Prodi - Iani - SCOPRIRE LA MATEMATICA
Introduzione all'algebra
GHISETTI e CORVI
2003

CAPITOLO 3

EQUIVALENZE, UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

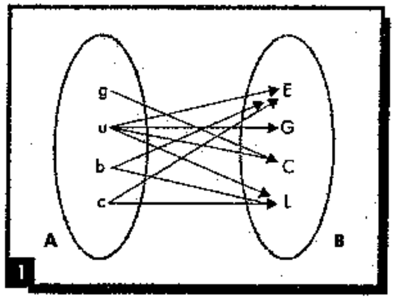
OBIETTIVI

- Introdurre la nozione di relazione.
- Definire la relazione di equivalenza.
- Presentare la relazione di ordine totale definita sull'insieme dei numeri razionali relativi con le proprietà di cui essa gode.
- Risolvere equazioni e disequazioni.

3.1 Relazioni - Relazioni di equivalenza

Spesso un'affermazione consiste nel porre in relazione un elemento di un certo insieme con un elemento di un altro insieme. Ad esempio, indichiamo con A un insieme di specie animali: gatto, uomo, bue, cavallo, e con B un insieme di materie alimentari: erba, grano, carne, legumi.

Posso tracciare una freccia dall'animale x al cibo y per esprimere che l'animale x può mangiare il cibo y.



1

In questo modo è stabilita una particolare *relazione* fra elementi di A ed elementi di B. Dunque, una relazione non è altro che un insieme di coppie, in cui il primo elemento è preso in A, il secondo in B: nel nostro esempio sono le coppie: (animale, cibo).

Ricordiamo che si dice prodotto cartesiano di due insiemi A, B l'insieme di tutte le coppie che si possono formare prendendo il primo elemento in A ed il secondo in B; il prodotto cartesiano di A per B si indica con $A \times B$.

La relazione tra elementi di A ed elementi di B si può allora vedere come sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Il prodotto cartesiano può essere rappresentato da una tabella rettangolare in cui ogni casella rappresenta una coppia: ebbene, possiamo convenire di contrassegnare quelle caselle per cui la relazione che ci interessa è vera. Ad esempio, il grafico che riportiamo qui sotto dice la stessa cosa del diagramma della figura 1.

L		*	*	*
G		*		
C	*	*		
E		*	*	*
	g	u	b	c

Naturalmente, non si esclude che i due insiemi A e B coincidano: supponiamo che $A = B$ sia un insieme di ragazzi: Giorgio (G), Enrico (E), Luca (L), Mario (M), Paolo (P), Andrea (A). Una relazione interessante è questa: x è fratello di y. Per una di quelle ... banalità che piacciono ai matematici, conveniamo che ciascuno sia fratello di se stesso (del resto, se essere fratelli significa avere gli stessi genitori, la cosa torna perfettamente). Il grafico seguente esprime una relazione di questo tipo.

A					*	*
P					*	*
M	*		*	*		
L	*		*	*		
E		*				
G	*		*	*		
	G	E	L	M	P	A

Evidentemente, Giorgio, Luca e Mario sono fratelli; anche Paolo e Andrea sono fratelli, mentre Enrico non ha fratelli (oltre ... se stesso). La relazione fratello ha la proprietà *riflessiva* (ciascuno è fratello di se stesso, come abbiamo stabilito), *simmetrica* (se Luca è fratello di Giorgio, Giorgio è fratello di Luca), *transitiva* (se Luca è fratello di Giorgio e Giorgio è fratello di Mario, Luca è fratello di Mario). Allora, in base alla relazione di fratello, il gruppo dei ragazzi viene suddiviso in tanti sottoinsiemi ciascuno dei quali comprende i ragazzi di una stessa famiglia.

Supponiamo di avere un insieme A e una relazione $R \subset A \times A$ che gode delle seguenti proprietà:
E1: $(x, x) \in R$ (proprietà *riflessiva*).
E2: se $(x, y) \in R$, allora è $(y, x) \in R$ (proprietà *simmetrica*).
E3: se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, allora $(x, z) \in R$ (proprietà *transitiva*).

Si dice allora che R è una relazione di equivalenza e si scrive $x \sim y$ (che si legge x è equivalente a y) per indicare che la coppia (x, y) appartiene a R.
In questo caso l'insieme A viene ripartito in tanti sottoinsiemi non vuoti, a due a due disgiunti che sono composti di elementi fra loro equivalenti; ognuno di questi insiemi si chiama *classe di equivalenza*. Si dice anche che si è operata così una *partizione* nell'insieme A. Viceversa, se è data una partizione in A, è subito assegnata la relazione di equivalenza corrispondente: due elementi sono equivalenti se stanno nella stessa classe.

Vediamo un altro esempio; nell'insieme $\mathbb{N}$ degli interi naturali introduciamo la seguente relazione: $m \sim n$ significa che $m - n$ è un multiplo di 2 (eventualmente nullo o negativo). Si può verificare che si tratta effettivamente di una relazione di equivalenza; le classi di equivalenza sono due: quella formata dai numeri pari e quella formata dai numeri dispari.

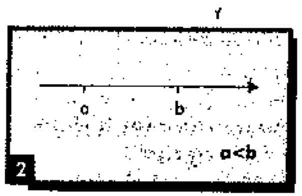
Un caso particolare, ma molto importante, di relazione di equivalenza è la relazione di *uguaglianza* (che abbiamo già applicato tante volte e che, anzi, ci è nota fin dalle scuole elementari). La relazione di uguaglianza gode delle proprietà *riflessiva, simmetrica, transitiva,* ma esprime qualcosa di piú di una semplice relazione di equivalenza:

Scrivendo $x = y$ noi vogliamo dire che x ed y rappresentano lo stesso oggetto, quindi x potrà essere sostituito con y tutte le volte che lo desideriamo. Ad esempio, 5 + 3 = 8: perciò, dove si trova scritto 5 + 3 si può scrivere 8, e viceversa. Pensando al significato che abbiamo attribuito alla relazione di uguaglianza è naturale porre le seguenti proprietà:

FE1: Se $a = b$, allora per ogni numero b è: $a + b = b + b$.
FE2: Se $a = b$, allora per ogni numero b è: $a \cdot b = b \cdot b$.

3.2 La struttura di ordine nei razionali

All'inizio del capitolo 1, i numeri relativi sono stati presentati in forma intuitiva mediante la loro rappresentazione sulla retta. Ebbene, una retta può essere percorsa in un certo verso, per esempio quello che va dai numeri negativi a quelli positivi: ogni numero negativo precede lo zero e lo zero precede ogni numero positivo.



2

Useremo la scrittura $a < b$ per indicare che a precede b. Il segno $<$ rappresenta una relazione che ci è già nota nel campo dei numeri razionali assoluti; ad esempio, sappiamo che $\frac{2}{7} < \frac{3}{5}$ (ed effettivamente, percorrendo la nostra retta nel verso fissato, troviamo il punto $\frac{2}{7}$ prima del punto $\frac{3}{5}$ ...) Volendo dare a questa relazione (che fa parte delle *relazioni di ordine*) un assetto rigoroso, ricordiamo che abbiamo identificato i numeri razionali positivi con i numeri (assoluti) che già conoscevamo. Inoltre è importante sottolineare che sommando o moltiplicando numeri positivi si ottiene sempre un numero positivo.

Possiamo allora dare la seguente definizione.

Si dice che $x < y$ (si legge: x è minore di y, oppure x precede y) se $y - x$ è un numero positivo.

Valgono le seguenti proprietà fondamentali:

O1: Se è $x < y$, allora si ha $x \neq y$ (quest'ultima relazione si legge: x diverso da y).

O2: Se è $x < y$ ed è $y < z$, allora è $x < z$ (questa è la proprietà transitiva della relazione di ordine).

O3: Se è $x \neq y$, allora è $x < y$, oppure $y < x$ (la relazione $<$ è di ordine totale).

La **O1**: si può dimostrare nel seguente modo: se è $x < y$, allora $y - x$ è un numero positivo, quindi è $y \neq x$ perché se fosse $y = x$ sarebbe $y - x = 0$.

Dimostriamo la **O2**: dire che $x < y$ e che $y < z$ significa dire che $y - x$ è positivo e $z - y$ è positivo. Poiché la somma di due numeri positivi è un numero positivo, si ha che $(z - y) + (y - x) = z - x$ è positivo. Quindi è $z > x$.

Anche la **O3** si dimostra facilmente: se è $x \neq y$, $y - x$ non è nullo, dunque può essere positivo (e allora è $x < y$), oppure negativo: ma allora il suo opposto $-(y - x) = x - y$ è positivo e ciò significa che è $y < x$.

Occorre stare bene attenti a non confondere la relazione d'ordine fra i numeri razionali relativi con quella che sussiste fra i loro valori assoluti. Ad esempio, è $-9 < 2$, $-7 < -1$, malgrado sia $|-9| > |2|$, $|-7| > |-1|$.

È interessante vedere come la relazione di ordine di cui stiamo parlando è legata alle operazioni fondamentali che abbiamo introdotto nell'insieme dei razionali relativi.

Per quello che riguarda l'addizione si ha:

FO1: Se è $x < y$, allora, per ogni numero b è: $x + b < y + b$.

Cioè: la relazione d'ordine $<$ nell'insieme dei numeri razionali relativi si conserva dopo avere aggiunto ad ambo i membri una stessa quantità. Ad esempio: dalla relazione $2 < 5$ otteniamo $2 + 4 < 5 + 4$, cioè $6 < 9$.

La dimostrazione di questa proprietà è semplice: si ha:
$(y + b) - (x + b) = y - x$; dunque se $y - x$ è positivo, anche $(y + b) - (x + b)$ è positivo, cioè è $x + b < y + b$.

FO2: Se è $x < y$ e se b è un numero positivo, allora si ha $b \cdot x < b \cdot y$.

Cioè: la relazione di ordine $<$ nell'insieme dei numeri razionali relativi si conserva se ambo i membri vengono moltiplicati per una stessa quantità positiva. Ad esempio: dalla relazione $-2 < 3$ otteniamo $(-2) \cdot 4 < 3 \cdot 4$, cioè: $-8 < 12$.

La dimostrazione si fa ricordando che il prodotto di due numeri positivi è positivo. Allora, se $y - x > 0$, si ha $b \cdot (y - x) > 0$; e (applicando la solita proprietà distributiva): $b \cdot y - b \cdot x > 0$, che si legge: $b \cdot x < b \cdot y$.

Che succede se si moltiplica membro a membro per un numero negativo?

Si vede subito che la relazione d'ordine si inverte. Ad esempio, da $-2 < 3$ ricaviamo, moltiplicando per -2, $(-2) \cdot (-2) > 3 \cdot (-2)$, cioè $4 > -6$.

Possiamo facilmente dimostrare che questo accade in generale; sia $x < y$, cioè $y - x$ sia positivo; supponiamo che b sia un numero negativo. Allora, per la regola dei segni, $b \cdot (y - x)$ è negativo, cioè $-b \cdot (y - x) = b \cdot x - b \cdot y$ è positivo. Ma questo vuol dire che è: $b \cdot x > b \cdot y$. Quindi effettivamente la relazione d'ordine si è invertita.

Aggiungiamo qualche parola riguardo alla relazione $x \leq y$ (x minore o uguale di y). Anch'essa viene detta *relazione di ordine*, ma la si chiama *relazione di ordine debole* quando occorre distinguerla dalla precedente. Anzitutto, la relazione $x \leq x$ è vera, dal momento che il caso dell'uguaglianza è ammesso; ad esempio, la relazione $3 \leq 3$ è vera. Quindi per la relazione $x \leq y$ vale la *proprietà riflessiva*. Anche la relazione $3 \leq 5$ non è affatto errata. Solamente, la relazione $3 < 5$ fornisce una informazione piú completa.

Si verificano inoltre le seguenti proprietà:

o1: Se è $x \leq y$ ed è $y \leq x$, allora è $x = y$ (proprietà antisimmetrica).

o2: Se è $x \leq y$ ed è $y \leq z$, allora è $x \leq z$ (proprietà transitiva della relazione $\leq$).

o3: Presi comunque x ed y, si ha $x \leq y$, oppure $y \leq x$ (la relazione $\leq$ è di ordine totale).

Inoltre:

Fo1: Se è $x \leq y$, allora, per ogni numero b si ha: $x + b \leq y + b$.

Fo2: Se è $x \leq y$ e se b è un numero positivo o nullo, si ha: $b \cdot x \leq b \cdot y$.

Le proprietà **o1**, **o2**, **o3** riguardano le relazioni di ordine in se stesse, mentre la **Fo1** e la **Fo2** riguardano le interazioni fra la relazione di ordine e la struttura algebrica che si sviluppa con le operazioni di addizione e di moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali relativi. Tutte le proprietà segnalate valgono anche nell'ambito dei numeri reali di cui ci occuperemo nel prossimo capitolo.

Dati due numeri a, b con $a \leq b$, si dice *intervallo di estremi a e b* l'insieme dei numeri x tali che $a \leq x \leq b$. L'intervallo di estremi a e b verrà indicato con il simbolo $[a,b]$. In modo del tutto naturale i simboli $(a,b]$, $[a,b)$ e (a,b) indicheranno intervalli di estremi a e b in cui però uno e rispettivamente entrambi gli estremi sono esclusi. Nel caso che sia $a = b$ l'intervallo $[a, b]$ consiste di un solo punto e si dice *degenere*.

Vediamo ora alcune importanti proprietà di cui faremo uso in seguito:

1 Se è $x < y$, allora $-x > -y$.

Per dimostrarlo è sufficiente ricordare che l'opposto di un numero è uguale al prodotto del numero stesso per -1 e che se si moltiplicano i due membri di una disuguaglianza per un numero negativo, la relazione d'ordine si inverte.

2 Qualunque sia il numero x, si ha $x^2 \geq 0$.

È opportuno distinguere tre casi: x positivo, x negativo, $x = 0$: se $x > 0$, allora, per la proprietà **Fo2**: $x \cdot x > x \cdot 0$, quindi $x^2 > 0$; se $x < 0$, allora, poiché se si moltiplica membro a membro per un numero negativo la relazione si inverte, si ha $x \cdot x > x \cdot 0$ e quindi $x^2 > 0$; infine se $x = 0$, si ha: $x \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

Procedendo in maniera analoga è possibile determinare il segno di x^m, qualunque sia il valore di m infatti: se $x > 0$, si ha: $x^2 > 0$, $x^3 = x^2 \cdot x > 0$, ..., $x^m > 0$ qualunque sia il valore di m; se $x < 0$, allora $x^2 > 0$, $x^3 = x^2 \cdot x < 0$, $x^4 = x^3 \cdot x > 0$ .... Quindi $x^{2n} > 0$, $x^{2n+1} < 0$ perché ogni volta la relazione di ordine si inverte.

3 Se è $b > 0$, risulta $\frac{1}{b} > 0$; se è $b < 0$, risulta $\frac{1}{b} < 0$. Se $b > 1$, risulta $\frac{1}{b} < 1$.

Siccome $b \cdot \frac{1}{b} = 1$, b e $\frac{1}{b}$ devono averelo stesso segno (se cosí non fosse il loro prodotto sarebbe uguale ad un numero negativo) e ciò prova la prima parte. Se poi $b > 1$ e quindi $b > 0$, risulta $b \cdot \frac{1}{b} > 1 \cdot \frac{1}{b}$, ossia $1 > \frac{1}{b}$ che è ciò che dovevamo dimostrare.

3.3 La struttura di ordine in generale

Fin qui abbiamo sviluppato alcune considerazioni che riguardano il campo dei numeri razionali. Esistono, piú in generale, relazioni per cui valgono proprietà del tipo **O1**, **O2**, **O3** (o **o1**, **o2**, **o3** piú la proprietà riflessiva): le chiamiamo *relazioni di ordine totale o lineare*.

Un'interessante via di riflessione si ha quando non si esige piú che una relazione di ordine abbia luogo fra due elementi qualsiasi di un insieme. Un esempio illuminante: in una classe liceale c'è Gianni che ha riportato 9.5 in matematica e 7 in italiano, mentre Luigi ha riportato 8 in matematica e 10 in italiano. Partendo da questi dati si può decidere chi è il piú bravo? Per nulla! Stando a questi risultati, Gianni e Luigi sono inconfrontabili. Si può ricorrere alla somma dei voti, ma si tratta di un metodo brutale che, alla fine, dice poco sulla personalità degli allievi. Dal punto di vista educativo forse una situazione auspicabile potrebbe essere quella in cui ciascun allievo raggiungesse l'eccellenza in almeno una materia o attività libera ... Se invece confrontiamo Gianni con Pietro che ha riportato 7 in matematica e 7 in italiano, possiamo dire che Gianni è stato piú bravo di Pietro perché in una materia i due allievi sono alla pari e nell'altra Gianni supera Pietro. In questo caso dunque il confronto porta ad una relazione di ordine soltanto fra alcuni elementi di un insieme. Una relazione di ordine che non consente di confrontare tutte le coppie di elementi dell'insieme in cui è posta si dice *relazione di ordine parziale*: essa verifica le proprietà **O1** e **O2**, ma non la **O3** (o le **o1** e **o2** piú la riflessiva, ma non la **o3**).

3.4 Le equazioni: alcune riflessioni sul metodo per risolverle

Un'*equazione* è una relazione di uguaglianza aperta cioè contenente una lettera (generalmente la lettera x). Si ammette che x rappresenti un elemento variabile in un certo insieme S, che in molti casi può essere sottinteso, (ad esempio: l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali relativi) e si pone il problema di individuare il sottoinsieme degli x per cui la relazione risulta vera (questi elementi vengono detti *soluzioni* o anche *radici* dell'equazione).

In certi casi, l'equazione risulta verificata da ogni x: si dice allora che essa è un'*identità* (le relazioni di uguaglianza **F1**, ..., **F9** del capitolo 1, che esprimono le proprietà formali delle operazioni $+, \cdot$, e anche la **2.3** e la **2.4** del capitolo 2, sono identità, perché sono sempre vere, qualunque siano i valori delle variabili).

Si incontrano svariati tipi di equazioni, in dipendenza dai vari tipi di operazioni che si impiegano nel formularle. Nel proseguimento degli studi parleremo di equazioni esponenziali, trigonometriche, forse anche di equazioni differenziali (queste ultime sono indubbiamente lo strumento teorico piú potente in tutta la scienza moderna) .... Ma alla base dell'idea di equazione, vi sono dei concetti di teoria degli insiemi e di logica a cui dobbiamo fare un cenno, in attesa di riprenderli con maggiore profondità in un modulo ad essi dedicato. È importante capire che le soluzioni di un'equazione dipendono non solo dall'equazione, ma anche dall'insieme in cui si cercano. Ad esempio l'equazione $x^2 = 4$ ha due soluzioni: $2, -2$ nell'insieme $\mathbb{Z}$ (degli interi relativi), mentre ha la sola soluzione 2 nell'insieme $\mathbb{N}$ (degli interi naturali).

Sappiamo già risolvere in pratica certe equazioni; è opportuno però esaminare un caso concreto per renderci conto di quello che facciamo. Vogliamo risolvere l'equazione:

$$5x + 2 = 8 \tag{3.1}$$

Cominciamo con l'aggiungere -2 ad ambo i membri. Se il primo e il secondo membro sono uguali, essi rimangono tali dopo che si è aggiunta ad essi una stessa quantità (per fissare le idee, possiamo pensare ad una bilancia in equilibrio: essa rimane in equilibrio dopo che si sono aggiunti pesi uguali ai due piatti). Si ricava allora:

$$5x + 2 + (-2) = 8 + (-2)$$

cioè:

$$5x = 6 \tag{3.2}$$

L'operazione fatta viene descritta volgarmente in questi termini: porto 2 dal primo al secondo membro cambiandolo di segno.

Ora moltiplichiamo ambo i membri per $\frac{1}{5}$ (che è il reciproco di 5):

$$\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{1}{5} \cdot 6$$

e, semplificando:

$$x = \frac{6}{5} \tag{3.3}$$

Dunque se x è un valore per cui è vera la **3.1**, per lo stesso x devono essere vere la **3.2** e la **3.3**. Allora, deve essere $x = \frac{6}{5}$. Ma siamo sicuri che per $x = \frac{6}{5}$ risulta vera la **3.1**, cioè che $\frac{6}{5}$ è anche soluzione (unica) della **3.1**? Certamente! Infatti, se è vera la **3.3** è vera anche la **3.2** che si può ottenere dalla **3.3** moltiplicando membro a membro per 5. E se è vera la **3.2** è vera anche la **3.1**, che si può ottenere da quella, aggiungendo ad ambo i membri 2.

Ricapitoliamo: le operazioni fatte per passare dalla **3.1** alla **3.3** sono state:

1. aggiungere ad ambo i membri -2 (opposto di 2);
2. moltiplicare ambo i membri per $\frac{1}{5}$ (reciproco di 5).

Possiamo allora ritornare indietro dalla **3.3** alla **3.1** compiendo le seguenti operazioni:

1. moltiplicare ambo i membri per 5;
2. aggiungere ad ambo i membri 2.

Dunque, la tecnica che seguiamo (tutte le volte che ci è possibile) per risolvere un'equazione è quella di ricavare una nuova equazione che sia verificata dagli stessi valori che verificano la prima, e solo da quelli. Si tratta di fare una catena piú o meno lunga di passaggi di questo tipo, finché non si trova una equazione le cui soluzioni sono evidenti.

Naturalmente, può accadere di trovare alla fine un'equazione che non ha soluzioni (in altre parole, l'insieme delle soluzioni può essere l'insieme vuoto). Consideriamo, ad esempio, l'equazione: $\frac{1}{2}(x + 6) = 5 + \frac{x}{2}$; si ricavano le equazioni equivalenti:

$$\frac{x}{2} + 3 = 5 + \frac{x}{2}$$
$$0 \cdot x = 5 - 3$$
$$0 = 2$$

Se ci fosse un valore di x per cui la nostra equazione è verificata, si avrebbe come conseguenza che $0 = 2$, ciò che non può essere. Dunque, la nostra equazione non ha alcuna soluzione.

Qui viene l'occasione di un discorso generale che si situa a livello logico. Molte affermazioni matematiche hanno questa forma:

Se accade una certa cosa A, allora accade anche un'altra cosa B (si dice anche che dall'ipotesi A segue la tesi B oppure che A implica B).

Ma occorre mettere bene in chiaro che non sempre si può rovesciare questo discorso, cioè, ammesso che A implichi B non sempre si può dire che se si verifica B si verifica anche A. Per fare un esempio semiserio: il discorso: "Se piove prendo l'ombrello" è accettabile mentre la frase: "Se prendo l'ombrello piove" lo è molto meno.

Facciamo qualche esempio piú preciso: L'affermazione: "se un numero è divisibile per 4, è pari" è corretta. L'affermazione "se un numero è pari, è divisibile per 4" è falsa. Ad esempio il numero 6 è pari, ma non è divisibile per 4.

Ancora: "se due numeri sono uguali, i loro quadrati sono uguali" è vera! L'affermazione "se i quadrati di due numeri sono uguali, i numeri sono uguali" è falsa, come si vede riflettendo che è $-3 \neq 3$, pur essendo $(-3)^2 = 3^2 = 9$ (l'affermazione diventa vera se ci si restringe ai numeri ≥ 0). Se si vuole ottenere un'equazione che abbia esattamente le stesse soluzioni dell'equazione assegnata, occorre compiere passaggi che si possono invertire (come appunto abbiamo fatto prima per risolvere la **3.4**).

Nel caso delle equazioni costruite con espressioni algebriche, si terranno presenti le seguenti regole che si deducono da quanto ora detto. Premettiamo una convenzione:

Diremo che due equazioni sono fra di loro *equivalenti* in S se hanno in S le stesse soluzioni.

1 Data nell'insieme S un'equazione, sommando a ciascun membro una stessa espressione algebrica definita in S, si ottiene un'equazione equivalente alla prima in S.

2 Data nell'insieme S un'equazione, moltiplicando ciascun membro per una stessa espressione algebrica definita in S e diversa da zero in ogni punto di S, si ottiene un'equazione equivalente alla prima in S.

NOTA Osserviamo infine che spesso conviene risolvere un'equazione, anziché in un insieme S, in un insieme più grande S'; infatti può accadere, ad esempio, che S' sia più ricco di proprietà algebriche rispetto ad S. Una volta fatto ciò, si devono escludere le soluzioni che appartengono ad S' ma non ad S. Questo procedimento si chiama *discussione*.
Una situazione ben nota è la seguente: si vuole risolvere un problema geometrico in cui l'incognita è la distanza fra due punti. Come è noto, la distanza è una quantità maggiore o uguale a zero, conviene però studiare la nostra equazione nell'insieme di tutti i numeri reali (di cui parleremo nel prossimo capitolo) e poi eliminare le soluzioni negative e le soluzioni che non verificano olte eventuali condizioni legate alla natura del problema.

Consideriamo ora l'equazione:

$$x = 3 \qquad \textbf{3.4}$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri; otteniamo:

$$x^2 = 9 \qquad \textbf{3.5}$$

La soluzione della **3.4** è certamente soluzione della **3.5** (perché, se due numeri sono uguali, i loro quadrati sono uguali). Ma la **3.5** ha come soluzioni 3, -3: la seconda non è una soluzione della **3.4**. Il fatto è appunto, che per passare dalla **3.4** alla **3.5** abbiamo compiuto un'operazione non reversibile.

Qualche volta, nel risolvere le equazioni, occorre compiere dei passaggi irreversibili (come elevare al quadrato ambo i membri): allora può accadere di introdurre soluzioni estranee. In questi casi, è necessario fare una verifica per eliminare le eventuali soluzioni estranee. Comunque, queste osservazioni ci torneranno utili solo più avanti, perché per ora ci occupiamo solo di equazioni che si possono risolvere con passaggi reversibili.

3.5 Le disequazioni: alcuni interessanti problemi

Una relazione formulata attraverso i simboli $<$ oppure $\leq$ e contenente una lettera (di solito x) si dice *disequazione*. Ad esempio:

$$3x \leq 10 - 2x \qquad \textbf{3.6}$$

intendendo che x sia preso in $\mathbb{Q}$. Il metodo che abbiamo usato per risolvere le equazioni si può applicare, nei suoi aspetti fondamentali, alle disequazioni. Anche in questo caso, se procediamo per passaggi reversibili, possiamo essere certi di ottenere nuove disequazioni che hanno esattamente le stesse soluzioni delle precedenti.

Vediamo, ad esempio, come si può risolvere la **3.6**. Aggiungendo $2x$ ad ambo i membri, si ottiene:

$$3x + 2x \leq 10$$

cioè:

$$5x \leq 10 \qquad \textbf{3.7}$$

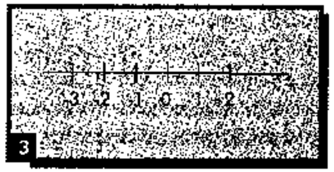
Questo passaggio si può, al solito, vedere come trasporto del termine $-2x$ dal secondo al primo membro, con cambiamento di segno. Moltiplicando membro a membro per il numero positivo $\frac{1}{5}$ (reciproco di 5), la disuguaglianza rimane nello stesso verso:

$$\frac{1}{5} \cdot 5x \leq \frac{1}{5} \cdot 10$$

cioè:

$$x \leq 2 \qquad \textbf{3.8}$$

È interessante rappresentare le soluzioni su una retta. L'insieme delle soluzioni è la semiretta $\{x : x \leq 2\}$:



Spesso è interessante cercare i numeri che soddisfano simultaneamente a due (o anche a piú di due) disuguaglianze (si parla allora di *sistema* di disequazioni; naturalmente, si parla, con significato analogo, anche di *sistema* di equazioni).

Consideriamo, ad esempio, il seguente sistema:

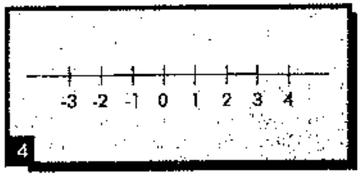
$$\begin{cases} 5x \leq 2x + 9 \\ 2x \leq 3x + 2 \end{cases}$$

Trasformiamo simultaneamente le due disequazioni, con le regole che abbiamo già precisato:

$$\begin{cases} 5x - 2x \leq 9 \\ 2x - 3x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \leq 9 \\ -x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Notiamo che, nella seconda disequazione abbiamo moltiplicato membro a membro per il numero negativo -1, e quindi abbiamo invertito il senso della disuguaglianza.

Concludendo, per essere una soluzione, il numero x deve soddisfare nello stesso tempo alle due condizioni $x \leq 3$ e $x \geq -2$. L'insieme delle soluzioni è dunque l'*intersezione* dell'insieme delle soluzioni della prima con l'insieme delle soluzioni della seconda: $\{x : x \leq 3\} \cap \{x : x \geq -2\}$ cioè l'insieme $\{x : -2 \leq x \leq 3\}$ che si può rappresentare così sulla retta:



4

I sistemi di disequazioni ci aiutano a risolvere disequazioni fratte e disequazioni dove l'incognita compare elevata ad un esponente maggiore di 1. Supponiamo ad esempio di dover risolvere la disequazione:

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \qquad \textbf{3.9}$$

Scomponiamo il trinomio a primo membro:

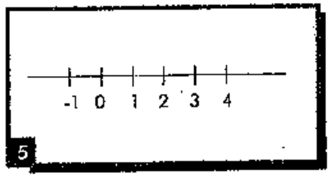
$$(x-1)(x-2) > 0$$

Il prodotto di due numeri relativi è positivo se e solo se i due fattori hanno lo stesso segno; ne segue che un qualsiasi numero razionale è soluzione di **3.9** se e solo se è soluzione di uno dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del primo sistema è $\{x : x > 2\}$; l'insieme delle soluzioni del secondo sistema è $\{x : x < 1\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione **3.9** è dunque l'unione dell'insieme delle soluzioni del primo sistema

con l'insieme delle soluzioni del secondo: $\{x : x > 2\} \cup \{x : x < 1\}$ che ha la seguente rappresentazione sulla retta:



5

Vi sono molti problemi pratici che si traducono in disequazioni. Ad esempio, risolviamo questo semplice quesito: io devo andare a fare una commissione in città; andando con la bicicletta mi muovo alla velocità di 20 km/h; andando in automobile mi muovo alla velocità di 40 km/h, ma devo impiegare 5 minuti per il parcheggio. Quale mezzo mi conviene usare?

Il bello di questo problemino è che c'è un'incognita nascosta, che occorre mettere in evidenza: infatti il buon senso ci dice che occorre tener conto della lunghezza del percorso (che indicheremo con x, in km).

Ora vogliamo scrivere una disequazione che esprima quando è piú conveniente l'automobile, cioè quando il tempo impiegato servendosi dell'automobile è minore: (attenzione: il tempo di 5 minuti, espresso in ore, diventa $\frac{1}{12}$):

$$\frac{x}{40} + \frac{1}{12} < \frac{x}{20}$$

Sia ha in successivi passaggi:

$$\frac{1}{12} < \frac{x}{20} - \frac{x}{40}$$

$$\frac{1}{12} < \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{40}\right)x$$

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{40}x$$

$$x > \frac{10}{3} = 3,333...$$

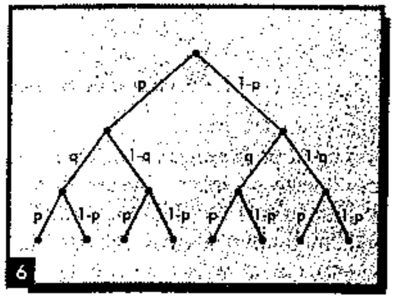
Dunque, l'automobile diventa conveniente solo per distanze superiori a 3,33... km.

Per concludere, vediamo un grazioso problema che si riduce ad un confronto di probabilità.

Le regole di un torneo di scacchi sono queste: un giocatore che aspira a qualificarsi gioca tre partite; per qualificarsi ne deve vincere almeno due consecutive. Ad un aspirante vengono contrapposti due avversari contro cui deve giocare alternativamente: uno (che indichiamo con A) è piú forte dell'altro (che indichiamo con B). L'aspirante può però scegliere l'avversario da cui cominciare: può scegliere perciò fra il programma ABA e il programma BAB. Quale dei due programmi gli conviene scegliere?

Indichiamo con p la probabilità di vincita contro A, indichiamo con q la probabilità di vincita contro B. L'ipotesi è $p < q$ (perché è piú difficile vincere contro A).

Tracciamo il grafo relativo allo schema ABA, in cui i rami che scendono verso sinistra rappresentano una vincita, quelli che scendono verso destra una sconfitta.



Segniamo con un tratto piú marcato i cammini che corrispondono ad un esito favorevole del torneo e sommiamo le relative probabilità. Ricaviamo:

$$p \cdot q \cdot p + p \cdot q \cdot (1-p) + (1-p) \cdot q \cdot p = p \cdot q \cdot (2-p)$$

Ora si tratta di fare la stessa cosa per lo schema BAB. Ma, senza bisogno di ripetere tutto il grafo, possiamo osservare che ora si tratta semplicemente di scambiare fra loro i giocatori A e B, e quindi scambiare fra loro le relative probabilità: p e q. Allora, la probabilità di esito favorevole del torneo nel caso BAB è data da $q \cdot p \cdot (2-q)$.

Il problema è quello di confrontare fra loro le due espressioni trovate:

$$p \cdot q \cdot (2-p) \; ? \; q \cdot p \cdot (2-q)$$

Mettiamo il punto interrogativo in luogo del segno < oppure > che dobbiamo determinare. Poiché i numeri p e q sono positivi, possiamo eliminare da entrambe le espressioni il fattore $p \cdot q$ otteniamo cosí:

$$2-p \; ? \; 2-q$$

Possiamo anche togliere l'addendo 2 da ambo i membri:

$$-p \; ? \; -q$$

A questo punto è chiaro che, essendo $p < q$, si ha:

$$-p > -q$$

e quindi è vero che:

$$p \cdot q \cdot (2-p) > p \cdot q \cdot (2-q)$$

Concludendo, conviene lo schema ABA; occorre notare che in questo caso l'aspirante deve combattere due volte su tre contro l'avversario piú forte, ma l'avversario piú debole si trova in posizione intermedia, e questa circostanza compensa lo svantaggio.

VOCABOLI E SIMBOLI

- Proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva
- Relazione di equivalenza (~)
- Relazione di uguaglianza (=)
- Relazioni di ordine nell'insieme $\mathbb{Q}$ ($<$, $\leq$)
- Intervallo $[a, b]$, $(a, b[$, $]a, b]$, (a, b)
- Equazioni
- Identità
- Soluzioni, radici
- Disequazioni
- Sistemi (di equazioni e di disequazioni)
- A implica B
- Ipotesi, tesi

ESERCIZI

Paragrafo 3.1

(1) Guardando la carta geografica, fare l'elenco degli stati dell'Europa che hanno adottato l'euro, quindi rappresentare con un grafico la relazione lo stato x confina con lo stato y.

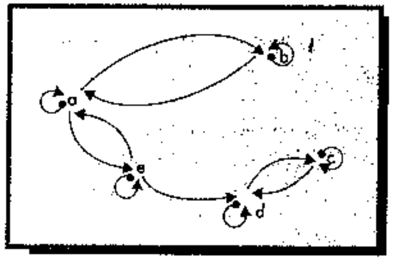
(2) Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ rappresentare con un diagramma cartesiano la relazione R stabilita fra gli elementi di A: "x è divisore di y". Quali osservazioni si possono fare sul diagramma?

(3) Otto quadretti A, B, C, D, E, F, G, H, hanno rispettivamente le dimensioni che, espresse in decimetri, sono quelle indicate nella seguente tabella:

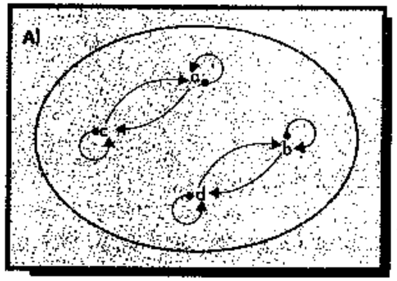
QUADRETTO	A	B	C	D	E	F	G	H
BASE	3,0	3,2	3,5	1,9	2,0	5,5	2,8	4,4
ALTEZZA	6,0	3,2	14	3,6	8,0	11,0	2,8	17,6

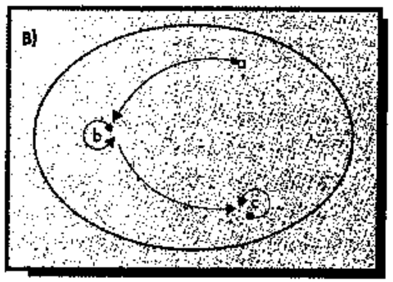
considerare in questo insieme la relazione: "il rapporto fra le dimensioni del quadretto x è uguale a quello fra le dimensioni del quadretto y".
Costruire il grafico della relazione. È possibile raggruppare i quadretti utilizzando la relazione data? Che tipo di relazione è? Motivare le risposte.

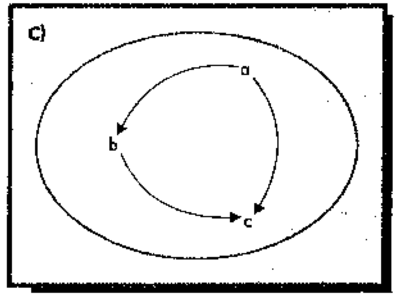
(4) Nella seguente rappresentazione la freccia indica che l'elemento da cui essa parte è in relazione con l'elemento a cui essa arriva. Rappresentare mediante una tabella questa relazione ed elencarne le proprietà.



(5) Determinare le proprietà delle relazioni definite dai seguenti grafi:







NOTA Una relazione R gode della proprietà riflessiva su un insieme A se ogni elemento di A è in relazione con se stesso; se in A esiste anche solo un elemento che non è in relazione con se stesso, la relazione non è riflessiva. La relazione definita dal diagramma della figura B sulla sinstra non è riflessiva perché l'elemento a non è in relazione con se stesso. Se capita che nessun elemento di A sia in relazione con se stesso, diremo che la relazione è antiriflessiva; nel diagramma della figura Cè rappresentata una relazione antiriflessiva. È chiaro che ogni relazione antiriflessiva è non riflessiva, ma non è vero il contrario.

(6) Siano date in $\mathbb{N}$ le seguenti relazioni:

a xRy se e solo se $xy = 36$

b xSy se e solo se $x + y =$ pari

c xTy se e solo se $x + y =$ dispari

d xMy se e solo se $x + y$ è multiplo di 10

e xLy se e solo se xy è multiplo di 5

Per ciascuna delle relazioni decidere se essa è riflessiva, antiriflessiva, simmetrica, transitivà. Giustificare le risposte.

(7) Sia data in $\mathbb{N}$ la relazione seguente: xRy se e solo se il resto di x nella divisione per 5 è uguale al resto di y nella divisione per 5. Ad esempio: $12\ R\ 27$ perché 12 e 27 divisi per 5 danno 2 come resto, così 38 e 43 … Determinare se la relazione è di equivalenza e, in caso affermativo, definire le classi di equivalenza.

(8) Sia data in $\mathbb{Z} - \{0\}$ la relazione R seguente: xRy se e solo se $x \cdot y$ è positivo.

a Indicare tre coppie di numeri che soddisfano la relazione e tre che non la soddisfano.

b La relazione è di equivalenza? Giustificare la risposta.

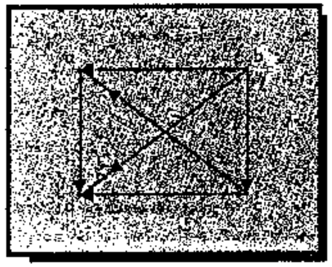
(9) Individuare le proprietà delle seguenti relazioni:

a xRy se e solo se $x + y = 100$ nell'insieme dei numeri naturali;

b xRy se e solo se $y = 2x$ nell'insieme dei numeri naturali.

(38) Determinare se ciascuna delle seguenti relazioni è di ordine e, in caso affermativo, stabilire se l'ordine è parziale o totale.

- **a** $(a,b)R(c,d)$ se e solo se $a < c$ nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie ordinate di numeri naturali.
- **b** xRy se e solo se $y = x + 1$ nell'insieme dei numeri naturali.
- **c** R definita dal seguente grafo nell'insieme $A = \{a, b, c, d\}$:



Paragrafo 3.4

Risolvere le seguenti equazioni:

(39) $2x - 9 + 8x = 5x + 6$

(40) $3 \cdot (x-2) - 1 = 2 \cdot (4 - x)$

(41) $5x - 7 \cdot (2 - x) + 11 = 4x - 3 \cdot (5 - 3x)$

(42) $(x+3) \cdot (2x-3) - 6x = (x-4) \cdot (2x+4) + 12$

(43) $\frac{x}{2} + 3 = x - \frac{x}{3}$

(44) $\frac{1}{4} \cdot \left(2x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(2x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$

(45) $\frac{x-1}{5} + \frac{x-9}{2} = 3$

(46) $\dfrac{x - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + \dfrac{x - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{20} = \dfrac{x + \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$

(47) $2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2}$

(48) $\left[3x - \frac{x}{2} - 1 - 2 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{4} \cdot \left(3x - \frac{11}{3}\right)$

(49) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(x + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{2}\left(x + \frac{3}{4}\right) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)$

(50) $\dfrac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} - \dfrac{x + \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} + \dfrac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = \dfrac{2\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}$

(51) Nell'equazione $\frac{2}{5}x + a = \frac{1}{2}a + \frac{3x - a}{3}$ voglio che $x = 2$ sia una soluzione. Come devo prendere a?

ATTENZIONE Non è detto che in un'equazione l'incognita debba essere sempre chiamata x ... L'abito non fa il monaco!

ESERCIZIO SVOLTO

(52) **Risolvere l'equazione $ax(a+1) + 3(1+x) = 3x(a+2) + a$ discutendo per quali valori di a l'equazione ha soluzione.**

Svolgiamo i prodotti presenti ai due membri dell'equazione; si ottiene:

$$a^2x + ax + 3 - 3x = 3ax + 6x + a$$

Portiamo i termini che contengono l'incognita a primo membro e gli altri a secondo membro e sommiamo i termini simili, otteniamo:

$$a^2x - 2ax + 3x = a - 3$$

Raccogliamo a fattor comune l'incognita x:

$$(a^2 - 2a - 3)x = a - 3$$

Il coefficiente dell'incognita è $a^2 - 2a - 3$ che può essere scritto come prodotto dei fattori:

$$(a-3) \cdot (a+1)$$

A seconda del valore di a si hanno diverse situazioni:

- **a** se $a = 3$, sostituendo nell'equazione si ottiene $0 \cdot x = 0$ ovvero l'equazione è una identità;
- **b** se $a = -1$ si ha $0 \cdot x = -4$ e poiché non esistono numeri razionali che moltiplicati per 0 danno come risultato -4, l'equazione è impossibile;
- **c** se $a \neq 3$ e $a \neq -1$ l'equazione ha una ed una sola soluzione; infatti, moltiplicando entrambi i membri per il reciproco di $(a-3) \cdot (a+1)$, si ha:

$$x = \frac{a-3}{(a-3)(a+1)} = \frac{1}{a+1}$$

Discutere per quali valori del parametro (o dei parametri) esistono soluzioni e risolvere le seguenti equazioni:

(53) $3b - 7 = \frac{b - x}{3}(b - 3) + x + 5$

54 $(x+1)(x+2)-(x-a)^2+1=a(a+1)$

55 $\frac{a(2-x)}{a^2-1}+\frac{x}{a+1}=\frac{x-(a+1)}{1-a}$

56 $\frac{bx-a}{a+b}-\frac{ax+b}{a-b}=0$

57 $\frac{5(a+x)}{2a}-\frac{4(b+x)}{3b}=\frac{5b}{a}+\frac{6b-4a}{b}$

58 Data l'equazione:

$$3(ax+1)-a=5a$$

per quali valori di a l'equazione ha soluzione? Come deve essere scelto a affinché sia $x=2$?

59 Quale valore si deve attribuire alla lettera b perché l'equazione

$$(x-2b)^2+(bx+1)(x+2)+4x=0$$

risulti di primo grado in x?

ESERCIZIO SVOLTO

60 Risolvere l'equazione:

$$\frac{2x-1}{x+2}-\frac{2x+1}{x-2}=\frac{3x+26}{x^2-4}$$

Una frazione è definita se il denominatore è diverso da 0, dobbiamo pertanto imporre: $x+2\neq 0$, ovvero $x\neq -2$, $x-2\neq 0$, ovvero $x\neq 2$, $x^2-4\neq 0$: scomponendo il polinomio a primo membro e ricordando che il prodotto di due numeri è diverso da 0 se e solo se entrambi i fattori sono diversi da 0, si ottiene: $(x-2)\cdot(x+2)\neq 0$ cioè: $x\neq 2$ e $x\neq -2$. L'equazione risulta così definita nell'insieme $\mathbb{Q}-\{2,-2\}$. In questo insieme cercheremo le soluzioni dell'equazione. Riduciamo tutte le frazioni allo stesso denominatore:

$$\frac{(2x-1)(x-2)-(2x+1)(x+2)}{(x-2)(x-2)}=\frac{3x+26}{x^2-4}$$

Moltiplichiamo i due membri per il denominatore comune e semplifichiamo:

$$(2x-1)(x-2)-(2x+1)(x+2)=3x+26$$

Eseguiamo i prodotti, portiamo i termini contenenti l'incognita a primo membro, gli altri a secondo membro, sommiamo i termini simili:

$$-13x=26$$

cioè $x=-2$.

La soluzione che abbiamo trovato non è accettabile poiché non appartiene all'insieme su cui è definita l'equazione.

Risolvere le seguenti equazioni:

61 $\frac{x^2+x+3}{x^2+2x+1}-\frac{2}{x+1}=1$

62 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2+x-2}$

63 $\frac{3x-1}{x^2-4x+4}-\frac{3}{x-2}=\frac{1}{(x-2)^3}$

Risolvere le seguenti equazioni discutendo per quali valori dei parametri a, b non ci sono soluzioni:

64 $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}-\frac{1}{x-a}=2$

65 $\frac{1}{a+b}-\frac{b\cdot(x-b)}{ax+bx}=\frac{1}{x}-\frac{a}{ab+b^2}$

66 $\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{a}{x}}+\frac{a+b}{\frac{ab}{x}}=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{b}{x}}.$

67 Due numeri consecutivi sono tali che aggiungendo al minore il doppio del maggiore e dividendo per 2 si ottiene 19. Quali sono?

68 Il triplo del maggiore di due numeri è il quadruplo del minore e la differenza fra i due numeri è 8. Qual è il numero maggiore?

69 La differenza dei quadrati di due numeri consecutivi è 63. Trovare i due numeri.

70 La somma delle cifre di un numero di due cifre è 12. Il numero che si ottiene scambiando le cifre è uguale a 15 piú il doppio del precedente. Qual è il numero?

71 Esistono tre numeri interi consecutivi tali che il cubo del terzo sia uguale alla somma del cubo del primo e del sestuplo del quadrato del secondo?

72 In un numero di 2 cifre, la cifra delle decine supera di due quella delle unità mentre la somma vale 6; quale è il numero?

73 L'area di un quadrato è 144 cm^2; condurre una corda parallela ad un lato in modo che il quadrato venga diviso in due parti, una $\frac{1}{6}$ dell'altra.

74 Lo spigolo di un cubo viene incrementato del 50%. Determinare l'incremento percentuale dell'area della superficie del cubo.