C se x ha infinite cifre decimali, allora x è un numero irrazionale;

D se x è un numero decimale periodico, allora x è razionale.

7 La soluzione dell'equazione $2x + \sqrt{2}\,x = 1$:

A $-\sqrt{2}$ B $-\sqrt{2}-1$ C $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ D $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

8 In quale ordine si possono disporre i numeri $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, $\frac{17}{4}$?

A $3\sqrt{2} \le 2\sqrt{3} \le \sqrt{15} \le \frac{17}{4}$ B $2\sqrt{3} \le \sqrt{15} \le 3\sqrt{2} \le \frac{17}{4}$

C $2\sqrt{3} \le 3\sqrt{2} \le \sqrt{15} \le \frac{17}{4}$ D $2\sqrt{3} \le \sqrt{15} \le \frac{17}{4} \le 3\sqrt{2}$

PRODI TANI
SCOPRIRE LA MATEMATICA
Introduzione all'algebra
GHISETTI e CORVI 2003

CAPITOLO 5

APPLICAZIONI

OBIETTIVI

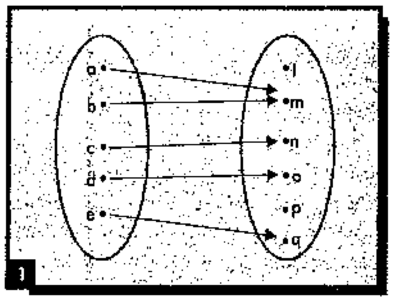
- Introdurre il concetto di applicazione.
- Dare la definizione di applicazione iniettiva, surgettiva, bigettiva e di applicazione inversa.
- Definire la composizione di due applicazioni.

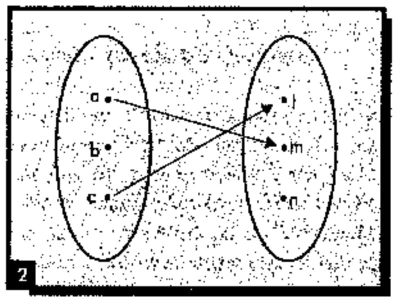
5.1 Applicazioni (funzioni, trasformazioni)

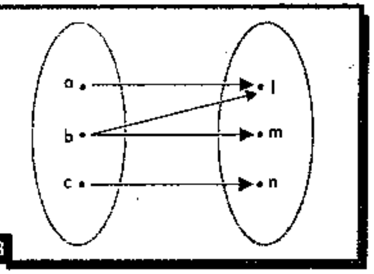
Riprendiamo la nozione di relazione, che abbiamo introdotto all'inizio del capitolo 3. Dati ancora due insiemi A, B, consideriamo le relazioni che hanno questa proprietà: ogni elemento di A ha uno ed un solo corrispondente in B. In altre parole, dato un qualsiasi elemento x di A c'è uno ed un solo elemento y di B tale che la coppia (x, y) fa parte della relazione (ricordiamo che una relazione è un insieme di coppie, ossia un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$); y viene detto *valore assunto dall'applicazione in corrispondenza di x*. Una relazione avente questa proprietà si dice un'*applicazione* (o anche *funzione*, o *trasformazione*). L'insieme A si dice *dominio* dell'applicazione, l'insieme B *codominio*.

Il termine funzione è sinonimo di applicazione, ma è piú tradizionale e si impiega soprattutto quando A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Anche il termine trasformazione è sinonimo di applicazione e si impiega soprattutto in geometria.

Per chiarirci le idee, vediamo subito alcuni esempi di relazioni che non sono applicazioni.







3

La relazione rappresentata dalla figura 2 non è un'applicazione. Infatti: l'elemento b del primo insieme non ha alcun corrispondente nel secondo insieme. Anche la relazione rappresentata dalla figura 3 non è un'applicazione: infatti, all'elemento b di A corrispondono due elementi nel secondo insieme. È facile controllare invece che la relazione illustrata dalla figura 1 è un'applicazione. Non contrasta con la nostra definizione il fatto che due diversi elementi (a e b) del dominio hanno un solo corrispondente (m) nel codominio. Intuitivamente, possiamo pensare un'applicazione come uno spostamento che porta ogni elemento di A a coincidere con un elemento di B.

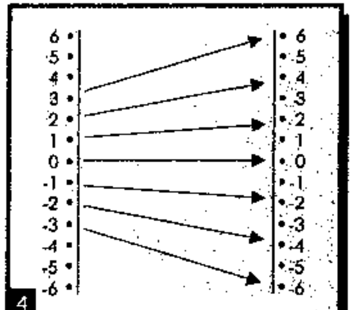
Un'applicazione viene indicata di solito con una lettera: ad esempio f. Se a è un elemento del dominio A, si indica con $f(a)$ l'elemento del codominio che corrisponde ad a: se f è l'applicazione illustrata dalla figura 1, si ha $f(a) = m, f(b) = m, f(c) = n, f(d) = o, f(e) = q$.

Ricordiamo che due insiemi A e B sono uguali se i loro elementi coincidono, ossia se ogni elemento di A appartiene anche a B e, viceversa, ogni elemento di B appartiene anche ad A; l'esistenza di un elemento che appartiene ad uno dei due insiemi, ma non all'altro fa sí che la relazione di uguaglianza non sia verificata. Poiché le funzioni sono insiemi (sottoinsiemi del prodotto cartesiano) avremo che due funzioni f e g, aventi entrambe dominio A e codominio B, sono uguali se gli elementi di f coincidono con gli elementi di g ovvero se per ogni elemento x di A si ha $f(x) = g(x)$.

Vediamo ora alcuni esempi di applicazioni.

1 Prendiamo come dominio e come codominio l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e consideriamo l'applicazione che raddoppia il valore, cioè:

$$x \to 2x$$



4

La scrittura con cui abbiamo indicato questa applicazione è molto espressiva: qui x indica un numero variabile, e viene messa in evidenza la legge che fa passare da x al suo corrispondente. Occorre fare attenzione: le scritture $x \to 2x$ e $y \to 2y$ individuano la stessa applicazione perché quello che importa non è la lettera con cui si indica il numero variabile (x, y o un'altra lettera ancora), ma la legge della corrispondenza.

Del resto, si potrebbe anche individuare la nostra applicazione con il simbolo:

$$\square \to 2\,\square$$

dove si pensa che la casella vuota possa essere riempita con un numero qualunque.

2 La relazione $x \to x^2 + 3x + 1$ è un'applicazione. Ad esempio, facendo $x = \frac{1}{2}$, si ha: $\frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{4}$ Qui l'applicazione è dunque definita da un polinomio nella variabile x.

3 Anche le espressioni fratte definiscono applicazioni. Ad esempio, la relazione $x \to \frac{1}{x-1}$ definisce un'applicazione che ha come dominio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (teniamo presente che per $x = 1$ il denominatore si annulla ...).

4 Ci possiamo chiedere se le operazioni di addizione e di moltiplicazione definite in $\mathbb{Q}$ (vedi capitolo 1) possono essere considerate come applicazioni. Si deve tener presente che per fare un'addizione occorre assegnare due numeri (gli addendi); analogamente, per fare una moltiplicazione occorre assegnare i due fattori. Quindi sia l'addizione che la moltiplicazione fanno passare da una coppia di numeri ad un numero; ad esempio:

$$(3,2) \to 3 + 2 = 5 \qquad (3,2) \to 3 \cdot 2 = 6$$

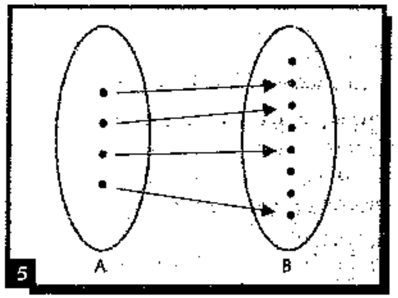
Concludiamo che l'addizione e la moltiplicazione sono applicazioni di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (prodotto cartesiano) in $\mathbb{Q}$. Analoga affermazione si può fare quando l'addizione e la moltiplicazione vengono considerate in $\mathbb{R}$.

5.2 Applicazioni iniettive e surgettive - Applicazione inversa

Le applicazioni possono essere classificate in base a certe proprietà molto importanti. Cominciamo con un esempio: quello dell'applicazione che fa corrispondere ad ogni automobile immatricolata in un certo ambito territoriale il suo numero di targa. È importante che non vi siano due (o piú) automobili con lo stesso numero di targa (altrimenti, in caso di infrazione al codice stradale, non sarebbe possibile risalire in modo sicuro al colpevole attraverso il numero di targa).

Questo esempio è utile per poter capire una proprietà importante che può avere una applicazione.

Una applicazione di un insieme A in un insieme B si dice *iniettiva* se manda elementi distinti in elementi distinti.



5

Ad esempio l'applicazione della figura 1 non è iniettiva perché vi sono due elementi distinti dell'insieme A, cioè a e b, che vengono portati in uno stesso elemento: m. L'applicazione descritta dalla figura 5 è invece iniettiva.

Esempi:

1 L'applicazione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ così definita: $x \to 3x+1$ è iniettiva. Infatti, fissato un qualunque valore y, supponiamo che x' ed x'' vengano mandati entrambi in y. Allora si ha:

$$3x'+1=y$$
$$3x''+1=y$$

Da queste relazioni si ricava: $3x'+1=3x''+1$ e, semplificando $3(x'-x'')=0$, da cui $x'=x''$. Dunque, fissato y, vi è un unico elemento di $\mathbb{Q}$ da cui esso proviene. Questo appunto significa che la nostra applicazione è iniettiva.

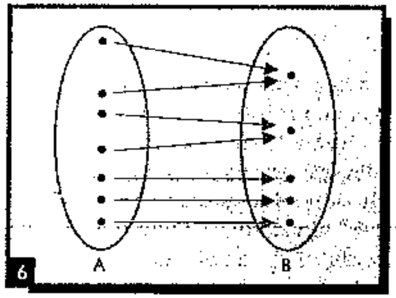
2 Consideriamo l'applicazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $x \to x^2$. Questa non è iniettiva perché se si prende un qualsiasi numero positivo, esso proviene da due valori distinti, di segno opposto; ad esempio 9 proviene da 3 e da -3. In generale, un valore $y>0$ proviene da $\sqrt{y}$ e da $-\sqrt{y}$.

Vediamo un'altra proprietà molto importante per le applicazioni.

Sia f un'applicazione di A in B: se accade che ogni elemento di B è il corrispondente di qualche elemento di A si dice che f è *surgettiva*.

Per fare un esempio concreto (anzi concretissimo) supponiamo che A sia un insieme di panini e B un insieme di ragazzi e supponiamo che l'applicazione f abbia questo significato: $x \to y$ vuol dire che il panino x viene dato al ragazzo y. Dire che l'applicazione è surgettiva è come dire che nessun ragazzo rimane

senza panino (ma può accadere che qualcuno ne riceva due o più). Se si dice invece che l'applicazione è iniettiva, ciò significa che nessun ragazzo riceve più di un panino (ma può anche accadere che qualcuno rimanga senza).



6

L'insieme di tutti i valori che assume l'applicazione f si dice anche *immagine* di A (secondo la f) e si indica con $f(A)$; dunque il fatto che f sia surgettiva si può anche esprimere dicendo che l'immagine di A coincide con B.

Consideriamo ancora l'esempio 1: l'applicazione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$: $x \to 3x+1$ è anche surgettiva; per dimostrarlo, verifichiamo che, per ogni y appartenente a $\mathbb{Q}$ esiste x appartenente anch'essa a $\mathbb{Q}$ tale che $3x+1=y$; questa relazione si può vedere come un'equazione nell'incognita x; risolvendola, si ricava $x=\frac{1}{3}(y-1)$. Poiché, per ogni numero razionale y, $\frac{1}{3}(y-1)$ è ancora un numero razionale, la proprietà risulta verificata. L'applicazione dell'esempio 2: $x \to x^2$ non è neppure surgettiva; infatti se si prende un valore $y<0$ non c'è nessun x tale che $x^2=y$: infatti, come abbiamo visto, il quadrato di un qualunque numero è maggiore o uguale a zero.

Un'applicazione f di A in B che sia nello stesso tempo iniettiva e surgettiva si dice bigettiva. Se f è bigettiva, ogni elemento di B proviene da uno ed un solo elemento di A; si dice allora che f pone una *corrispondenza biunivoca* fra A e B.

Il fatto che fra due insiemi si possa porre una corrispondenza biunivoca è molto importante: esso ci dice, in termini intuitivi, che i due insiemi sono ugualmente numerosi. Se l'applicazione f di A in B è iniettiva, ciò significa che il numero degli elementi di B è maggiore o uguale del numero degli elementi di A; se l'applicazione f è surgettiva, ciò significa che il numero degli elementi di A è maggiore o uguale al numero degli elementi di B (per fissare le idee si può pensare ancora all'esempio dei panini e dei ragazzi).

È interessante notare che queste nozioni si possono applicare anche al caso di insiemi A e B infiniti: quindi si può arrivare a confrontare la numerosità (il termine tecnico è: il *numero cardinale*) di due insiemi infiniti. Ma queste cose sono per ora un po' premature e riguardano un livello più approfondito di studi matematici.

Se un'applicazione f di un insieme A in un insieme B è bigettiva, si può far corrispondere ad ogni elemento di B l'unico elemento di A da cui esso proviene. Si ottiene così un'applicazione di B in A che si dice *applicazione inversa* della f.

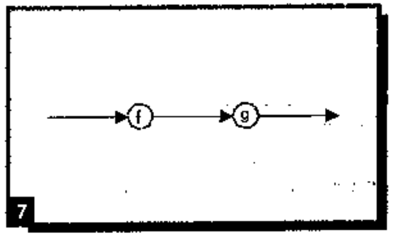
Ritorniamo nuovamente all'esempio 1; abbiamo già visto che l'applicazione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$: $x \to 3x+1$ è iniettiva e surgettiva, dunque è bigettiva. L'applicazione inversa è quella che fa passare da un valore y al valore x tale che $3x+1=y$. Quindi, secondo i calcoli che abbiamo già fatto, l'applicazione inversa è: $y \to \frac{1}{3}(y-1)$.

Riprendiamo ancora l'esempio 2. Se, invece di prendere come dominio e come codominio $\mathbb{R}$, prendiamo $\mathbb{R}^+$ (insieme dei numeri reali ≥ 0), l'applicazione $x \to x^2$ diventa bigettiva perché, dato un numero $y \geq 0$ esiste uno ed un solo $x \geq 0$ tale che $x^2 = y$. Infatti i valori x reali tali che $x^2 = y$ sono due: $\sqrt{y}$ e $-\sqrt{y}$, che sono distinti se è $y > 0$. Ma limitando il dominio della nostra applicazione a $\mathbb{R}^+$, il valore $-\sqrt{y}$ viene escluso e rimane solo il valore $\sqrt{y}$.

In conclusione: l'applicazione di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}^+$: $x \to x^2$ ammette un'applicazione inversa che è data da $y \to \sqrt{y}$.

5.3 La composizione delle applicazioni

Vediamo ora un'altra nozione importante. Fin da quando abbiamo studiato i grafi di calcolo, ci siamo familiarizzati a grafi come questo:



7

Consideriamo, ad esempio, il caso di applicazioni con dominio e codominio uguali a $\mathbb{Q}$, e sia:

$$f : x \to 3x+1 \qquad g : y \to y^2$$

Per interpretare correttamente il grafo della figura 7, possiamo pensare che ad un tavolo ci sia un ragazzo che ha ricevuto l'incarico di calcolare la f: egli riceve dall'insegnante un numero qualsiasi, lo moltiplica per 3 e aggiunge al risultato 1. Ad esempio:

$$\begin{array}{rcccr} 2 & \to & 3\cdot 2+1 & = & 7 \\ -1 & \to & -3+1 & = & -2 \\ \frac{1}{6} & \to & 3\cdot\frac{1}{6}+1 & = & \frac{3}{2} \end{array}$$

Ad un secondo tavolo c'è un ragazzo che ha ricevuto l'incarico di calcolare la g. Egli riceve un numero e ne fa il quadrato. Ad esempio: $3 \to 9$, $2 \to 4$, $\frac{2}{5} \to \frac{4}{25}$, ...

Supponiamo ora di affiancare i tavoli e supponiamo che il primo ragazzo passi al secondo il numero che ha ottenuto come risultato; il secondo ragazzo prende questo numero come dato e fa il calcolo. Ad esempio:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \xrightarrow{f} & 7 & \xrightarrow{g} & 49 \\ -1 & \xrightarrow{f} & -2 & \xrightarrow{g} & 4 \\ \frac{1}{6} & \xrightarrow{f} & \frac{3}{2} & \xrightarrow{g} & \frac{9}{4} \end{array}$$

Dunque al numero fornito dall'insegnante al primo ragazzo possiamo fare corrispondere il numero ottenuto dal secondo ragazzo come risultato: $2 \to 49$; $-1 \to 4$; $\frac{1}{6} \to \frac{9}{4}$.

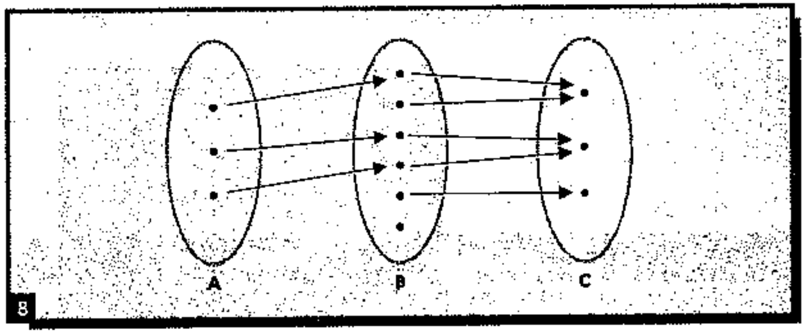
L'applicazione che otteniamo è l'applicazione composta della f e della g (in questo ordine). Vogliamo trovare l'espressione di questa applicazione: basta tener presente che il secondo ragazzo fa il quadrato del numero y che riceve. Se x è il numero che l'insegnante fornisce al primo ragazzo, il secondo ragazzo riceve il numero $3x+1$ e ne fa il quadrato. Il risultato è $(3x+1)^2$.

Quindi l'applicazione composta della f e della g è:

$$x \to (3x+1)^2 = 9x^2+6x+1$$

In generale, supponiamo che f sia un'applicazione che manda un insieme A in un insieme B, e che g sia un'applicazione che manda l'insieme B in un insieme C. Allora, l'applicazione composta di f e g (secondo il grafo della figura 7) è l'applicazione:

$$x \to g[f(x)]$$



8

La figura 8 chiarisce in modo espressivo la nozione di applicazione composta. L'applicazione composta di f con g si indica con $g \circ f$. Notiamo che si segna a destra l'applicazione che viene eseguita per prima, rispecchiando la scrittura $g[f(x)]$.

L'operazione che associa alla coppia di applicazioni $(f,\ g)$ l'applicazione $g \circ f$ si dice *composizione*.

Consideriamo ora l'insieme di tutte le applicazioni che hanno come dominio e come codominio un insieme fissato A. La composizione, nell'insieme di queste applicazioni, è un'operazione molto importante, che ha analogia con le operazioni algebriche (tanto che qualcuno la chiama *prodotto di composizione*). Ma occorre stare attenti: in generale, la composizione non è *commutativa*. Per rendercene conto consideriamo ancora le applicazioni $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ così definite:

$$f : x \to 3x + 1 \qquad g : y \to y^2$$

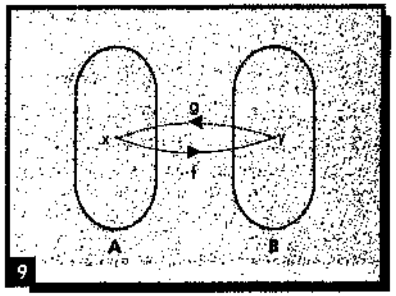
Abbiamo visto che è $g \circ f : x \to (3x+1)^2$, mentre si ha $f \circ g : y \to 3y^2 + 1$. Si verifica subito che queste due applicazioni sono diverse tra loro: ad esempio $g \circ f$ manda 2 in 49, mentre $f \circ g$ manda 2 in 13.

Dato sempre un insieme A, si dice *applicazione identica* (o *identità*) di A l'applicazione i_A che fa corrispondere ad ogni elemento di A l'elemento stesso, cioè l'applicazione: $x \to x$. L'applicazione identica è una di quelle ... banalità matematiche (come l'insieme vuoto, lo zero, eccetera) che nessuno userebbe mai nella vita di ogni giorno. Ad esempio, nessuno, nella vita di ogni giorno, chiamerebbe spostamento un'operazione in cui non si muove nulla, o chiamerebbe viaggio il restare seduto sulla propria poltrona. Invece, nel discorso matematico, l'applicazione identica è molto importante: è l'elemento neutro rispetto all'operazione di composizione, cioè si ha:

$$f \circ i_A = f = i_A \circ f$$

Vediamo ora come, facendo uso dell'applicazione identica, siamo in grado di esprimere con simboli le proprietà caratteristiche dell'applicazione inversa di un'applicazione assegnata.

Siano A e B insiemi e sia f un'applicazione bigettiva di A in B. Sia g l'applicazione inversa di f. Allora, preso un qualsiasi elemento x di A, e posto $y = f(x)$, si ha $g(y) = x$, cioè $g[f(x)] = x$. Questo significa che $g \circ f = i_A$ (identità di A). Analogamente, si ha che $f \circ g = i_B$ (identità di B).



9

Queste due relazioni che abbiamo trovato ci dicono in modo molto efficace che f e g sono una l'inversa dell'altra.

Sempre in analogia con le operazioni algebriche, spesso per indicare l'applicazione inversa di una data applicazione f, si usa il simbolo f^{-1}. Ad esempio se prendiamo $f : x \to 3x + 1$ sarà $f^{-1} : y \to \dfrac{y-1}{3}$.

Questa notazione risulta molto utile, occorre solo stare bene attenti a non confonderla con quella di reciproco.

Per concludere, vediamo un caso interessante in cui un'applicazione di un insieme in sé ammette l'inversa. Consideriamo l'operazione di *opposto*: $x \to -x$. Eseguendo due volte questa operazione si ottiene l'identità: infatti $-(-x) = x$.

In generale, supponiamo che b sia un'applicazione di un insieme A in sé che eseguita due volte, ci dà l'identità: $b[b(x)] = x$. Questa relazione si legge così: l'elemento x viene mandato dalla b in un elemento $y = b(x)$ che, dalla stessa b, viene rispedito al punto di partenza x.

Quindi, l'inversa dell'applicazione b esiste ed è la b stessa!

Un'applicazione di un insieme in sé che eseguita due volte ci dà l'identità si dice *involutoria*. Negli studi futuri, specialmente a proposito della geometria, avremo occasione di studiare importanti applicazioni involutorie.

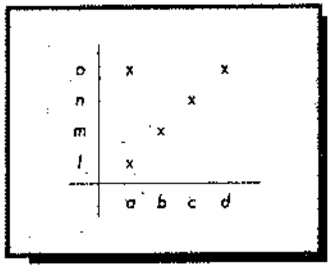
VOCABOLI E SIMBOLI

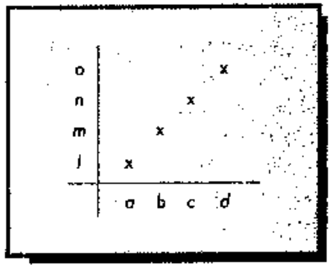
- applicazione, funzione, trasformazione
- dominio, codominio
- valore, immagine
- $x \to f(x)$
- (applicazione) iniettiva, surgettiva, bigettiva
- corrispondenza biunivoca
- applicazione inversa f^{-1}
- composizione
- applicazione identica (o identità)
- applicazione involutoria
- punto fisso

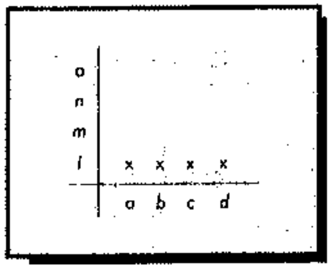
ESERCIZI

Paragrafo 5.1

(1) Stabilire se ciascuna delle relazioni rappresentate nei seguenti grafici è una funzione dall'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ nell'insieme $B = \{l, m, n, o\}$; motivare le risposte.







Come deve essere, in generale, il grafico di un'applicazione?

(2) Una relazione R da $A = \{0,1,2,3\}$ in $B = \{-10,-1,0,1,2\}$ è costituita dalle seguenti coppie: $(0,-10)$; $(2,-1)$; $(3,0)$; $(1,2)$; $(2,0)$. Si tratta di una funzione? Perché?

(3) La relazione che associa ad ogni numero naturale x il resto della divisione di x per 5 è una funzione? Se la risposta è affermativa determinare il dominio e l'immagine.

(4) La relazione in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ che associa ad ogni x il numero 3 è una funzione? Se la risposta è affermativa, determinare il dominio e l'immagine.

(5) Dati gli insiemi $A = \{0,1\}$ e $B = \{a,b\}$, determinare tutte le possibili applicazioni di A in B e disegnare i relativi grafici.

(6) Considerare l'applicazione f di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$: $x \to 3(x-1)$. Calcolare $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$

(7) Data l'applicazione f di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $x \to \frac{1}{9}x^2 - 4$, calcolare il valore che essa assume nei punti -3, $\sqrt{2}-3$, $\frac{3}{10}$.

(8) Data la funzione f di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$: $x \to 3 - |x+1|$, calcolare i valori della funzione per $x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

(9) Data la funzione f di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$: $x \to \frac{4x+1}{5}$, stabilire quale valore di x ha immagine $\frac{3}{4}$.

(10) Sia data l'applicazione $f : x \to \frac{2x+1}{\sqrt{x+3}}$. Calcolare $f(6)$, $f(-2)$, $f(5)$. È possibile calcolare $f(-3)$? E $f(-7)$? Qual è l'insieme più ampio in cui la funzione f è definita?

> **ATTENZIONE** $\sqrt{a}$ è definita per $a \geq 0$, inoltre il denominatore deve assumere valori diversi da zero, pertanto ...

(11) In quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è definita la funzione $f : x \to \frac{3+x^2}{\sqrt{5-x}}$? Calcola $f(-2)$, $f(1)$. Esistono valori di x per cui $f(x) < 0$?

(12) In quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è definita ciascuna delle seguenti funzioni?

a $f : x \to \frac{1}{2x-3}$ **b** $f : x \to \frac{x+1}{x^2}$ **c** $f : x \to \sqrt{x+4}$

(13) Qual è il dominio della funzione $x \to \frac{10+x}{x}$ nell'insieme $\mathbb{N}$? Esiste un numero naturale la cui immagine è uguale a 3? E un numero la cui immagine è uguale a 7?

(14) Data l'applicazione f di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$: $x \to 3x^2 - 12$, calcolare $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Trovare, se possibile, i valori di x per cui:

a $f(x) = 0$
b $f(x) = -15$

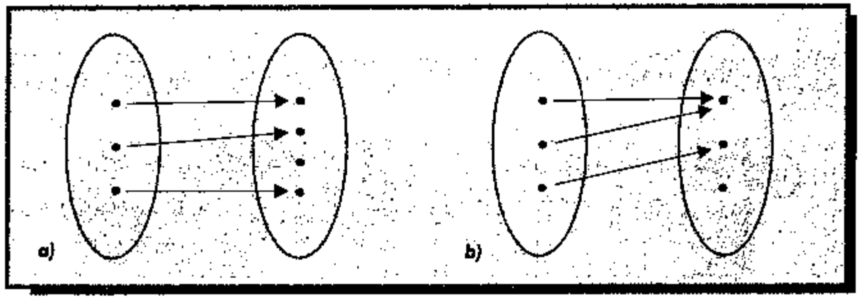
(15) Una società per il noleggio delle auto permette ai suoi clienti di scegliere tra le seguenti condizioni:

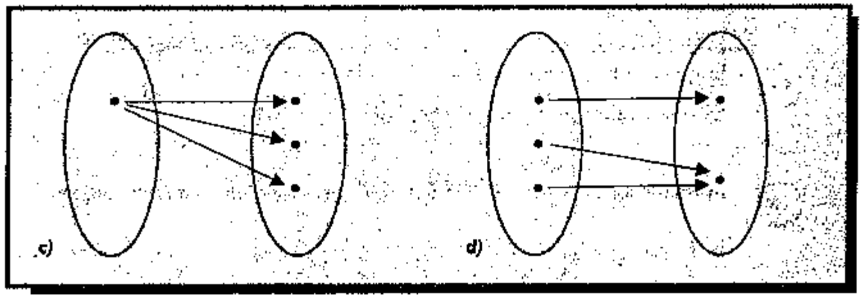
a 10 euro di spesa fissa, più 0,2 euro per ogni chilometro percorso;
b 15 euro di spesa fissa, più 0,1 euro per ogni chilometro percorso.

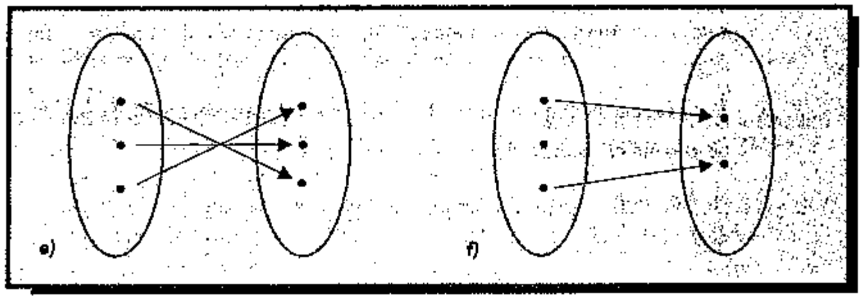
Esprimere la spesa in funzione dei chilometri x percorsi e decidere quale delle due condizioni è più conveniente, sulla base della lunghezza del percorso.

Paragrafo 5.2

(16) Quali dei seguenti diagrammi rappresentano un'applicazione? E fra le applicazioni quali sono iniettive? Quali surgettive?







(17) L'applicazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$: $x \to 3x+1$ è iniettiva? È surgettiva? Confrontare con il caso già studiato, in cui l'applicazione $x \to 3x+1$ ha come dominio e come codominio $\mathbb{Q}$.

(18) Sia A un insieme finito e sia f una applicazione di A in A. Rendersi conto, facendo una rappresentazione grafica, che se f è iniettiva, è anche surgettiva e se f è surgettiva, è anche iniettiva.

(19) Affermare che una applicazione non è bigettiva equivale ad affermare che quella applicazione è non iniettiva e non surgettiva? Motivare la risposta, facendo anche degli esempi.

(20) L'applicazione $x \to 2x$ definita fra l'insieme dei numeri dispari e l'insieme $\mathbb{N}$ è iniettiva? È surgettiva?

(21) Considerare l'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$: $x \to 3+2x$. È iniettiva? È bigettiva?

(22) Studiare allo stesso modo l'applicazione $x \to 3+\frac{x}{2}$ di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$.

(23) L'applicazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ che ad x associa $2x$ se x è pari e $2x-1$ se x è dispari è iniettiva? È surgettiva?

(24) Data l'applicazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $x \to |x|$, stabilire se è iniettiva e surgettiva.

(25) Determinare l'insieme immagine di $\mathbb{N}$ mediante l'applicazione $x \to x^2$.

(26) Si consideri una macchina da corsa in prova. La funzione che ad ogni istante associa la velocità (intesa in senso scalare) della macchina espressa in km/h è iniettiva?

(27) Sia S l'insieme dei segmenti contenuti in una retta R. L'applicazione da S in R che ad ogni segmento fa corrispondere il suo punto medio è surgettiva? È iniettiva?

(28) Dato un segmento AB, sia S l'insieme dei segmenti contenuti in esso, l'applicazione di S in AB che fa corrispondere ad ogni segmento di S il suo punto medio è surgettiva?

(29) Considerare l'applicazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ data dalla legge: $x \to ax+b$ dove a e b sono numeri assegnati. In quale caso essa è iniettiva? In quale caso surgettiva?

NOTA Si troverà che se la funzione è iniettiva, è anche surgettiva e viceversa.

(30) Si consideri l'applicazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ così definita: $x \to ax+b$ dove a e b sono elementi di $\mathbb{Z}$. Come devono essere presi a e b affinché questa applicazione sia bigettiva?

(31) Data la funzione f di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$: $x \to \frac{3x+1}{2}$, dimostrare che è iniettiva e surgettiva e trovare l'espressione della funzione inversa.

(32) L'addizione in $\mathbb{Q}$ è un'applicazione di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ (esempio (4) del paragrafo 5.1). È una applicazione iniettiva? È surgettiva? Che cosa si può dire per la moltiplicazione?

(33) Studiare l'applicazione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$: $x \to 3x-4$. Vi è qualche punto che viene trasformato in sé?

NOTA Punti x che vengono trasformati in sé da una funzione f, ovvero tali che $x = f(x)$, si chiamano punti fissi di f.

(34) Vi sono applicazioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ del tipo $x \to ax + b$ che non hanno punti fissi?

(35) L'applicazione $x \to \dfrac{4}{x}$ definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, ha punti fissi?

Paragrafo 5.3

(36) Trovare l'espressione dell'applicazione $g \circ f$ dove f e g sono applicazioni così definite:

a $f : x \to x + 1$; $g : y \to \dfrac{y}{y^2 + 1}$

b $f : x \to x + 2$; $g : y \to y - 2$

c $f : x \to \dfrac{3x + 1}{2x + 1}$; $g : y \to \dfrac{3y - 4}{2y + 3}$

(37) Date le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ $f : x \to x + 2$ e $g : x \to 3x - 1$, determinare $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$. Calcolare poi $f(f(1))$, $g(g(1))$, $f(g(1))$, $g(f(1))$.

(38) Sia $f : x \to 3x + x^2$ e $g : y \to y - 1$. Esprimere le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$. Esiste un valore di x per cui $f(g(x)) = g(f(x))$?

(39) Considerare l'applicazione f: $x \to \dfrac{3x + 1}{2x + 1}$ definita in $\mathbb{Q} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ (infatti per $x = -\dfrac{1}{2}$ si annulla il denominatore). Qual è l'immagine? Esiste l'applicazione inversa (definita sull'immagine di f)?

(40) Nell'insieme dei numeri razionali positivi, considerare l'applicazione $x \to \dfrac{1}{x}$ (è l'applicazione *reciproco*). È invertibile? Quale particolare proprietà possiede?

(41) Siano $f : x \to 2x$; $g : y \to \dfrac{1}{3}y - 2$; $h : z \to z^2$. Esprimere $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$. Che cosa si può dire delle funzioni determinate?

ESERCIZIO SVOLTO

(42) L'operazione di composizione delle funzioni è associativa?

Si tratta di verificare che, comunque si scelgono tre applicazioni f, g, h, si ha: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Due applicazioni coincidono quando ogni elemento del dominio ha la stessa immagine in entrambe le applicazioni, quindi l'uguaglianza vale se per ogni elemento x si ha: $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$, e questo è vero perché, per definizione di composizione: $h \circ (g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f(x)$.

(43) Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e siano f e g le seguenti due applicazioni di A in sé:

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificare che $f \circ g \neq g \circ f$.

(44) Date le due applicazioni f e g definite in $\mathbb{R}$, $f : x \to \dfrac{x}{3}$; $g : y \to 4y$, determinare se sono bigettive e trovare le espressioni di $f \circ g$ e $g \circ f$.

(45) Siano $f : x \to x^2 - x$ e $g : x \to 2x$. Quali sono i punti fissi per $g \circ f$? E per $f \circ g$?

(46) Siano f e g funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che esprimono una proporzionalità diretta ($f : x \to k \cdot x$, $g : x \to h \cdot x$, dove h e k sono numeri reali diversi da 0). Dimostrare che $f \circ g$ e $g \circ f$ esprimono ancora una proporzionalità diretta. È vero che $f \circ g = g \circ f$?

(47) Siano f e g funzioni, definite su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che esprimono una proporzionalità inversa ($f : x \to \dfrac{k}{x}$, $g : x \to \dfrac{h}{x}$, con h, k numeri reali diversi da 0). Le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ esprimono ancora una proporzionalità inversa?

ESERCIZIO SVOLTO

(48) Verificare che se f di A in B e g di B in C sono funzioni iniettive, anche $g \circ f$ è iniettiva. Se f e g sono bigettive, anche $g \circ f$ è bigettiva.

Per verificare la iniettività di $g \circ f$ è sufficiente osservare che se x' e x'' sono elementi distinti, allora $f(x') \neq f(x'')$ poiché f è iniettiva e $g(f(x')) \neq g(f(x''))$ poiché anche g è iniettiva. Per la surgettività, osserviamo che preso un elemento $z \in C$, poiché f è surgettiva, esiste almeno un elemento $y \in B$ tale che $z = g(y)$. Ma anche f è surgettiva, quindi esiste almeno un elemento x di A tale che $y = f(x)$. Allora $z = g(y) = g(f(x))$, cioè $z = g \circ f(x)$.

(49) Sia f la funzione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ definita da: $x \to ax + b$. Determinare per quali valori di a e di b la funzione è involutoria.

(50) Siano f e g funzioni di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ definite da f: $x \to \dfrac{3x + 1}{2}$ e $g : y \to \dfrac{2y - 1}{3}$; dimostrare che f e g sono una l'inversa dell'altra.

(51) Siano f e g due applicazioni invertibili; dimostrare che $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Per dimostrare l'uguaglianza è sufficiente provare che:

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = Id \quad e \quad (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = Id$$

Vediamo la prima uguaglianza:

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1}$$

per la proprietà associativa:

$$f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = Id$$

per la proprietà della funzione inversa.