

45. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ 46. $(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 4$

47. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

48. $x^2 - y^2 = -1$

49. $xy = -4$

50. $(x-1)(y+2) = 1$

51. Qual è l'effetto sul grafico di un'equazione in x e y di:

(a) sostituire x con $-x$?

(b) sostituire y con $-y$?

52. Qual è l'effetto sul grafico di un'equazione in x e y se si sostituiscono contemporaneamente x con $-x$ e y con $-y$?

53. Disegnare il grafico di $|x| + |y| = 1$.

P.4 Funzioni e loro grafici

L'area di un cerchio dipende dal suo raggio. La temperatura di ebollizione dell'acqua dipende dall'altitudine sul livello del mare. L'interesse pagato su un investimento di danaro dipende dall'estensione temporale dell'investimento.

Ogni volta che una grandezza dipende da un'altra grandezza si dice che la prima è una funzione della seconda. Ad esempio, l'area A di un cerchio dipende dal raggio r in base alla formula

$$A = \pi r^2,$$

per cui diciamo che l'area è una funzione del raggio. La formula è una *legge* che dice come calcolare un valore *unico* di output dell'area A per ogni possibile valore di input del raggio r .

L'insieme di tutti i possibili valori di input del raggio si chiama **dominio** della funzione. L'insieme di tutti i valori di output dell'area si chiama **immagine** della funzione. Poiché i cerchi non possono avere raggio o area negativi, il dominio e l'immagine della funzione che esprime l'area del cerchio sono entrambi l'intervallo $[0, \infty)$ consistente di tutti i valori reali non negativi.

Il dominio e l'immagine di una funzione matematica possono essere degli insiemi di oggetti qualsiasi: non è necessario che siano dei numeri. Tuttavia, in gran parte di questo libro i domini e le immagini delle funzioni che verranno considerate saranno insiemi di numeri reali.

Nel calcolo differenziale abbiamo spesso bisogno di riferirci a una funzione generica senza avere in mente una formula particolare. Per indicare che y è una funzione di x scriviamo

$$y = f(x),$$

che si legge "y uguale f di x." Con questa notazione, introdotta dal matematico del settecento Leonhard Euler (Eulero), la funzione è rappresentata dal simbolo f . Inoltre, x , detta **variabile indipendente**, rappresenta il valore di input nel dominio di f mentre y , la **variabile dipendente**, rappresenta il corrispondente valore di output $f(x)$ nell'immagine di f .

DEFINIZIONE 1

Una **funzione** f definita su un insieme D e con valori nell'insieme S è una legge che assegna un *unico* elemento $f(x)$ in S a ciascun elemento x di D .

In questa definizione $D = D_f$ (si legge " D di f ") è il dominio della funzione f . L'immagine R_f di f è il sottoinsieme di S che consiste di tutti i valori $f(x)$ della funzione. Si può pensare alla funzione f come a una sorta di macchina che produce un valore di output $f(x)$ appartenente alla sua immagine ogni volta che diamo in input un valore x preso nel suo dominio.