).

Abbiamo così dimostrato il primo principio di equivalenza.

Per dimostrare il secondo,con riferimento all'enunciato nella formulazione estesa, sia q(x) una frazione algebrica che non si annulla e che non perde di significato nel dominio dell'equazione (3). Moltiplicando ambo i membri della (3) si ottiene:

(5) $\quad q(x)f(x)=q(x)g(x)$

da cui, applicando il primo principio di equivalenza e raccogliendo il fattore q(x), si ottiene q(x)(f(x)-g(x))=0. Siccome a è soluzione della (3), f(a)-g(a)=0 e dunque q(a)(f(a)-g(a))=0, perciò abbiamo dimostrato che a è anche soluzione della (5). La (5) non ha altre soluzioni, perché, se c ≠a fosse un'altra soluzione, allora q(c)(f(c)-g(c))=0 e siccome q(c)≠ 0 sarà f(c)-g(c)=0, per cui c è un'altra soluzione dell'equazione f(x)=g(x), che è assurdo.

E' bene fare anche notare, attraverso qualche esempio significativo, come, a volte, sia più conveniente risolvere un'equazione "a occhio", semplicemente sfruttando la definizione di soluzione o facendo considerazioni di altro tipo, invece di applicare i principi di equivalenza. In alcuni casi la sola verbalizzazione relativa all'uguaglianza, cioè la sua interpretazione, ne suggerisce la soluzione.

A tale scopo possono essere proposti esercizi del tipo:

---

[1] L'ipotesi di unicità non è essenziale: si può anche generalizzare dicendo "siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le soluzioni dell'equazione"

“ *Trova le soluzioni in **R** delle seguenti equazioni senza trasformarle in equazioni equivalenti:*

$x=x+1$; $3x=0$; $3x=2x$; $\frac{2x+1}{3x+4}=\frac{1}{4}$; $\frac{x+1}{x+5}=\frac{3}{7}$;

$(x+1)^2=1+2x+x^2$; $3x+1=3x+2$;”

EQUAZIONI IMPOSSIBILI E INDETERMINATE.

E' noto a tutti gli insegnanti che si riscontra nei ragazzi un certo disorientamento quando, a partire da un’equazione assegnata, si trova una relazione (vera o falsa) in cui non compare più la *x*. Nel caso di relazioni false, come ad esempio 4=7 ovvero 0=3, è importante che l’insegnante inviti lo studente a meditare sul perché l’equazione non ammette soluzione, evitando che egli scriva “impossibile” senza rendersi conto di nulla, magari neppure del significato del termine. Per esempio si può osservare che è stato fatto un ragionamento per assurdo: se esistesse un *x* per cui l’equazione di partenza è vera allora, dovrebbero essere vere per lo stesso *x* tutte le uguaglianze scritte applicando i principi di equivalenza in particolare anche l’ultima, che invece è una contraddizione (0=3). Ancora più semplice è invece ragionare sulla scrittura 0=3 guardandola come $0x=3$ e osservando che non esiste nessun numero che moltiplicato per 0 dia 3. Una considerazione analoga a quest’ ultima può ovviamente essere fatta sulla scrittura 3=3, ovvero 0=0 (riguardandola non come identità ma come equazione particolare $0x=0$), per concludere, osservando anche che tutte le equazioni scritte sono equivalenti, che una equazione è indeterminata. Riguardando invece 0=0 come identità, ci si può convincere che l’equazione di partenza è una identità (perciò vera per ogni *x*) facendo ripercorrere il cammino opposto a partire da 0=0, cioè risalendo da 0=0 a identità via via più “complicate” (come per esempio $2x-2x=3-3$) e da queste, grazie all’uso dei principi di equivalenza, all’equazione iniziale. Queste semplici osservazioni possono ridurre quei tipici errori che tutti noi conosciamo.
Tornando a quanto detto nei paragrafi precedenti a proposito della risolubilità in un insieme, si può parlare di equazioni impossibili in un certo insieme A. Abbiamo infatti visto esempi di equazioni impossibili in un certo insieme, ma risolubili in un altro insieme.

Gli esercizi che seguono, sono esempi di problemi che servono per far riflettere il ragazzo sull'importanza di risolvere un'equazione in un determinato insieme.
In alcuni casi essi danno luogo a equazioni impossibili in un insieme numerico particolare che non è necessariamente **R**.
ES.1) E' data la funzione da **N** in **N** definita da f(*x*)=2*x*+3. Trova, se esiste, la controimmagine di 4. Prova a risolvere l'esercizio in più modi (graficamente, con le funzioni inverse, ecc.). Formalizza il problema con un'equazione e risolvila.
ES.2) Risolvi il problema precedente con la funzione f definita da **Q** in **Q**.
ES.3) Trova due numeri dispari consecutivi che hanno somma 22.
ES.4) Trova due numeri pari consecutivi che hanno somma 24.
ES.5) Modifica i risultati delle somme degli esercizi 3) e 4) per rendere i problemi possibili e prova a generalizzare (quali numeri sono somma di due dispari/pari consecutivi?).
ES.6) Dire per quali valori di *a* le frazioni $\frac{a}{a+1}$ e $\frac{a+1}{a+2}$ sono equivalenti.
ES.7) Stabilisci per quale valore di *k* il polinomio $x^2+2kx+2k$ è divisibile per $x+1$.

Per quanto riguarda le equazioni indeterminate, abbiamo già fatto alcune osservazioni sul significato dei termini "indeterminata" e "identità". Abbiamo visto, in particolare, identità in insiemi finiti che hanno come soluzioni tutti gli *n* elementi dell'insieme, o equazioni in altri insiemi finiti (come in $\mathbf{Z_6}$) che non sono identità, ma che hanno più di una soluzione. E' possibile, allora, che di fronte a esempi di questo tipo, qualche ragazzo pensi erroneamente che anche in **R** possano esistere, escluse le identità, equazioni di primo grado con più di una soluzione. E' bene allora fare osservare che ogni equazione di primo grado che non sia un'identità, ha al più una sola soluzione in **R**. Questo fatto può anche essere dimostrato utilizzando la legge di annullamento del prodotto, e riteniamo che questa sia una dimostrazione algebrica che, preferibilmente al termine del percorso didattico e con qualche suggerimento dell'insegnante, possa essere proposta in classe.

*(**Dimostrazione.** Tutte le equazioni di primo grado possono essere scritte nella forma ax=b. Se a=0, siccome per ipotesi ax=b non è una identità, allora l'equazione non ha soluzione. Se a≠0, siano u e y due soluzioni ; allora au=b e ay=b; sottraendo membro a membro queste due relazioni e raccogliendo a si ottiene a(u-y)=0, vale a dire, per la legge di annullamento del prodotto (essendo a≠0), u-y=0, da cui u=y.*
*Si può a questo punto completare la dimostrazione facendo osservare ai ragazzi che dimostrare l'unicità di un oggetto non vuol dire provare che questo esiste; l'esistenza della soluzione in **R** (o in un campo), se a è non nullo, è però ovvia: basta scegliere x=b/a).*[2]

PARTICOLARI EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL PRIMO RICONDUCIBILI A EQUAZIONI LINEARI.

Riteniamo opportuno anticipare alla trattazione delle equazioni frazionarie, una lezione specifica sulle equazioni di grado superiore al primo e fattorizzabili, allo scopo di indurre i ragazzi a riflettere più approfonditamente su alcuni procedimenti risolutivi che, troppo spesso, tendono a diventare meccanici e "inconsapevoli", come ad esempio la "discussione del denominatore" nelle equazioni frazionarie. E' noto infatti che se un'equazione è riconducibile alla forma P(*x*)=0, con P(*x*) polinomio di grado n e fattorizzabile in fattori irriducibili in **R**, è possibile determinare le soluzioni dell'equazione mediante applicazione della legge di annullamento del prodotto.
Supponiamo che il polinomio P(*x*) sia scomponibile in n fattori in modo tale che $P(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot ...... \cdot p_n(x)$. Per la legge di annullamento del prodotto in **R**, un prodotto è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è uguale a zero. Quindi ponendo i $p_i(x) = 0$, si trovano tutte e sole le soluzioni di P(*x*)=0.
Ad esempio per risolvere l'equazione $x^2 - 4 = 0$, si fattorizza il polinomio e l'equazione diventa: $(x+2)(x-2) = 0$, quindi per la legge di annullamento, *x*+2=0 o *x*-2=0, da cui *x*=-2 o *x*=2. E' bene, in questa fase, scegliere esempi opportuni e non prematuri, specialmente se tra i

---

[2] Da notare che per dimostrare l'unicità della soluzione basterebbe l'ipotesi "dominio di integrità", mentre per provare l'esistenza è necessario che l'insieme numerico sia un *campo*.

fattori di P(x) compaiono polinomi irriducibili di grado superiore al primo: è infatti semplice osservare che non esistono soluzioni di equazioni del tipo $x^2 + k = 0$, con k>0, mentre è meno immediato trarre le stesse conclusioni per altri tipi di equazioni di secondo grado.

EQUAZIONI RAZIONALI FRATTE .

Dal confronto all'interno del gruppo è emerso che, sull'argomento "equazioni fratte", molti ragazzi trovano difficoltà nella "discussione" dei denominatori: alcune volte viene dimenticata, altre volte viene solamente impostata o svolta in modo errato. A ciò si aggiunge che non tutti coloro che riescono a portare a termine la discussione in modo corretto, si rendono conto di ciò che stanno facendo o del perché lo fanno. Abbiamo allora pensato di mettere in evidenza i punti salienti che l'insegnante dovrebbe sottolineare sull'argomento. Quello che diremo sarà anche un'occasione per esaminare l'applicazione di certe equivalenze logiche fra proposizioni, e quindi per vedere la logica come argomento trasversale e non a sé stante.
E' noto che ha senso cercare le soluzioni di un'equazione razionale fratta nel suo dominio, cioè nell'insieme di tutti i numeri reali che non annullano i denominatori dell'equazione fratta. Il primo problema è dunque quello della ricerca del dominio. Supponiamo di voler risolvere la seguente equazione:

$$\frac{x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{3x+2}{x^2-x} \tag{6}$$

Siccome il m.c.m. dei denominatori è $x(x-1)(x+1)$, posto questo diverso da 0 si ottiene $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$ e quindi le soluzioni della suddetta equazione vanno ricercate nel dominio **D** = **R**-{-1;0;1}. A tal proposito, se l'alunno decide di procedere in questo modo, è bene fare notare che la scelta di porre subito il m.c.m. diverso da 0, che evita inutili calcoli in più, è lecita poiché le frazioni algebriche che compongono la (6) hanno significato se e solo se i loro rispettivi denominatori $((x-1)(x+1)$, $x+1$, $x(x-1))$ sono non nulli e quindi se e solo se il prodotto $x(x-$

1)(x+1) è non nullo; [3] da questo poi si ricava che ogni singolo fattore deve essere diverso da 0, perciò $x\neq 0$, $x\neq 1$, $x\neq -1$. Queste semplici osservazioni si basano sull'applicazione della legge, che ci è piaciuto chiamare a scopo didattico, di *non* annullamento del prodotto: "Il prodotto di due numeri reali è non nullo se e solo se tutti i suoi fattori sono non nulli (a·b≠0 se e solo se a≠0 e b≠0)". E' compito dell'insegnante far notare che questa è una formulazione del tutto equivalente alla più familiare, anche per i ragazzi, legge di annullamento del prodotto in **R**: "Il prodotto di due numeri reali è nullo se e solo se almeno uno dei suoi fattori è nullo" (a·b=0 se e solo se a=0 o b=0).
Tale equivalenza può essere anche dimostrata dagli alunni attraverso, per esempio, l'esercizio seguente:
Esercizio. *E' data la proposizione " a·b=0 se e solo se a=0 o b=0"; scrivine una equivalente completando : "a·b≠0 se e solo se..".*
Questo esercizio può offrire lo spunto, come abbiamo anticipato, per ricollegarsi alla logica. Infatti, se con P indichiamo la proposizione "a·b=0", e con Q "a=0 o b=0", la legge di annullamento del prodotto è una proposizione del tipo *P se e solo se Q* , e l'equivalenza fra le due formulazioni è giustificata dal significato di doppia implicazione e dall'uso delle contronominali delle due implicazioni.
La proposizione "a=0 o b=0" viene negata utilizzando una delle leggi di De Morgan.

Un'altra questione abbastanza delicata (sempre nell'ambito della ricerca del dominio), che crea difficoltà soprattutto sul piano semantico, è la risoluzione delle disuguaglianze, come per esempio $2x-3\neq 0$. Si suggerisce, per le prime volte, di scrivere $2x-3\neq 0$ come non(2x-3 = 0), cioè non(2x=3), quindi non(x=3/2) e infine $x\neq 3/2$. Questo per mostrare che i passaggi fatti sono giustificati dall'uso dei principi di

[3] Onde evitare che semplificazioni avventate conducano ad accettare soluzioni che, in realtà, fanno perdere di significato all'equazione di partenza (come potrebbe succedere, ad esempio, per l'equazione $\frac{x^2-1}{x-1}=2$, che non ha soluzioni), si consiglia di fare il m.c.m e porre il denominatore diverso da zero prima di semplificare.

equivalenza; si pensa così di evitare che l'alunno porti a secondo membro senza conoscerne il motivo.

Un secondo punto importante è l'applicazione consapevole e corretta dei principi di equivalenza.
Per risolvere un'equazione razionale fratta, si possono moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza per il m.c.m.dei denominatori.
Va osservato che in questo modo si ottiene una equazione equivalente a quella assegnata nel suo dominio e non , ovviamente, in tutto **R.** Ad esempio l'equazione

(7) $$\frac{x-3}{x-1}=\frac{x+2}{x}$$

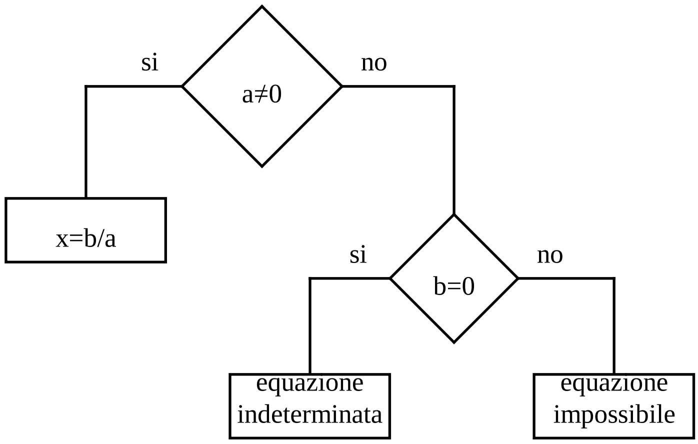
è definita in **D**=**R**-{0;1}; applicando i principi di equivalenza si ottiene l'equazione 2x-2=0, che è equivalente a (7) in **D**, ma non in **R**, dove ha soluzione x=1.
E' necessario allora precisare l'enunciato dei principi di equivalenza richiedendo che i polinomi q(x) e h(x) (mantenendo le notazioni già usate) non si annullino nel dominio. Le equazioni ottenute una dall'altra applicando i principi di equivalenza risultano così equivalenti (cioè con le stesse soluzioni) nel dominio o in un suo sottoinsieme.
Su questo punto, nella già ricordata varietà di enunciati e definizioni, non sempre abbiamo trovato la necessaria chiarezza nei libri di testo. Non riteniamo tuttavia opportuno dare subito un enunciato più completo dei principi di equivalenza.

Concludiamo il paragrafo, presentando due proposte di definizione di equazione fratta. Non intendiamo soffermarci in classe su questo punto, ritenendo le osservazioni sopra esposte di maggiore importanza; pensiamo invece che sia più produttivo far riflettere l'alunno, come abbiamo fatto, sulla definizione e sul significato di equazione.
*Def.1.*Un' equazione razionale si dice fratta se nel denominatore compare l'incognita ; altrimenti si dice intera.
*Def.2.*Date 2 funzioni razionali y=f(x) e y=g(x), di dominio rispettivamente A e B, di cui almeno una delle due non sia polinomiale, si dice equazione fratta, in $A\cap B$, l'uguaglianza f(x)=g(x).

EQUAZIONI LETTERALI.

L'ultimo punto che ci proponiamo di esaminare è quello delle equazioni a coefficienti letterali.
E' importante che la trattazione in classe delle equazioni letterali non si riduca all'applicazione di procedimenti meccanici, che rischiano di far perdere di vista il significato delle operazioni che si compiono; riteniamo invece che l'argomento possa offrire buoni spunti per sintetizzare tutto il lavoro svolto e riflettere su alcuni importanti concetti finora appresi dallo studente (campo di esistenza, equazioni impossibili e indeterminate). A tale scopo si consiglia una scelta oculata degli esercizi da proporre ai ragazzi, evitando quelli eccessivamente complicati per i calcoli o per il numero dei parametri.

Come traccia per la discussione di una generica equazione letterale di primo grado ridotta alla forma *ax=b*, riteniamo utile la schematizzazione in diagramma di flusso, presente in vari libri di testo



che ha, come possibile sviluppo, la traduzione in programma per risolvere un'equazione numerica di primo grado del tipo *ax=b*, collegandosi con le attività svolte nell'ora di laboratorio.La codifica di tale programma è facile da far scrivere ai ragazzi, se si sono affrontate le strutture fondamentali della programmazione, ad esempio inTurbo-Pascal o in Q-Basic.

Abbiamo pensato infine di raccogliere una serie di esempi significativi da proporre in classe, non per fare una classificazione, ma per smitizzare il problema della cosiddetta "discussione" che si può ridurre a una riflessione sul procedimento e sul risultato.
Negli esercizi che seguono, supponiamo che l'incognita sia sempre x; a questo proposito è utile invitare gli studenti a riflettere, formulando opportuni esempi (tratti anche da contesti diversi, come la fisica), sul fatto che, quando in un'equazione compaiono più lettere, è bene specificare quale fra esse rappresenta l'incognita; le altre vanno considerate come costanti numeriche.

Raccolta di esempi:

a) *Coefficiente dell'incognita numerico (nei due casi seguenti c'è soluzione qualunque sia k):*

es.1 $3x = 7k$

es.2 $x + k = 3$

b) *Coefficiente dell'incognita parametrico*

1) *Equazioni con un solo parametro:*

es.3 $5x - kx - 1 = 0$

es.4 $(k^2 + 1)x = 1$ *(si noti che anche in questo caso c'è soluzione qualunque sia k).*

es.5 $k^2x + 3kx - k = 0$

es.6 *(equazione contenente un parametro al denominatore: l'eventuale discussione deve tenere conto delle condizioni di esistenza del denominatore)*

$$x - \frac{x}{b+1} = -\frac{3b+1}{1-b^2} - \frac{x-b}{b+1}$$

(risolvendola si ottiene la soluzione $x = \dfrac{b+1}{b-1}$ *; non è qui necessario stabilire se per b=*± 1 *l'equazione è impossibile o indeterminata, perchè per le condizioni di esistenza, si ha* $b \neq \pm 1$).

es.7 $x(a-1)=\dfrac{2-a}{a(a-1)}+x$

2) *Equazioni con due parametri:*

es.8 $ax = 5 + b$ *(parametri indipendenti)*

es.9 $abx = a$

es.10 $(a^2-b^2)x=a-b$

c) *Equazioni frazionarie: la discussione richiede anche il confronto dei valori del parametro con il campo di esistenza dell'equazione:*

es.11 $\dfrac{x+2a}{x-3}=-1$

(la soluzione è $x=\dfrac{3-2a}{2}$ *, ricordando che x deve appartenere al dominio e quindi deve essere* $x\neq 3$*, si ottiene per a la condizione* $a\neq -3/2$*).*

es.12 $\dfrac{h}{x^2-1}-\dfrac{h-1}{x+1}=\dfrac{h+1}{x-1}$

es.13 $\dfrac{h}{x^2-h^2}-\dfrac{h-1}{x+h}=\dfrac{h+1}{x-h}$

Il lettore può facilmente comprendere i criteri che ci hanno orientato nella scelta degli esempi: si tratta di esercizi di difficoltà crescente, tuttavia non complicati da inutili calcoli e finalizzati a presentare situazioni diverse fra loro ma tutte riconducibili facilmente allo schema iniziale, con la necessaria attenzione alle condizioni eventualmente poste nello svolgimento dei passaggi algebrici.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.

Le riflessioni contenute in queste pagine hanno consentito agli insegnanti del nostro gruppo di svolgere il tema equazioni in modo più consapevole e approfondito, con una scelta più mirata di esempi ed esercizi non di routine.

Al termine dell'unità didattica è stata proposta agli alunni una prima prova di verifica, elaborata e valutata collettivamente dal gruppo.

I risultati di tale prova sono ora oggetto di studio all'interno del gruppo ed un ulteriore test è in preparazione. Gli esiti, sostanzialmente positivi, devono essere infatti esaminati più a fondo per trarre indicazioni significative sul processo di insegnamento - apprendimento.

Il lavoro è stato svolto nell'ambito del contratto C.N.R., Università di Pavia, n° 93.00530.CT01 dal titolo " Studio e sperimentazione di proposte didattiche innovative per la Scuola Secondaria".

BIBLIOGRAFIA

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G.P.,1994, *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche.* Progetto Strat. CNR, Tecnologie e Innovazioni didattiche. Quad.n. 6.

Bernardi C., 1987, La logica matematica metodo e contenuti, *Atti XI Convegno UMI-CIIM: Nuovi programmi: problemi di attuazione e formazione degli insegnanti,* Suppl. n.11, anno XIV, Notiziario UMI.

Boero P.., 1992, Sulla specificità delle ricerche in didattica della matematica. Il caso del formalismo algebrico,*L'Ins. della Matem. e delle Scienze Integrate,* vol.15, n.10

Boero P., 1992, About the role of algebraic language in Mathematics and related difficulties. *Proc. Workshop on Algebraic Learning,* Torino, in stampa

Cavallari A., De Angelis A., Pesci A., Toma D., 1994, Il segno di uguaglianza in ambito aritmetico algebrico: attività per esplorare stereotipie e fraintendimenti,*Atti del 1^ Internuclei Scuola dell'obbligo,*Salsomaggiore Terme (PR), 14-16/4/1994

Dedò M., 1973, Discorso sull'uguaglianza Parte I e II. *Periodico di matematiche,* gruppo IV, serie V, vol.49, n.3-4

Dodero N., Baroncini P. , Trezzi D., 1989, *Elementi di matematica 1-algebra geometria informatica per il biennio delle superiori*. Ghisetti e Corvi.

Filloy E., Rojano T.,1989, Solving equations, the transition from arithmetic to algebra, *For the Learning of Mathematics*, vol.9

Gallo E.(a cura di), 1990, *La Matematica attraverso attività, teoria, esercizi (per il biennio delle scuole superiori)* SEI, Torino

Kieran C., 1981, Concepts aassociated with the equality symbol, *Educational Studies in Mathemtics,* 12

Lombardo Radice L., Mancini Proia L., 1977, *Il Metodo Matematico, Corso di matematica per le Scuole medie superiori,*Principato, Milano

Maraschini W., Palma M., 1992, *Manumat 1*, Paravia

Morini E., 1993, Identità ed equazioni: una proposta didattica sperimentata per il biennio superiore. *Didattica delle Scienze* Aprile 1993.

Paola D.,Romeni C., 1992, *Algebra Geometria Informatica (per le Scuole Superiori).*Archimede

Pionetti G., Cantone A., Mari B.,1994, *Corso di Matematica*, Ghisetti e Corvi, Milano

Prodi G.,1975, *Matematica come scoperta, vol.I,* D'Anna, Firenze

Reggiani M.,1993, Construction and analysis of verification protocols as dignosis and recuperation tool *Proc. of the 45th CIEAEM Meeting,* L.Grugnetti ed. Cagliari, luglio 1993

Reggiani M., 1994, Analisi di difficoltà legate all'uso di convenzioni nel linguaggio aritmetico-algebrico, *Atti del 1^ Internuclei Scuola dell'Obbligo*, Salsomaggiore Terme (PR), 14-16/4/1994

Reggiani M., 1994, Generalization as a basis for algebraic thinking: observations with 11-12 year old pupils, *Proceedings of PME XVIII;* Lisbona,29 luglio - 3 agosto 1994 , vol. IV

Sfard A. 1992, Equations and inequalities: processes without objects? *Proc of Pme XVI*,New Hampshire, USA, vol.III