G.C. BAROZZI - Corso di ANALISI MATEMATICA
ZANICHELLI
BOLOGNA 1989

2.3 FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Nel paragrafo 1.6 abbiamo visto che le potenze a^n, con a reale diverso da zero e n naturale qualunque, possono essere definite in modo ricorsivo ponendo

$$a^0 := 1, \quad a^{n+1} := a \cdot a^n, \quad n \in N.$$

I numeri a^n costituiscono una *progressione geometrica* di primo elemento 1 e ragione a. Si verifica senza difficoltà che

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \text{per } ogni\ m, n \in N. \tag{1}$$

A parole:

> *Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.*

La dimostrazione della (1), fissato n, si può fare per induzione rispetto ad m. Per $m = 0$ la (1) è vera, essendo $a^0 = 1$ e $m + n = n$. Se la (1) sussiste per un assegnato m, il primo membro di (1), con $m + 1$ al posto di m, si scrive

$$a^{m+1} a^n = a\, a^m a^n = a\, a^{m+n},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva; d'altra parte l'ultimo prodotto scritto è, per definizione, $a^{(m+1)+n} = a^{m+1+n}$.

Dalla (1), per $m = n$, si deduce $a^m a^m = (a^m)^2 = a^{2m}$, e ragionando per induzione

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{2}$$

A parole:

> *La potenza di una potenza è una potenza avente per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.*

Vogliamo ora estendere la definizione di potenza in modo da includere esponenti interi negativi, esponenti che già abbiamo utilizzato, senza dare troppe spiegazioni, nel capitolo precedente. Tale estensione diventa, in un certo senso, automatica se si impone la condizione che la (1) debba valere non solo per esponenti naturali, ma per esponenti interi qualunque. Infatti, ponendo nella (1) $m := -n$, con $n > 0$, otteniamo formalmente l'uguaglianza $a^{-n} a^n = a^0 = 1$, e dunque siamo indotti a porre

$$a^{-n} := 1/a^n, \quad \text{per } ogni\ n > 0. \tag{3}$$

Questa è precisamente la convenzione che abbiamo adottato nel paragrafo 1.3 quando abbiamo scritto 10^{-n} al posto di $1/10^n$.

Nel seguito avremo necessità di considerare la funzione $k \to a^k$, $k \in \mathbf{Z}$, soltanto per $a > 0$. Se $a = 1$, la funzione stessa assume costantemente il valore 1; se $1 < a$, moltiplicando la disuguaglianza appena scritta membro a membro per il numero positivo a^k, si ottiene $a^k < a^{k+1}$, cioè la funzione in questione è crescente al crescere di k. Se poi $0 < a < 1$, si ha invece $a^{k+1} < a^k$, cioè la funzione che stiamo studiando è decrescente.

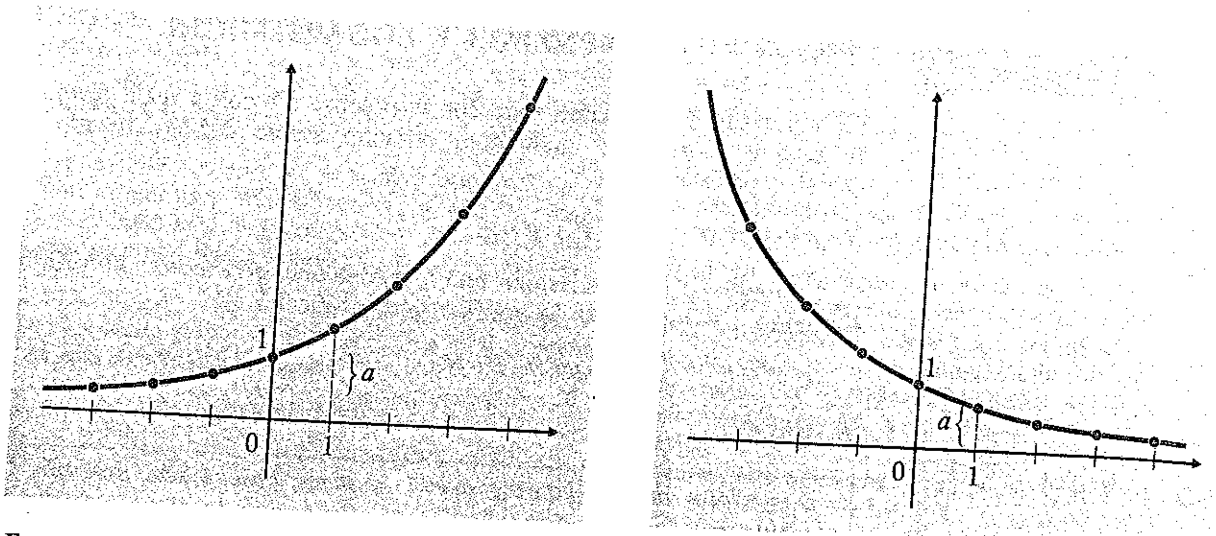


FIGURA 2.27
Grafico della funzione $k \to a^k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, per $a = 1{,}5$ (funzione crescente) e $a = 0{,}75$ (funzione decrescente).

Consideriamo, per fissare le idee, il caso $a > 1$; la (1), ora valida per esponenti in $\boldsymbol{Z}$, si può esprimere dicendo che la funzione $k \to a^k$ trasforma l'addizione tra esponenti nel prodotto tra potenze. Poiché $\boldsymbol{Z}$ è contenuto in $\boldsymbol{Q}$ e quest'ultimo è contenuto in $\boldsymbol{R}$, ci si può chiedere se è possibile ampliare l'insieme degli esponenti ammissibili fino a comprendere in esso tutti i numeri reali, e ciò in modo che resti valida la proprietà fondamentale espressa dalla *legge degli esponenti* (1), cioè in modo tale che si abbia

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \text{per ogni}\, x, y \in \boldsymbol{R}.$$

In sostanza si tratta di costruire una funzione $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, tale che

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x)f(y) = f(x+y), \quad \text{per } \textit{ogni coppia } x, y \in \boldsymbol{R}, && (4)\\ &f(k) = a^k, \quad \text{per } \textit{ogni } k \in \boldsymbol{Z}. && (5) \end{aligned}}$$

In realtà è sufficiente costruire una funzione che verifichi, oltre alla (4), la (5) soltanto per $k = 1$, vale a dire in luogo della (5), la

$$f(1) = a. \tag{5'}$$

Infatti, se valgono (4) e (5′), vale necessariamente la (5). Ponendo in (4) $x = y = 1$, e tenendo conto di (5′) si ottiene

$$f(1)f(1) = f(2), \quad \text{cioè}\, f(2) = [f(1)]^2 = a^2,$$

e, ragionando per induzione,

$$\underbrace{f(1)f(1)\ldots f(1)}_{n \text{ fattori}} = f(n), \quad \text{cioè}\, f(n) = [f(1)]^n = a^n.$$

Dunque la (5) è vera per esponenti interi positivi.
Ponendo poi nella (4) $x = 1$, $y = 0$, si ottiene $f(1)\,f(0) = f(1)$, da cui $f(0) = 1$, essendo $f(1) = a$. Ponendo infine $x = 1$, $y = -1$, si ottiene $f(1)\,f(-1) = f(0) = 1$, da cui $f(-1) = 1/f(1) = 1/a = a^{-1}$, da cui per induzione segue

$$f(-n) = a^{-n}, \quad \text{per } \textit{ogni } n \in \boldsymbol{N}.$$

Ci siamo dunque ridotti al problema di costruire una funzione che verifichi la (4) e la (5′). Cominciamo col costruire tale funzione in

corrispondenza di valori *razionali* del suo argomento, cioè definiamo le potenze di base a ed esponente razionale.
Se $r = n/m$ è un numero razionale, non è restrittivo, come già sappiamo dal capitolo precedente, supporre che sia $m > 0$. Se vogliamo che sussista la (4), poiché n si può scrivere come somma di m addendi uguali a n/m, dobbiamo imporre che sia

$$f(n) = f\underbrace{\left(\frac{n}{m} + \frac{n}{m} + \ldots + \frac{n}{m}\right)}_{m \text{ addendi}} = \underbrace{f\left(\frac{n}{m}\right) f\left(\frac{n}{m}\right) \ldots f\left(\frac{n}{m}\right)}_{m \text{ fattori}} = \left[f\left(\frac{n}{m}\right)\right]^m,$$

quindi $a^n = f(n) = f(n/m)^m$; non c'è dunque altra scelta che porre $f(n/m)$ uguale alla radice m-esima aritmetica di a (cfr. par. 1.6), vale a dire

$$a^{n/m} = f(n/m) := \sqrt[m]{a^n}. \tag{6}$$

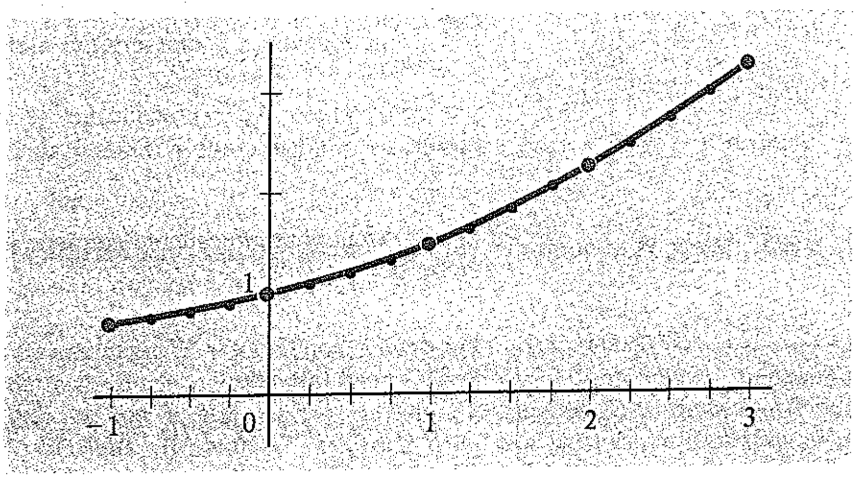


FIGURA 2.28
La definizione della potenza $a^{n/m}$, dove m è un intero fissato > 1, e n è un intero qualunque, è fatta in modo tale che, per ogni k intero, le $m + 1$ potenze $a^{r/m}$, dove r assume successivamente i valori km, $km + 1$, $km + 2$, ..., $km + m = (k + 1)m$, siano in progressione geometrica. Poiché

$$\frac{km}{m} = m, \quad \frac{(k+1)m}{m} = k+1$$

sono numeri interi, le potenze corrispondenti ai valori estremi di r sono già definite e valgono rispettivamente a^k e a^{k+1}. La ragione della progressione sopra considerata vale dunque necessariamente $\sqrt[n]{a}$. In figura: $m = 4$, $k = -1, 0, 1, 2$.

Non è difficile verificare che se il numero razionale r viene rappresentato mediante una diversa frazione, diciamo $r = n'/m'$, si ha

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m']{a^{n'}},$$

cioè $f(r)$ è ben definito, indipendentemente dalla frazione usata. L'uguaglianza appena scritta si verifica elevando i membri all'esponente mm', tenendo presente che $nm' = n'm$.
Alcuni esempi di potenze con esponente razionale:

$$2^{2/3} = \sqrt[3]{4}, \quad 3^{1/2} = \sqrt{3}, \quad 2^{-3/2} = \sqrt{2^{-3}} = \sqrt{1/8} = 1/\sqrt{8}.$$

Abbiamo così definito a^r, con $r \in \boldsymbol{Q}$; si osservi che a^r, essendo definito come una radice m-esima aritmetica, è un numero positivo: $a^r > 0$. Non è difficile riconoscere che la funzione $r \to a^r$ è crescente per $a > 1$. Siano infatti r_1 e r_2 due razionali con $r_1 < r_2$: è sempre possibile scrivere r_1 e r_2 sotto forma di frazioni aventi lo stesso denominatore $m > 0$, $r_1 = n_1/m$, $r_2 = n_2/m$. Allora $r_1 < r_2$ significa $n_1 < n_2$ e, per quanto dimostrato poco sopra, $a^{n_1} < a^{n_2}$. Poiché il confronto tra due numeri positivi equivale al confronto tra le rispettive potenze m-esime (cfr. esempio 1.6-2 e relative conseguenze), la stessa relazione sussiste anche per le radici m-esime dei due membri della disuguaglianza, cioè $a^{r_1} < a^{r_2}$, come si voleva dimostrare.

Sia ora x un numero non razionale, cioè appartenente a $\boldsymbol{R}$ ma non a $\boldsymbol{Q}$: $x \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}$. Per definire a^x utilizziamo il fatto che la funzione $r \to$

$\rightarrow a^r$, $r \in Q$, è crescente per $a > 1$. Se dunque r_1 e r_2 sono due qualsivogliano numeri razionali che approssimano x rispettivamente per difetto e per eccesso,

$$r_1 < x < r_2,$$

il numero a^x che noi vogliamo definire dev'essere compreso fra a^{r_1} e a^{r_2}.

Definiamo dunque i due insiemi di numeri reali

$$A := \{a^{r_1}; r_1 \in Q, r_1 < x\}, \qquad B := \{a^{r_2}; r_2 \in Q, r_2 > x\},$$

cioè a parole: in A poniamo tutte le potenze che si ottengono elevando la base a ad un esponente razionale minore di x, in B le potenze analoghe ottenute utilizzando esponenti razionali maggiori di x. È chiaro che A e B sono separati, cioè $a^{r_1} < a^{r_2}$ per ogni coppia di numeri razionali (r_1, r_2) con $r_1 < x < r_2$; si può dimostrare (v. esercizio 2.3-1) che essi sono anche contigui, vale a dire esiste un unico elemento di separazione tra di essi, cioè esiste un ben determinato numero y tale che risulti

$$a^{r_1} < y < a^{r_2}$$

per ogni coppia (r_1, r_2) verificante le condizioni precedenti. Porremo allora

$$a^x := y.$$

La discussione precedente contiene i punti essenziali della dimostrazione del seguente

Teorema 2.1. Per ogni a, con $0 < a \neq 1$, esiste una ed una sola funzione $f: R \rightarrow R_+^* =]0, +\infty[$ tale che

$$f(1) = a, \quad f(x+y) = f(x)f(y), \text{ per ogni } x, y \in R,$$

ed inoltre tale da risultare crescente se $a > 1$ (cioè $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$), decrescente in caso contrario. Tale funzione viene chiamata funzione esponenziale di base a, e viene indicata con il simbolo $x \rightarrow a^x$; essa è una biiezione di R su R_+^*.

L'ultima affermazione del teorema implica che f è iniettiva (il che è immediato, in quanto f è crescente oppure decrescente) e suriettiva; quest'ultimo fatto non è evidente: esso significa, in particolare, che l'estremo superiore del codominio della funzione f è $+\infty$, mentre l'estremo inferiore dello stesso insieme è 0 (si osservi che tale valore non è assunto dalla funzione, in quanto $a^x > 0$ per ogni x reale).

Le due circostanze appena citate sono facili da verificare. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $a > 1$; poniamo allora $a = 1 + d$, con $d > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli (cfr. esempio 1.6-3) si ha

$$a^n = (1+d)^n \geq 1 + nd \quad \text{per ogni } n \in N;$$

chiaramente la successione $n \rightarrow 1 + nd$ è illimitata superiormente, nel senso che, comunque si fissi un numero positivo, diciamo M, si avrà $1 + nd > M$ per tutti gli n "abbastanza grandi" (ed esattamente per tutti gli $n > (M-1)/d$). Lo stesso sarà allora vero per la successione $n \rightarrow a^n$, e dunque è dimostrato che il codominio della funzione $x \rightarrow a^x$ è privo di maggioranti. D'altra parte, se l'esponente x è negativo, diciamo $x = -n$ con n naturale, allora

$$a^x = a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

fissato ad arbitrio un numero positivo ε, se vogliamo che sia

$$a^x = \frac{1}{a^n} < \varepsilon$$

è sufficiente scegliere n abbastanza grande, in modo che si abbia $a^n > 1/\varepsilon$, e questo è possibile in virtù di quanto abbiamo appena dimostrato.

Più avanti (cfr. esempio 3.6-1) dimostreremo che la funzione esponenziale è continua (*grosso modo* ciò significa che il grafico di tale funzione può essere tracciato senza staccare dal foglio la punta dell'oggetto scrivente); dimostreremo anche che se una funzione continua ha come dominio un intervallo, il suo codominio è ancora un intervallo. In base a questi fatti è possibile concludere che l'immagine della funzione esponenziale è tutto l'intervallo $\boldsymbol{R}_+^* =]0, +\infty[$; infatti l'unico intervallo contenuto in $\boldsymbol{R}_+^*$ che abbia 0 come estremo inferiore e $+\infty$ come estremo superiore è l'intervallo stesso $\boldsymbol{R}_+^*$ (cfr. esempio 3.8-3).

Se dunque è vero che l'immagine della funzione esponenziale è tutto l'insieme dei numeri reali > 0, ne segue che *per ogni* $y > 0$ esiste un ben determinato x reale tale che

$$a^x = y.$$

Tale numero viene chiamato *logaritmo in base a* di y, e si scrive

$$\log_a y := x.$$

In altri termini, essendo $f : x \to a^x$ una biiezione di $\boldsymbol{R}$ su $\boldsymbol{R}_+^*$, esiste la funzione inversa

$$f^{-1} : \boldsymbol{R}_+^* \to \boldsymbol{R},$$

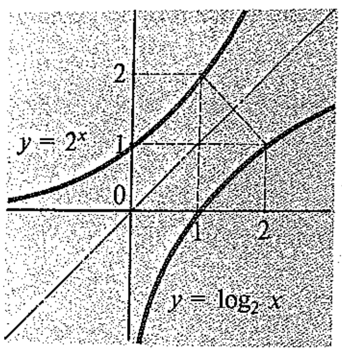


Figura 2.29
Grafici delle funzioni $x \to 2^x$, x reale, $x \to \log_2 x$, $x > 0$.

detta funzione *logaritmo in base a*. Se le variabili indipendenti vengono indicate con la lettera x per entrambe le funzioni (beninteso $x \in \boldsymbol{R}$ per la funzione esponenziale, mentre $x \in \boldsymbol{R}_+^*$ per la funzione logaritmica) si hanno i grafici in figura 2.29, simmetrici uno dell'altro rispetto alla retta di equazione $y = x$. Si osservi che la funzione $x \to \log_a x$ è crescente per $a > 1$, decrescente in caso contrario; in pratica si usano prevalentemente logaritmi in basi maggiori di 1.

Componendo la funzione esponenziale con la sua inversa, si ottiene, a seconda dell'ordine con cui le funzioni vengono composte, la funzione identità su $\boldsymbol{R}$ oppure la funzione identità su $\boldsymbol{R}_+^*$:

$$\log_a(a^x) = x \text{ per ogni } x \in \boldsymbol{R}, a \log_a x = x \text{ per ogni } x \in \boldsymbol{R}_+^*.$$ $a^{\log_a x} = x$

Si riveda in proposito quanto abbiamo detto nel paragrafo 2.1.

Alle proprietà (4) e (5′) corrispondono le proprietà

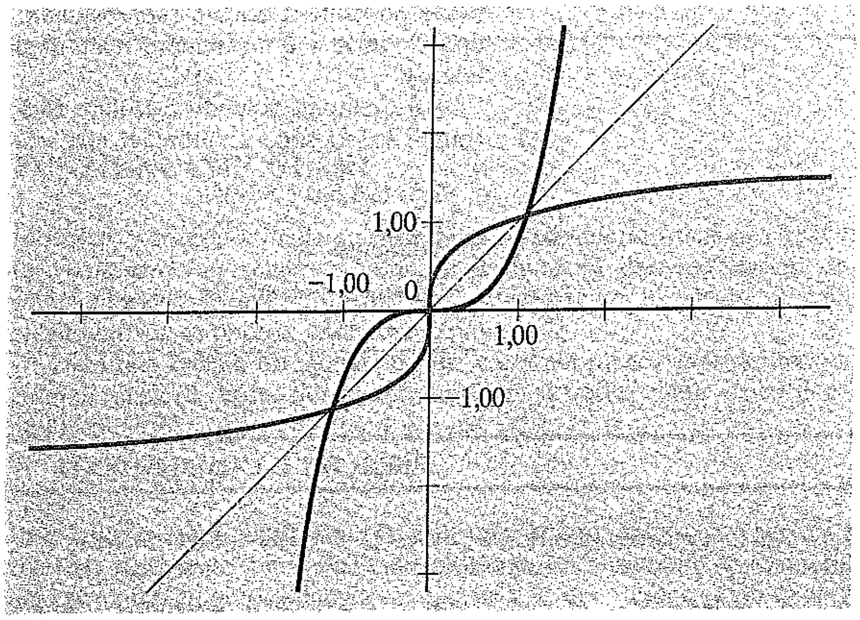
$$\log_a a = 1, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \text{per } \textit{ogni } x, y > 0, \tag{7}$$

da cui si possono dedurre tutte le restanti proprietà della funzione logaritmo.

Osserviamo che in questo paragrafo abbiamo introdotto la funzione logaritmo come inversa della funzione esponenziale, in accordo con lo sviluppo storico di tali funzioni. Ricordiamo che i logaritmi furono introdotti intorno alla fine del '500 dallo scozzese John Napier (latinizzato Nepero); l'opera di Napier, dal titolo *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, fu pubblicata nel 1614. La stessa parola "logaritmo" è un neologismo coniato da Nepero a partire da radici greche (*logos* e *arithmós*). Allo studio dei logaritmi diedero contributi notevoli anche l'inglese Henry Briggs (1561-1630) e lo svizzero Jobst Bürgi (1552-1632).

Alcuni Autori ampliano ulteriormente l'insieme di definizione del simbolo a^c, dando significato a scritture del tipo $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ecc. cioè $a^{1/n}$ con n dispari, anche per $a < 0$. Tale definizione parte dalla constatazione che la funzione $x \rightarrow x^n$, per n naturale dispari, è una biiezione strettamente crescente di $\boldsymbol{R}$ su se stesso, e dunque ammette una funzione inversa che gode della stessa proprietà.

FIGURA 2.39



Ad esempio, se conveniamo che $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ stia ad indicare l'inversa della funzione $x \rightarrow x^3$, allora siamo indotti a porre

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad \sqrt[3]{-27} = -3,$$

e così via, in quanto i numeri -2 e -3 sono le uniche soluzioni reali dell'equazione $x^3 = -8$ e rispettivamente $x^3 = -27$.

In generale, è dunque possibile definire $a^{1/n}$, con n naturale dispari, e a reale qualunque, come l'unica soluzione reale dell'equazione $x^n = a$, cioè come l'unico numero reale che elevato all'esponente n restituisce a.

La definizione precedente ha tuttavia un notevole inconveniente: se si calcola $(-8)^{1/3}$ si ottiene -2, ma se si calcola $(-8)^{2/6}$ si ottiene

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

In altri termini: abbiamo dato una definizione di potenza con esponente razionale che dipende dalla particolare frazione utilizzata per rappresentare l'esponente.

Per questa ragione è prudente limitare l'uso del simbolo a^c ai casi illustrati in figura 2.38.

ESEMPIO 2.3-5. Molti calcolatori tascabili dispongono di un tasto contrassegnato dal simbolo x^y che consente il calcolo di una potenza del tipo indicato, a patto che sia $x > 0$. Di fatto, poiché la funzione $x \rightarrow e^x$ e la funzione $x \rightarrow \ln x$ (logaritmo naturale) sono una l'inversa dell'altra, la potenza x^y viene calcolata internamente nella forma

$$x^y = e^{y \ln x}.$$

Le funzioni esponenziale e logaritmo naturale sono direttamente "implementate" all'interno del calcolatore (ciò significa, in realtà, che