G. Prodi - N. Tani
Scoprire la matematica - Introduzione all'algebra
Ghisetti e Corvi 2003

CAPITOLO 2

CALCOLI ED ESPRESSIONI

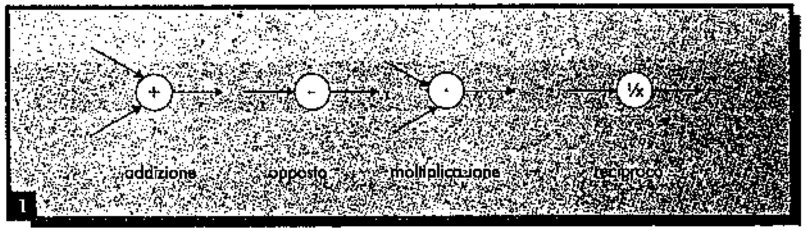
OBIETTIVI

- Introdurre grafi di calcolo ed espressioni.
- Elaborare le espressioni.
- Definire i monomi ed i polinomi.
- Presentare i prodotti notevoli quali strumenti per sviluppare o fattorizzare espressioni.
- Definire le potenze con esponente intero positivo, negativo o nullo.
- Dimostrare le proprietà delle potenze introdotte nel capitolo.

2.1 Costruzione delle espressioni

Nella lezione precedente abbiamo introdotto l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali relativi e le operazioni di addizione, di opposto, di moltiplicazione e di reciproco. Queste operazioni verranno dette, d'ora in poi, *operazioni algebriche*. Capita molto spesso di svolgere calcoli complessi, che coinvolgono varie operazioni algebriche. Per descrivere il modo con cui esse sono collegate fra loro, è opportuno fare ancora ricorso ai grafi, ma con significato completamente diverso da quello assunto in altri punti del nostro itinerario matematico.

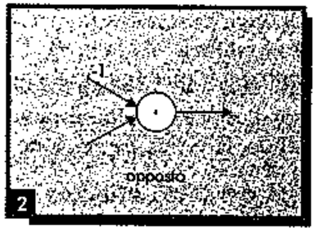
Pensiamo di avere a disposizione varie macchine che eseguono le singole operazioni algebriche.



1

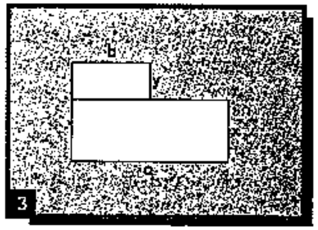
Le macchine dell'addizione e della moltiplicazione hanno due canali d'ingresso perché manipolano due numeri (che vengono detti, come si sa, addendi nel caso dell'addizione, fattori nel caso della moltiplicazione). Le altre due macchine hanno un solo canale d'ingresso perché manipolano un solo numero. Il canale d'uscita, che porta il risultato, è sempre uno solo.

Notiamo che la macchina di opposto può essere sostituita dalla macchina di moltiplicazione per il numero fisso -1.



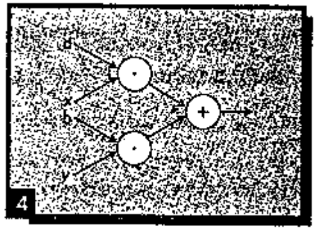
2

Vogliamo ad esempio costruire una macchina che ci fornisca l'area della figura qui disegnata, in cui sono indicate le misure dei lati del contorno:



3

Evidentemente, basta sommare le aree dei due rettangoli di cui essa è composta. Il seguente grafo è di per sé espressivo:



4

Un grafo di questo tipo verrà detto *grafo di calcolo*. Questi grafi, tuttavia, non sono comodi da scrivere: si preferisce descrivere un certo calcolo mediante un'espressione, cioè mediante una successione di segni scritti in fila, pressappoco come si fa nella scrittura ordinaria. Ad esempio, il risultato del calcolo ora descritto si può compendiare con l'espressione:

$$(a \cdot x) + (b \cdot y)$$

Le parentesi hanno un ruolo importante perché indicano le precedenze nell'esecuzione delle operazioni. L'uso delle parentesi può essere un po' limitato accettando questa convenzione: che il segno della moltiplicazione $\cdot$ lega di piú del segno di addizione $+$, ed anche del segno di sottrazione $-$, inteso naturalmente come segno di addizione dell'opposto. Quindi, l'espressione scritta sopra si può scrivere piú semplicemente così:

$$a \cdot x + b \cdot y$$

essendo sottinteso che le moltiplicazioni hanno la precedenza sull'addizione. Anzi, spesso si abolisce anche il puntino con cui si indica la moltiplicazione: in questo modo, la nostra espressione si può scrivere:

$$ax + by \qquad \mathbf{2.1}$$

Naturalmente, il puntino non verrà abolito quando possono sorgere equivoci nell'interpretazione: ad esempio, scriveremo $3 \cdot 2 = 6$, e non $32 = 6$.

Un'altra convenzione riguarda il prodotto di piú fattori uguali: come è noto, si scrive:

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}_{n-volte} = x^n$$

Il fatto che anche in matematica si fissino delle convenzioni non deve fare meraviglia: ogni linguaggio è basato su convenzioni e anche l'algebra è, in un certo senso, un linguaggio. Del resto, vedremo tra poco perché è ragionevole convenire di dare la precedenza alla moltiplicazione sull'addizione, e non viceversa.

Come abbiamo visto, le formule sono un complesso di segni scritti su un'unica fila: solo tenendo presente questa circostanza ha senso parlare, ad esempio, della proprietà commutativa di una certa operazione; perciò $a + b$ e $b + a$ non sono necessariamente uguali a priori, ma ha senso considerarli uguali per la proprietà commutativa. Vediamo ancora un esempio di calcolo algebrico che conduce ad un'espressione. Un automobilista compie un percorso di lunghezza a ad una velocità x e, successivamente, un percorso di lunghezza b ad una velocità y. Qual è la velocità media sull'intero percorso? Il tempo impiegato per compiere il primo percorso è $\frac{a}{x}$, il tempo impiegato per compiere il secondo percorso è $\frac{b}{y}$. Il tempo complessivo è $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$; poiché la lunghezza complessiva è $a + b$, la velocità media è data dall'espressione:

$$\frac{a+b}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}} \qquad \mathbf{2.2}$$

NOTA Per esercizio, fare il grafo di calcolo: è un po' complicato, ma non difficile.

2.2 Elaborazione delle espressioni - Polinomi

Una volta scritta una certa espressione, comincia una fase molto interessante che consiste nel trasformarla in modo che diventi piú semplice o, comunque, piú utile per gli scopi che ci proponiamo. Ricordiamo le nove proprietà delle operazioni algebriche che noi abbiamo esposto nel capitolo precedente: esse si traducono in altrettante relazioni di uguaglianza fra due espressioni. Naturalmente, anche per le espressioni, 0 è l'elemento neutro dell'addizione e 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione. Queste relazioni di uguaglianza ci dicono che sostituendo le lettere con numeri qualsiasi si ottengono valori uguali nel primo e nel secondo membro. Allora è possibile, con l'aiuto di queste nove relazioni, trasformare un'espressione in un'altra che assume lo stesso valore numerico, in una qualsiasi sostituzione delle lettere con numeri razionali relativi ...

Vediamo alcuni esempi:

1 $3 \cdot (2x + 3y) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3y = 6x + 9y$

Qui abbiamo applicato la proprietà distributiva, ed anche la proprietà associativa della moltiplicazione, nel passaggio: $3 \cdot (2x) = (3 \cdot 2)x = 6x$ e nell'altro passaggio analogo.

2 $a \cdot (2x + 3y) = a \cdot 2x + a \cdot 3y = 2ax + 3ay$

Qui abbiamo applicato anche la proprietà commutativa della moltiplicazione.

3 $3 \cdot (2x - 3y) = 3 \cdot [2x + (-3y)] = 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-3y) = 6x - 9y$

Qui occorre riflettere che $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

4 $(a + 2b)(c + 3d) = a(c + 3d) + 2b(c + 3d) = ac + a \cdot 3d + 2bc + 2b \cdot 3d = ac + 3ad + 2bc + 6bd$

Qui la proprietà distributiva è stata applicata due volte, e sono state applicate anche le proprietà associativa e commutativa.

Notiamo che in tutti questi casi l'espressione finale risulta priva di parentesi: infatti, la proprietà distributiva ci ha consentito di trasformare un'espressione costruita con addizioni e moltiplicazioni in una formula che risulta somma di prodotti, e che perciò si scrive senza parentesi, avendo noi convenuto che le moltiplicazioni si eseguono per prime. Quindi risulta ragionevole questa convenzione, che ci consente di scrivere l'espressione finale nel modo piú semplice possibile.

Definiamo ora un insieme di espressioni particolarmente importanti, i polinomi, al quale appartengono l'espressione **2.1** e quelle studiate negli esempi **1**, **2**, **3**, **4**.

Cominciamo a considerare le espressioni piú semplici possibili, costituite da un solo numero razionale relativo, oppure da una sola lettera, come $2, \frac{3}{5}, x, y, z, b, \dots$. Le espressioni di questo tipo si dicono *atomiche*. Ebbene, noi chiamiamo *polinomi in* $\mathbb{Q}$ le espressioni che si ottengono a partire dalle espressioni atomiche impiegando le sole operazioni di addizione e di moltiplicazione (l'operazione di opposto è automaticamente inclusa perché si può esprimere mediante la moltiplicazione per -1; non è invece ammessa l'operazione di reciproco). Le lettere che compaiono nell'espressione sono dette le *variabili* del polinomio.

È chiaro che, mediante successive applicazioni della proprietà distributiva, della proprietà associativa e commutativa dell'addizione e del-

la moltiplicazione, il polinomio si può scrivere come somma di prodotti di un numero razionale per alcune delle variabili (eventualmente ripetute e quindi scritte come potenze).
Ognuno di questi prodotti si dice *monomio*: il numero razionale si dice *coefficiente* e il prodotto delle variabili *parte letterale*.

Ad esempio, l'espressione:

$$(3x^2 + y) \cdot (x - z) + 2x^3$$

è un polinomio, essendo stata ottenuta dalle espressioni atomiche 3, 2, −1, x, y, z mediante le operazioni di addizione e di moltiplicazione. Il nostro polinomio si può trasformare così:

$$3x^2(x - z) + y(x - z) + 2x^3 = 3x^3 - 3x^2z + xy - yz + 2x^3 =$$
$$= 5x^3 - 3x^2z + xy - yz$$

I monomi di cui risulta composto il nostro polinomio sono: $5x^3$, $-3x^2z$, xy, $-yz$; e, nel monomio $-3x^2z$, -3 è il coefficiente mentre x^2z è la parte letterale. Naturalmente, $-yz$ si può pensare come $(-1)yz$.

Due monomi che contengono le stesse variabili elevate ciascuna allo stesso esponente ossia che hanno la stessa parte letterale si dicono *simili*; due monomi simili si possono sommare ottenendo un solo monomio. Ad esempio, nel calcolo ora eseguito, abbiamo compiuto il passaggio $3x^3 + 2x^3 = 5x^3$ (sempre valendoci della proprietà distributiva). Dall'esempio fatto risulta che ogni polinomio si può scrivere come somma di monomi tutti *dissimili* fra loro. Quando è scritto così, si dice che il polinomio è scritto in *forma canonica* (o *regolare*).
Definiamo il grado di un monomio come la somma degli esponenti delle sue variabili. Definiamo poi il grado di un polinomio (ridotto a *forma canonica*) il più grande fra i gradi dei suoi monomi.

Infine, è evidente che la somma ed il prodotto di due polinomi sono polinomi.

2.3 Prodotti notevoli

Eseguiamo ora alcuni calcoli particolarmente importanti. Cominciamo con l'espressione $(x + y)^2$ (*quadrato di binomio*).

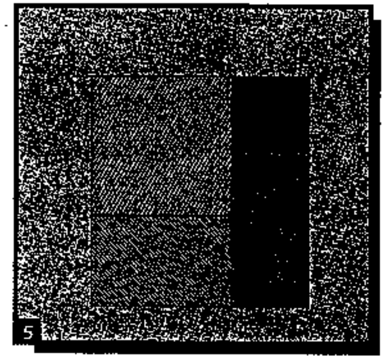
$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) =$
applicando la proprietà distributiva
$= x(x + y) + y(x + y) =$
applicando ancora la proprietà distributiva
$= xx + xy + yx + yy =$
applicando la proprietà commutativa: $xy = yx$
$= x^2 + xy + xy + y^2 =$

ancora per la proprietà distributiva:
$xy + xy = 1xy + 1xy = (1 + 1)xy = 2xy$
$= x^2 + 2xy + y^2$

Concludendo, otteniamo la relazione:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad 2.3$$

che viene detta *sviluppo del quadrato del binomio*.
Veniamo ora ad una interpretazione geometrica di questa relazione. Cerchiamo di esprimere l'area di un quadrato il cui lato misura $x + y$.



5

Evidentemente questo quadrato si può scomporre in quattro parti: un quadrato di lato x, un quadrato di lato y e due rettangoli di lati x ed y.
Notiamo però che nel nostro modello geometrico x ed y sono numeri razionali assoluti (o, se si vuole, numeri positivi) mentre la nostra relazione vale per x ed y qualunque (anche negativi, o di segno opposto fra loro).
Un altro sviluppo molto importante è il seguente. Consideriamo il polinomio $(x + y)(x - y)$; lo possiamo trasformare così:

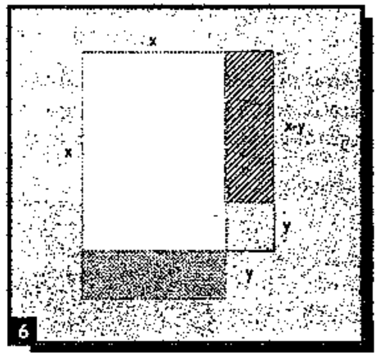
$(x + y)(x - y) =$
solita proprietà distributiva
$= x(x - y) + y(x - y) =$
ancora una volta la proprietà distributiva, più il fatto che $x(-y) = -xy$
$= x^2 - xy + yx - y^2 =$
applicando la proprietà commutativa
$= x^2 - xy + xy - y^2 =$
abbiamo notato che $-xy$ è l'opposto di xy
$= x^2 - y^2$

Dunque, possiamo concludere con la relazione:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \qquad 2.4$$

Vogliamo vedere che anche questa relazione si può interpretare geometricamente.

Il secondo membro, posto che sia $0 < y < x$, rappresenta l'area della figura ottenuta togliendo ad un quadrato di lato x un quadrato di lato y. Vediamo ora come questa figura si possa trasformare in un rettangolo avente la stessa area.



6

Tagliamo il rettangolo tratteggiato di lati y ed $x - y$ ed aggiungiamolo di sotto (diventa il rettangolo punteggiato nella figura). Otteniamo così un rettangolo, di lati $x + y$ ed $x - y$, che ha la stessa area della figura di prima. Quindi si ha:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Ripetiamo che la nostra interpretazione vale per $0 < y < x$, mentre la relazione **2.4** vale per x ed y arbitrari in $\mathbb{Q}$.

Le relazioni **2.3** e **2.4** sono i piú importanti *prodotti notevoli*. La loro portata viene accresciuta se si pensa che in luogo di x ed y si possono sostituire non solo numeri razionali arbitrari, ma anche espressioni arbitrarie! Naturalmente, occorrerà sostituire ad x una stessa espressione, ovunque x compare; analogamente per y.

Ad esempio, vogliamo calcolare:

$$(2a-b)^2$$

Prendiamo la relazione **2.3**: ad x sostituiamo $2a$ e ad y sostituiamo $-b = (-1)b$. Allora otteniamo:

$$(2a-b)^2 = 4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$$

Altro esempio: sviluppiamo $(a+b+c)^2$. Possiamo procedere al calcolo diretto così:

$$\begin{aligned}(a+b+c)\cdot(a+b+c) &= a\cdot(a+b+c) + b\cdot(a+b+c) + c\cdot(a+b+c) = \\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Ma si può anche usare lo sviluppo **2.3**, in questo modo:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [a+(b+c)]^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2\end{aligned}$$

arrivando (naturalmente) al medesimo risultato. Notiamo che la relazione **2.3** è stata impiegata due volte.

In molti degli esercizi che seguono, il lettore è invitato a calcolare un'espressione. Che significato diamo a questo termine? Calcolare significa trasformare un'espressione applicando le proprietà **F1**, ..., **F9**; ma ciò può essere fatto in diversi modi e con diversi scopi. Spesso si tratta di rendere, in qualche modo, piú semplice l'espressione (la valutazione del grado di semplicità di un'espressione è un po' soggettiva, ma in pratica risulta abbastanza spontanea).

Quando si tratta di un polinomio, spesso si sottintende che lo si vuole trasformare in somma di monomi (cioè in *forma canonica*); si parla allora di sviluppare l'espressione. Spesso però si deve procedere in senso inverso, cioè si deve trasformare l'espressione in un prodotto di espressioni: si dice allora che si vuole *fattorizzare* l'espressione. Osserviamo però che, mentre è sempre possibile sviluppare un polinomio, non sempre è possibile fattorizzarlo in modo significativo.

2.4 Alcuni esercizi aritmetici

I *prodotti notevoli* che abbiamo studiato si applicano molto bene a problemi di aritmetica e in particolare, a problemi di divisibilità. Consideriamo, ad esempio, la differenza fra i quadrati di due interi consecutivi:

$$\begin{aligned}1^2 - 0^2 &= 1 \\ 2^2 - 1^2 &= 3 \\ 3^2 - 2^2 &= 5 \\ 4^2 - 3^2 &= 7 \\ \ldots &= \ldots\end{aligned}$$

Notiamo che si ottiene la successione dei numeri dispari. Vogliamo trovare una relazione che ci dimostri questo in generale. Se un qualsiasi intero è rappresentato dalla lettera n, l'intero successivo è rappresentato da $n + 1$. Allora la differenza fra i due quadrati è data da:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

ma si potrebbe anche applicare il *prodotto notevole* **2.4**, scrivendo:

$$(n+1)^2 - n^2 = (n+1+n)\cdot(n+1-n) = (2n+1)\cdot 1 = 2n+1$$

Ora l'espressione $2n$, per $n = 0, 1, 2, \ldots$ ci fornisce tutti i numeri pari, mentre l'espressione $2n + 1$ ci fornisce tutti i numeri dispari.

Ora vogliamo dimostrare che ogni numero del tipo $n^3 - n$ con n intero, è divisibile per 6. Si tratta di fattorizzare la nostra espressione: $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = n \cdot (n+1) \cdot (n-1)$. Dunque la nostra espressione non è altro che il prodotto di tre interi consecutivi: $n - 1$, n, $n + 1$. Ma è evidente che, di tre interi consecutivi, uno è divisibile per 3 ed uno (o due) è divisibile per 2. Dunque il nostro numero è certamente divisibile per 6. Diamo ad n i valori 1, 2, 3, 4, per verifica: otteniamo i numeri 0, 6, 24, 60, che sono effettivamente divisibili per 6. Abbiamo visto che i numeri pari sono quelli che si possono rappresentare con l'espressione $2n$, mentre i numeri dispari sono quelli che si possono rappresentare con l'espressione $2n+1$, essendo n un intero. Possiamo allora dimostrare queste semplici affermazioni, che si intuiscono facilmente:

- la somma di due numeri dispari è un numero pari;
- la somma di un numero pari con un numero dispari è un numero dispari;
- la somma di due numeri pari è un numero pari;
- il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari;
- il prodotto di due numeri di cui uno è pari è pari.

Vediamo la dimostrazione della prima affermazione: i due numeri dispari possono essere scritti: $2n+1$, $2m+1$; sommiamoli:

$$(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(n+m+1)$$

Poichè $n+m+1$ è un intero, è chiaro che il numero ottenuto è pari. Lasciamo come esercizio al lettore di dimostrare le altre affermazioni.

A proposito di numeri pari e dispari, riportiamo il seguente grazioso rompicapo: ciascuna delle persone che hanno partecipato ad un ricevimento ha dato un certo numero di strette di mano. Dimostrare che il numero di quelli che ne hanno dato un numero dispari, è pari.

2.5 Espressioni fratte

Chiameremo espressioni fratte in $\mathbb{Q}$ quelle che si ottengono a partire dalle formule atomiche impiegando, oltre alle operazioni di addizione e di moltiplicazione, l'operazione di reciproco.

Ad esempio l'espressione **2.2** del paragrafo 2.1: $\dfrac{a+b}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}}$ è una espressione fratta.

Ricordiamo che abbiamo chiamato formule atomiche le formule che constano di un solo numero o di una sola lettera. Dunque anche 0 è una espressione atomica (*l'espressione nulla*); c'è allora da aspettarsi la seguente precisazione: l'operazione di reciproco non è definita per l'espressione nulla.

Indicheremo le espressioni con le lettere maiuscole in corsivo: A, B, C, ...; volendo essere piú precisi, indicheremo con $A(x)$ un'espressione che coinvolge la variabile x, con $C(x,y)$ un'espressione che coinvolge x e y ...

C'è ancora un aspetto piuttosto delicato da sottolineare. Consideriamo l'espressione:

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

naturalmente noi supponiamo che $B(x)$ non sia l'espressione nulla; questa cir-

costanza però non ci assicura che la nostra espressione sia calcolabile per ogni valore di x. Ad esempio l'espressione:

$$\frac{x}{x-1}$$

è senza dubbio accettabile (infatti $x-1$ non è l'espressione nulla), tuttavia il polinomio che si trova a denominatore, cioè $x-1$, si annulla per $x=1$ e dunque per tale valore la nostra espressione non è calcolabile. Quando si sostituiscono valori numerici alle variabili occorre pertanto sempre verificare che non si annullino le espressioni che si trovano a denominatore. L'espressione **2.2** è definita per $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \neq 0$.

Aggiungiamo qualche osservazione sulla notazione con cui si indica la divisione dell'espressione A per l'espressione B. Come abbiamo detto, tra le notazioni comuni vi sono le seguenti: A/B e $\frac{A}{B}$, esse sono fra loro equivalenti, tuttavia, in pratica, sono di impiego diverso e presentano vantaggi diversi: la prima ha un andamento grafico lineare, cioè consta di segni che si seguono in un'unica fila, come nella normale scrittura; la seconda ha maggiore evidenza ed è decisamente piú popolare. Quando adottiamo questa seconda forma, è la lunghezza della linea di frazione che ci dice come la formula deve essere spezzata in due sotto-formule, una al di sopra ed una al di sotto della linea di frazione, naturalmente i segni delle operazioni ed il segno di uguale dovranno essere allineati con tale linea.

Notiamo che quando scriviamo un testo di matematica al calcolatore e vogliamo scrivere le formule nel modo consueto, dobbiamo passare da una fila di segni (o, come si dice, da una *parola o stringa*), come è necessariamente l'insieme dei dati, alla struttura bidimensionale della formula.

C'è appena bisogno di notare che l'operazione di divisione non è commutativa (in generale non si possono scambiare tra loro il dividendo ed il divisore!) e neppure associativa infatti in generale:

$$(A/B)/C \neq A/(B/C)$$

dove $B \neq 0$ e $C \neq 0$. La diversa struttura delle due formule è messa bene in evidenza con il secondo tipo di notazione:

$$\frac{\frac{A}{B}}{C} \neq \frac{A}{\frac{B}{C}}$$

Il lettore è invitato a trovare dei contro-esempi, cioè dei casi in cui la proprietà associativa non vale. Nella nostra situazione si può benissimo procedere a casaccio, ma è ancora meglio se si riesce a dire con precisione in quali casi l'uguaglianza scritta vale e in quali non vale. L'uguaglianza vale se e solo se:

$$\frac{A}{BC}=\frac{AC}{B}$$

ovvero se:

$$AB=ABC^2$$

e poiché $B \neq 0$, si ha che necessariamente $A = 0$, oppure $C^2 = 1$, cioè $C = 1$ oppure $C = -1$. Il calcolo delle espressioni fratte si fa tenendo presenti le proprietà **F1**, ... , **F9** delle operazioni algebriche e, in particolare, le relazioni:

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC} (B \neq 0, C \neq 0)$$

$$\frac{1}{\frac{A}{B}} = \frac{B}{A} (A \neq 0, B \neq 0)$$

Ad esempio possiamo trasformare così la **2.2**:

$$\frac{a+b}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}} = \frac{a+b}{\frac{ay+bx}{xy}} = \frac{(a+b)xy}{ay+bx} = \frac{axy+bxy}{ay+bx}$$

Si capisce facilmente da questo esempio che ogni espressione fratta può essere trasformata nel quoziente di due polinomi (cioè nel prodotto di un polinomio per il reciproco di un altro). Se questi due polinomi sono scritti in forma canonica, allora si dice che l'espressione fratta è scritta in forma *canonica* (o *regolare*).

Soffermiamoci ancora su un esempio riguardante la somma di due espressioni fratte. Vogliamo mettere in forma canonica l'espressione:

$$\frac{a+b}{ab-b^2} - \frac{4a}{a^2-b^2}$$

Procedendo come nel calcolo delle frazioni numeriche, procuriamoci un denominatore comune che sia il meno complesso possibile: è opportuno, in primo luogo, fattorizzare i denominatori. Si ha:

$$ab - b^2 = b(a-b)$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Possiamo allora prendere come denominatore comune: $b(a-b)(a+b)$.

Il calcolo allora prosegue in questo modo:

$$\frac{a+b}{ab-b^2} - \frac{4a}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{b(a-b)(a+b)} =$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b(a-b)(a+b)} =$$

$$= \frac{(a-b)^2}{b(a-b)(a+b)} =$$

$$= \frac{a-b}{ab+b^2}$$

2.6 Proprietà delle potenze - Potenze con esponente negativo

Dedichiamo qualche parola alla terza notazione con cui si indica correntemente il reciproco di a, cioè a^{-1}. Questa notazione apparirà probabilmente come la più strana: essa è evidentemente legata alla nozione di esponente. Per comprenderne il senso occorre ripetere brevemente le proprietà delle potenze, avvertendo che il tema è di estrema importanza e richiederà perciò ulteriori approfondimenti nel proseguimento degli studi di matematica. Dunque, dato un numero a qualsiasi, che chiameremo *base*, definiamo la sua potenza n-esima (dove n è un numero intero positivo) così:

$$\begin{cases} n = 1 \ : \quad a^1 = a \\ n > 1 \ : \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \end{cases} \qquad \textbf{2.5}$$

prodotto di n fattori, ciascuno dei quali uguale ad a. Il numero n viene detto *esponente*.

La principale proprietà delle potenze è la seguente: se n ed m sono interi positivi, risulta:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \textbf{2.6}$$

La dimostrazione è semplice: basta pensare che il prodotto $a^n \cdot a^m$ si può vedere come un prodotto di $n + m$ fattori tutti uguali ad a.

Fino ad ora, la potenza a^n è definita solo per n intero positivo. Possiamo estendere la definizione ad altri numeri? Certamente! Il criterio che seguiremo (criterio che è stato seguito nel corso dei secoli dai matematici, in modo più o meno consapevole ...) è quello di conservare la validità della proprietà **2.6**. Ci domandiamo allora, anzitutto: come definire a^0? Supponiamo che sia $a \neq 0$, prendiamo m intero positivo qualsiasi e $n = 0$. Allora, poiché $m + 0 = m$, se vogliamo che valga la **2.6**, deve risultare:

$$a^m \cdot a^0 = a^m$$

perciò la scelta d'obbligo è $a^0 = 1$. Se $a = 0$ la **2.6** non dà alcuna informazione sul valore di a^0 (il prodotto di un qualsiasi numero per 0 è uguale a 0); in effetti, come vedremo più chiaramente in seguito, non si può attribuire alcun valore al simbolo 0^0.

Analogamente (supponendo sempre la base diversa da zero), come definire una potenza con un esponente negativo? Un qualsiasi intero negativo si può scrivere nella forma $-m$, dove m, il suo opposto, è un intero positivo. Se esigiamo che valga la **2.6**, deve essere allora, in particolare:

$$a^m \cdot a^{-m} = a^0 = 1$$

relazione che ha come conseguenza:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

In particolare, per $m = 1$, si deve porre:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

e così abbiamo giustificato la nuova notazione con cui indichiamo il reciproco.

Le considerazioni che abbiamo fatto sono così importanti, che siamo passati, quasi senza volerlo, da alcune notazioni elementari alle idee centrali della matematica. La definizione di una potenza con esponente negativo è certamente arbitraria: non la si può ottenere allargando semplicemente il senso della definizione originaria di potenza. Infatti, che senso avrebbe parlare di un numero nullo o negativo di fattori? Non c'è alcuna operazione spontanea che dia consistenza a queste operazioni. Allora quello che ci preme è di salvare la proprietà formale essenziale del concetto di potenza, cioè la **2.6**: se non avessimo questa proprietà, non sapremmo che farcene delle potenze.... In questa introduzione all'algebra per due volte, in passaggi delicati, ci siamo fatti guidare dall'esigenza di conservare le proprietà formali. La prima volta è stato nel paragrafo 1.3, a proposito della regola dei segni. Questo modo di ragionare non è semplice e noi avremo bisogno di continui richiami nel corso dei nostri studi ulteriori. La matematica ha progredito nel corso della sua lunga storia privilegiando sempre - in modo più o meno consapevole - le proprietà formali. Quando avremo capito completamente ciò, avremo imparato bene il mestiere di matematico....

VOCABOLI E SIMBOLI

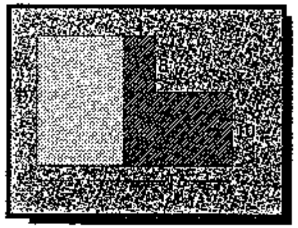
- addendi
- fattori
- operazioni algebriche
- grafo di calcolo
- espressione
- variabile
- polinomio
- monomio
- monomi simili
- espressione fratta
- fattorizzare
- forma canonica (o regolare)

ESERCIZI

Paragrafo 2.1

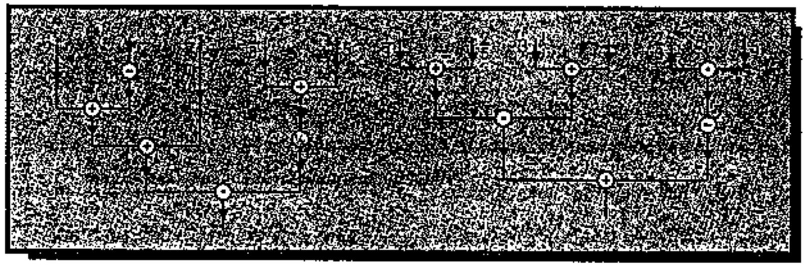
(1) Costruire il grafo di calcolo corrispondente a ciascuno dei due problemi che seguono:

a Calcolare il valore di x utilizzando i dati indicati in figura e sapendo che l'area del rettangolo punteggiato è uguale a quella della parte tratteggiata.



b Un'auto percorre un tratto AB di strada in 1,8 ore alla velocità di 75 km/h e il secondo tratto BC in 1,2 ore alla velocità di 60 km/h. Calcolare la velocità media dell'auto relativa all'intero percorso AC. Cosa si osserva?

(2) Scrivere l'espressione corrispondente a ciascuno dei grafi qui sotto disegnati e calcolarne il valore.



(3) Costruire il grafo corrispondente a ciascuna espressione e calcolarne il valore:

a $\left(3-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{17}{8}\right)$

b $\dfrac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{8}}{1+\frac{1}{2}}$

44 $x^2\left\{\left[6x^2y-3xy\left(2x-\frac{1}{3}y\right)\right]+y^2\right\}(x+2)-3xy^3\left(\frac{1}{3}xy+y\right)$

45 $(-2x+y)x+(x+2y)(x-2y)$

46 $(2y^2+3ay-7a^2)(-2y+a)+(a^2+2ay-y^2)(y-5a)$

47 $(x+y+z)y+(y+z-x)x-(x-y-z)z$

48 $3x(x-1)(x+2)+6x\{(x+1)(x+2)+(x-1)(x-2)\}$

49 $(a-1)^3+(2a+1)^3-9a(a^3+a+1)+2a^2$

50 $(x+1)(2x+1)-(-x+2)(x-3)$

51 $\left(\frac{1}{3}x-3\right)^3-\left(\frac{1}{3}x+3\right)^3-x(2x-1)^2$

52 $(x-2y)(x+2y)(-3x-y)(-3x+y)-(x^2-y^2-1)^2$

53 $\frac{2}{3}x(x-1)(x+1)+\frac{x}{6}\left[(x+1)^2+2\right]$

NOTA Le espressioni seguenti consentono, in genere, uno sviluppo intelligente mediante il riconoscimento di prodotti notevoli, ecc.

54 $(x-2y)^2-4(y-3x)(2y-x)+4(3x-y)^2$

55 $(2t-s)^2+(2t+s)^2+2(s+2t)(s-2t)$

56 $[(x^2-1)(x+1)-(x-1)(x^2+1)][(x-1)(x^2+1)-(x^2-1)(x+1)]$

57 $(a^3-1)(a^3+1)-(a^2-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

58 $(x^2-3)^2+4(x^2+3)^2-4(x^2+3)(x^2-3)$

59 $(a+a^2-a^3+a^4)(a+a^2+a^3-a^4)$

60 $(a^2-a)^2+6(a^2+a)(a^2-a)+9(a^2+a)^2$

61 $(x-3)^3(x+3)-(x-3)^2(x^2-9)$

62 $(a^2-2ab+b^2)(a+b)+(a+b)^2(a-b)$

63 $(y-1)^2(y+1)^2-(y^2+1)(y^2-1)$

64 $(a^3-x^3)(a-x)-(a^2+ax+x^2)(a-x)^2$

65 $(x+3)(x-3)-(x-3)(x+3)-(x-3)^2+(3-x)^2$

66 $(y-3)^2-(y+3)^2+(3y+1)^2-(3y-1)^2$

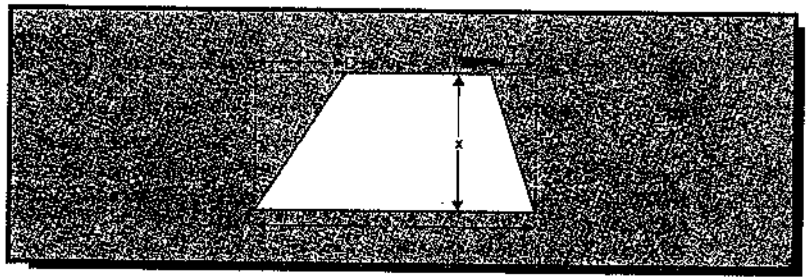
67 $(4x^2+y^2)^2-[(-2x+y)(2x+y)]^2-(-4xy-1)(-4xy+1)$

68 $(x-3)^2-(3-x)^2+(x+2y)^2-2(x^2-4y^2)+(x-2y)^2$

69 $(x-y+1)^2-2\left[(x-y)^2-1\right]+(x-y-1)^2$

70 $(x^2-3)^3+(3-x^2)^3+(x^2+3)(x^2-3)+9-x^4$

71 In un vecchio manuale si legge: "in un trapezio, la somma dei quadrati delle diagonali diminuita del doppio prodotto delle basi è uguale alla somma dei quadrati dei due lati non paralleli". Verificare questa proprietà per il trapezio *ABCD* indicato nella figura:



72 Un numero viene chiamato *quadrato perfetto* se è il quadrato di un numero naturale. Se x è un quadrato perfetto, qual è il quadrato perfetto immediatamente successivo?

73 Riconoscere che le seguenti espressioni sono il quadrato di una espressione (sono cioè *quadrati perfetti*):

a $a^4+4a^2b+4b^2$ **b** $x^2+10x+25$ **c** $x^2+\frac{1}{4}+x$

74 Mettere sotto forma di prodotti le seguenti espressioni:

a $ab^2-4ab+4a$ **b** $5a^2+10a+5$ **c** x^2-16
d $16b^2-a^2$ **e** $(a+2b)^2-4x^2$ **f** $16y^2-(x-2y)^2$

75 L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è di 50 metri e un cateto di 48 metri. Determinare l'altro cateto utilizzando, nel calcolo, i prodotti notevoli. Risolvere lo stesso problema nel caso che l'ipotenusa sia di 65 cm e il cateto di 60 cm.

76 Siano a e b due numeri qualunque. Verificare che:

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

Dedurne che, se almeno uno è diverso da 0, $a^2 + ab + b^2$ è sempre positivo.

77 Scrivere come somma di quadrati il polinomio $2x^2 + 2xy + 2y^2$.

78 Aggiungere alle seguenti espressioni un numero in modo che esse diventino un quadrato perfetto:

a $9a^4 + 6a^2$ **b** $\frac{1}{4}x^2 + 8x$ **c** $a^2 + a$

d $x^2y^4 + 2xy^2$ **e** $a^2 + \frac{1}{a^2}$

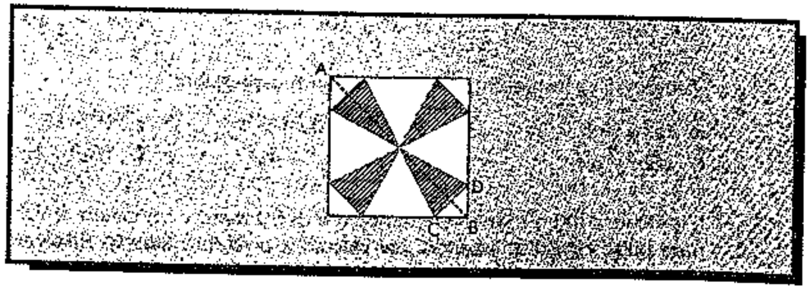
> **ATTENZIONE** L'ultimo esercizio è di carattere diverso dai precedenti e non ha un'unica soluzione. Qual è il termine del quadrato che manca?

79 Fra tutti i rettangoli di perimetro $2p$, qual è quello di area massima?

Indicare con x uno dei lati del rettangolo, aggiungere e togliere $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ all'espressione dell'area ... L'espressione $\frac{p^2}{4} - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$ assume valore massimo per ...

> **NOTA** La soluzione di questo problema può essere generalizzata: fra tutte le coppie di numeri razionali che hanno uguale somma, la coppia di numeri il cui prodotto è massimo è quella costituita da numeri uguali.

80 Calcolare l'area della figura tratteggiata inscritta nel quadrato, sapendo che la diagonale del quadrato misura a, che è $\overline{CD} = b$ e che la figura ha le simmetrie del quadrato. Come risulta dalla figura, il valore di b deve essere compreso fra 0 e $\frac{a}{2}$. Per b che va da 0 ad $\frac{a}{2}$ l'area cresce? Ha un massimo? Un minimo?



81 Riconoscere un fattore comune in ciascuna delle seguenti espressioni:

a $f(x) = (x+1)(x+2) - 5(x+2)$

b $g(x) = (2x+1)^2 + (2x+1)(x+3)$

c $h(x) = (x+6)(3x-5) + x + 6$

82 È stato possibile fattorizzare le seguenti espressioni algebriche:

a $a(x) = 2x(x-1) - (2+x)(x-1) + (2x-1)(x-1)$

b $b(x) = 2x(x+2) + 2x(2x-1) - 2x(x-1)$

c $c(x) = (x+2)(x-1) - 2x(x+2) - (x+2)(2x-1)$

d $d(x) = (x-1)(2x-1) - (2x-1)(x+2) + 2x(2x-1)$

I quattro risultati ottenuti sono stati indicati qui sotto, alla rinfusa e in modo incompleto:

$$2x(\ldots) \quad (x+2)(\ldots) \quad (2x-1)(\ldots) \quad (x-1)(\ldots)$$

Sostituire ai puntini le espressioni giuste.

83 Considerare l'espressione $E = a(a-3) + b(b+3) - 2ab$ con a e b interi.

a Trasformare E nel prodotto di due fattori uno dei quali è $b - a$.

b Dimostrare che se a e b sono due interi consecutivi con $a < b$, E è sempre uguale a 4.

84 Verificare che:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Esprimere a parole le uguaglianze ora considerate.

85 Verificare che, se $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 = 3$, allora $r^3 + \frac{1}{r^3} = 0$.

> **NOTA** La fattorizzazione è utile per rendere più espressiva o maneggevole una formula ed anche, come vedremo in seguito, quando si tratta di lavorare con le espressioni fratte.

Gli esercizi che seguono servono come allenamento ed è opportuno affrontarli a piccole dosi riprendendoli via via quando se ne presenti la necessità.

Fattorizzare le espressioni seguenti (è necessario talvolta prima sviluppare, poi ricomporre).

86 $y^5 + y^4 + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{3}y^2$

87 $bc(b+c) + ac(c-a) - ab(a+b)$

Sviluppando i prodotti si ottiene:

$$b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - a^2b - ab^2 = c(\ldots) - ab(\ldots) + c^2(\ldots) =$$
$$= (a+b)[\ldots] = (a+b)(b+c)(\ldots)$$

88 $(xu-yv)^2+(yu+xv)^2$

89 $2(a+b)^2-2(a-b)^2-(a+2b)^2$

90 $(x-2y)(x+2y)+(y-2x)(y+2x)-6xy$

91 a $a^3b^2+\frac{1}{2}a^6b^3+a^4b^4$ b $2x+2y+ax+ay$

92 a $4ab^2+4a^2+b^4$ b a^3-a

93 a $x+ax+bx-y-ay-by$ b $a^2b+16b-8ab$

94 a $2x^5-32x$ b $4a^2-1+2ab+b$ c $6x^4-12x^2+6$

95 a $y-x+ay-ax+by-bx$ b $xy^2+25x-10xy$ c $32a-2a^5$

96 a $4a^2-1+6a+3$ b a^8-b^8 c $x^{2n}-1$

97 a $a^{3n+2}-a^2$ b a^2-b^2+a+b c $a^2+b^2+a+b+2ab$

98 a $ab-3b-ac+3c$ b $(a-1)^2+2(a^2-1)+(a+1)^2$

99 a $2a^3-8a^2b+8ab^2$ b x^2-9b^2+x-3b c $x^2+y^2-2xy-x+y$

100 a $xy-5y-2x-10$ b $xy^2-4x^2y+4y^3$ c $(x+y)^2-x-y$

101 a $(x+y)^2-(y-1)^2$ b $(x+y)^3(x-y)-2xy(x+y)(x-y)$

102 a $(x+y)^2-4$ b x^3+x^2-x-1 c $(a-1)(x+2)-(a-1)^2$

103 a $(a-3)^2+12a$

Per fattorizzare un trinomio del tipo x^2+sx+p, dove s e p sono numeri naturali, si cercano due numeri α e β tali che sia $\alpha\beta=p$ e $\alpha+\beta=s$. Se questi due numeri esistono, allora:

$$x^2+sx+p=x^2+\alpha x+\beta x+\alpha\beta=x(x+\alpha)+\beta(x+\alpha)=(x+\alpha)(x+\beta)$$

104 a $a^2+7a+12$ b $a^2+8a+12$ c x^2+3x+2

105 a x^2+x-6 b $b^2+10-7b$ c t^4-5t^2+4

106 a $x^2-4ax+4a^2-b^2$ b $3x^2-3y^2+x-y$ c $x^4-x^2+\frac{1}{4}$

107 a $a^2-b^2+3a-3b$ b $y^2-y+\frac{1}{4}-b^2$ c $xy-y^2+3ax-3ay$

108 a $4y^2-8y+4$ b $\frac{1}{4}x^2-x+1$ c $25-(x-5)^2$

109 a $9x^2+4$ (attenzione) b $(b-3)x-by+bx-(b-3)y$
c $4-y^2+2ay-a^2$

110 a $10a^2-5a-5$ b $ax^2-2ax+a^2x^3$ c $(x+3)(x+2)-(x+3)(x-1)$

111 a $3x^4-9x^3+9x^2-3x$ b $4a^3x-4a^2x^2+4ax^3$

112 a $(x+y)^2-z^2$ b ax^2-a+bx^2-b c $a^6-2a^3b^2+b^4$

113 a $8x^2y^2-8$ b $a^3+2a^2b+ab^2$ c $x^3+6x^2+12x+8$

114 a $x^2+6x+9-4y^2$ b $7x^4-7$ c $3x-9x^2+a-3ax$

115 a $4a^2-4a+1$ b $xz^2-2xz+x^2z^3$ c $6x^2-24-x^5+4x^3$

116 a $4x^3y+32y^4$ b $a^2y^2-81b^2y^4$ c $\frac{1}{9}a^4+a^2b+\frac{9}{4}b^2$

117 a $(a-b)^3-a^2+ab$ b $2a^3-2ab^2$

118 a x^6+1-2x^3 b $ab^2-2ab^3+ab^4$ c $x^ny^n-y^n+ax^n-a$

119 Qual è la piú piccola soluzione dell'equazione:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$$

Fattorizzare il polinomio che si trova a primo membro ed applicare la legge di annullamento del prodotto

(120) Due numeri hanno somma e prodotto uguali a 1; quanto è la somma dei loro cubi?

(121) Dimostrare che non è possibile scrivere il polinomio x^2+1 come prodotto di due polinomi del tipo $(x+a)$, $(x+b)$.

Se $(x+a)(x+b)=x^2+1$, *ponendo* $x=-a$ *si ottiene:* $0\cdot(-a+b)=a^2+1$, *ovvero* $0=a^2+1$ *e questo è impossibile perché* $a^2\geq 0$.

Paragrafo 2.4

(122) Dimostrare la validità delle seguenti tavole di composizione relative alle operazioni di addizione e di moltiplicazione nell'insieme $\{P, D\}$, dove P è un numero pari e D è un numero dispari:

	P	D
	D	P

	P	P
	P	D

(123) Dimostrare che:

a la differenza fra i quadrati di due numeri interi consecutivi è uguale alla somma dei numeri stessi;

b la differenza fra i cubi di due numeri interi consecutivi è un numero dispari;

c se si sottrae 1 al quadrato di un numero naturale maggiore di 2 non si ottiene mai un numero primo.

(124) "La somma di tre numeri naturali consecutivi è 25". Dimostrare che questa affermazione è falsa, qualunque siano i numeri naturali scelti.

Ricordiamo che: nell'insieme $\mathbb{N}$ *si dice che* a *è divisibile per* b, *(si dice anche che* a *è multiplo di* b*) con* $b\neq 0$, *se esiste un numero naturale* q *tale che sia* $a=bq$.

(125) Dimostrare che la differenza fra i quadrati di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 8.

(126) Dimostrare che:

a il prodotto di due pari consecutivi è divisibile per 8;

b togliendo 3 dal prodotto di due interi dispari consecutivi si ottiene un multiplo di 4;

c la somma di quattro numeri dispari consecutivi è divisibile per 8;

d la somma di quattro numeri pari consecutivi è divisibile per 4;

e se n è un numero intero, diverso da 0 e da 1, allora il numero $n^2(n^4-1)$ è divisibile per 12.

(127) Detto S l'insieme di tutti i numeri che sono la somma dei quadrati di tre naturali consecutivi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessun elemento di S è divisibile per 2.

b Nessun elemento di S è divisibile per 3, ma alcuni sono divisibili per 11.

c Nessun numero appartenente a S è divisibile per 3 o per 5.

d Nessun elemento di S è divisibile per 3 o per 7.

e Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

(128) Dimostrare i seguenti criteri di divisibilità nell'ambito dei numeri naturali scritti in forma decimale:

a se il numero formato dalle ultime due cifre di un numero n è divisibile per 4, allora il numero è divisibile per 4;

b se la somma delle cifre di un numero n è divisibile per 3 o per 9, allora n è divisibile per 3 o per 9;

c se, per un numero n, la differenza tra il doppio della cifra delle unità e il numero formato dalle altre cifre è divisibile per 7, allora n è divisibile per 7;

d se, per un numero n, la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è divisibile per 11, allora n è divisibile per 11.

Nel corso delle dimostrazioni dei criteri, sarà utile sapere che:

- se in un prodotto ab uno dei numeri è divisibile per s, anche ab è divisibile per s: infatti se a è divisibile per s è: $a=s\cdot q$, perciò $ab=(s\cdot q)\cdot b=(q\cdot b)\cdot s$ con qb numero naturale (quali proprietà della moltiplicazione abbiamo usato?);
- se due numeri a e b sono divisibili per s, anche $a+b$ è divisibile per s: si ha $a=s\cdot p$ e $b=s\cdot q$; perciò $a+b=s\cdot p+s\cdot q=s\cdot(p+q)$ con $p+q$ numero naturale.

Le dimostrazioni dei criteri considerati richiedono un po' di accortezza nella manipolazione delle espressioni in modo da dar loro una forma significativa. Sarà necessario anche qualche artificio ... Sia, ad esempio, n un numero di 5 cifre dove a è la cifra delle unità, b la cifra delle decine, ... È allora:

$$n=10000e+1000d+100c+10b+a.$$

Qualche suggerimento per i problemi proposti:

a $n=[100(100e+10d+1c)]+(10b+a)$; il primo addendo è divisibile per 4, perciò se ...

b $n=(9999+1)e+(999+1)d+(99+1)c+(9+1)b+a=9999e+e+999d+d+99c+c+9b+b+a=[9(1111e+\ldots)]+(e+d+c+b+a)$, pertanto ...

c usando l'artificio di aggiungere e togliere da n il termine $20a$ si ottiene:
$n=10000e+1000d+100c+10b+a+20a-20a=10(1000e+100d+10c+b-2a)+21a$, ma $21a$ è divisibile per 7, pertanto: ...

d si osserva che il multiplo di 11 più vicino ad una potenza di 10 si ottiene da questa togliendo 1 se l'esponente della potenza è pari, aggiungendo 1 se l'esponente della potenza è dispari, conviene perciò scrivere:
$n=(9999+1)e+(1001-1)d+(99+1)c+(11-1)b+a=9999e+e+1001d+$

$-d+99c+c+11b-b+a=(9999e+1001d+99c+11b)+(e-d+c-b+a)$, ma il primo addendo della somma è divisibile per 11 perché ... Pertanto ...

129 Considerare un numero di tre cifre; sottrarre da esso il numero che si ottiene sommando la cifra delle unità con il numero formato dalle prime due cifre. Verificare che si ottiene sempre un numero divisibile per 9.

130 Dimostrare che:

a se un numero di sei cifre ha le prime tre cifre ordinatamente uguali alle altre tre, allora tale numero è divisibile per 7, per 11 e per 13;

b un numero di due cifre sommato al numero che si ottiene scambiando le sue cifre, dà come risultato un multiplo di 11;

c dimostrare che il numero 1331, in qualsiasi base di numerazione maggiore di 3, è sempre il cubo di un numero naturale.

(Se b è la base in cui viene scritto il numero, il valore di 1331 sarà:
$$1\times b^0+3\times b^1+3\times b^2+1\times b^3=(1+b)^3).$$

131 Il numero $(2^{48}-1)$ è divisibile per due numeri compresi tra 60 e 70. Quali?

Il numero $2^{48}-1$ si può vedere come una differenza di due quadrati, si può allora scomporre nel prodotto $(2^{24}+1)(2^{24}-1)$, ma $2^{24}-1$ è ancora una differenza di quadrati e si può di nuovo scomporre ...

Paragrafo 2.5

132 Le dimensioni di un rettangolo sono a e b. Esprimere il rapporto tra l'area del rettangolo e il quadrato del perimetro. Trovare i valori che questa espressione assume per:

a $a=b$ **b** $a=2b$ **c** $a=3b$

Che cosa si osserva? Quale congettura si può fare?

133 Dopo aver trovato la media tra 6 dati, uno studente distratto unisce questa media ai 6 numeri precedenti e trova la media tra questi. Calcolare il rapporto tra la vera media e quella trovata successivamente. E per un numero n qualsiasi di dati?

134 Un numero positivo è stato erroneamente diviso per 4 anziché moltiplicato per 4. Qual è in percentuale approssimata all'unità l'errore commesso rispetto alla risposta corretta? Calcolare l'errore commesso rispetto al risultato corretto nel caso generale, in cui un numero sia stato diviso per l'intero n anziché moltiplicato per n. Tale percentuale aumenta o diminuisce all'aumentare di n?

135 Siano a, b, c, d quattro numeri relativi diversi da zero. Quali delle seguenti uguaglianze sono errate e perché?

a $a\frac{b}{c}=\frac{ab}{ac}$ **b** $a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$ **c** $\frac{a+b}{b}=a$

d $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}b$ **e** $\frac{a+b}{b}=1+\frac{a}{b}$ **f** $a\cdot a=2a$

g $a+a=a^2$ **h** $a\cdot a=a^2$ **i** $\frac{a}{a}=0$

j $a+a=2a$ **k** $\frac{a}{a}=1$

136 Dimostrare che due frazioni aventi numeratore uguale a zero (e denominatore diverso da zero) sono equivalenti qualunque sia il valore dei loro denominatori.

137 Dimostrare che una frazione con numeratore uguale a zero non può essere equivalente ad una frazione con numeratore diverso da zero (i denominatori sono ovviamente diversi da zero).

Semplificare le frazioni algebriche seguenti.

138 **a** $\frac{ax}{bx}$ **b** $\frac{a+ax}{1+x}$ **c** $\frac{ax-bx}{ay-by}$ **d** $\frac{a^2}{a^2x+a^3y}$ **e** $\frac{3a}{3a+2a^2}$

139 **a** $\frac{9a^2+6ab+b^2}{6a+2b}$ **b** $\frac{a^2-2b^2}{a^4-4b^4}$ **c** $\frac{5-5b^2}{1-2b+b^2}$ **d** $\frac{6-6a^2}{12a^2-24a+12}$

140 **a** $\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$ **b** $\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{b^3-a^2b}$ **c** $\frac{x^2-x-2xy+2y}{x^2-2xy}$

141 Verificare che la frazione $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$ è riducibile a $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ indicando la condizione a cui a, b, c devono soddisfare affinché ciò sia possibile.

142 Siano a, b, c, d numeri razionali relativi diversi da zero. Dimostrare che:

a $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ se e solo se $a\cdot b=c\cdot d$.

Si tratta di dimostrare che la definizione di frazioni equivalenti, data nel paragrafo 1.2 si può estendere al caso in cui il numeratore e il denominatore delle frazioni sono numeri razionali.

b $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ se e solo se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. **c** $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ se e solo se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

143 Dimostrare che $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ se e solo se $\frac{(a+m)}{(b+n)}=\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ (con b, n, $b+n$ diversi da 0).

144 È giusta l'uguaglianza $\frac{a-3}{a+3}=\frac{-3}{3}=-1$?

145 Dati tre numeri interi consecutivi qualunque, esprimere il rapporto fra la differenza dei quadrati dei due estremi e il quadrato del numero di mezzo. Calcolare la differenza fra 1 e il rapporto considerato.

ESERCIZIO SVOLTO

(146) Dimostrare che se b è un numero razionale e $b \neq 0$ allora:

$$\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$$

Dobbiamo dimostrare che il reciproco dell'opposto di un numero diverso da zero è uguale all'opposto del reciproco del numero stesso: per l'unicità del reciproco è sufficiente provare che $-b.\left(-\frac{1}{b}\right) = 1$, ma l'opposto di un numero è uguale al prodotto del numero per -1, allora abbiamo:

$$-b\left(-\frac{1}{b}\right) = (-1)b(-1)\left(\frac{1}{b}\right) = (-1)(-1)\left(b\frac{1}{b}\right) = 1$$

(147) Siano a, b numeri razionali e sia $b \neq 0$, sia n naturale. Enunciare a parole quanto richiedono le uguaglianze seguenti ed eventualmente provare a darne dimostrazione.

a $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ **b** $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$ **c** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(148) Dimostrare che:

a $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab}$

b $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}$

c $\frac{b}{a^2+ab} - \frac{a}{ab+b^2} = \ldots = \frac{b^2-a^2}{ab(a+b)} = \ldots = \frac{b-a}{ab}$

d $\left(\frac{a^2-b^2}{a+b} - a\right) \cdot \frac{a+b}{b} = -b-a$

(149) Un rubinetto può riempire una vasca in x ore; un secondo rubinetto la può riempire in y ore. In quanto tempo la possono riempire insieme?

Se v è il volume della vasca, la portata del primo rubinetto è $\frac{v}{x}$, quella del secondo è …
La portata complessiva dei due rubinetti è allora … e il tempo necessario affinché i due rubinetti riempiano insieme la vasca è $\frac{v}{\frac{v}{x}+\ldots} = \ldots\ldots$

(150) Un sacchetto contiene r palline rosse e b palline bianche.

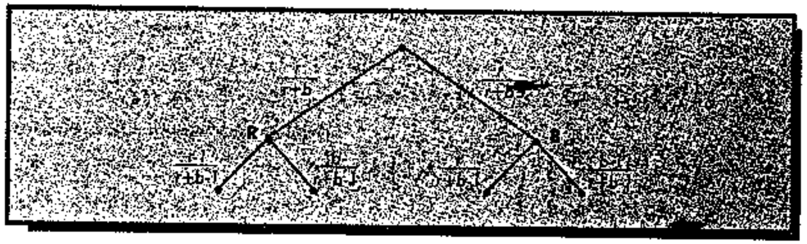
a Calcolare le probabilità dei vari esiti che si possono avere in due estrazioni successive senza restituzione. Verificare che la somma delle probabilità di tutti questi esiti è 1.

b Calcolare la probabilità di estrarre, senza restituzione, due palline dello stesso colore e, sempre senza restituzione, la probabilità di estrarre palline di colore diverso.

c Calcolare le probabilità richieste in (b) in una estrazione con restituzione.

d Calcolare la probabilità di estrarre contemporaneamente due palline di cui almeno una sia rossa.

Per l'estrazione senza restituzione può essere rappresentata da un grafo ad albero di questo tipo dove con R si è indicato l'evento "esce una pallina rossa" e con B l'evento "esce una pallina bianca". r indica il numero delle palline rosse, b il numero delle palline bianche.



Semplificare le espressioni seguenti.

(151) **a** $\dfrac{\frac{a^2c}{b}}{\frac{ab}{c^2}}$; **b** $\frac{a+2b}{2ab} - \frac{1}{a}$

(152) **a** $1 - \frac{x^2}{x^2+xy} + \frac{y^2}{xy+y^2} - \frac{y}{x+y}$; **b** $\frac{2x^2}{1+x} + 1 - x$

(153) **a** $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{ab}{a-b}$; **b** $\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$

(154) **a** $\frac{1}{a-1} - \frac{a}{a+1} + \frac{3a+2}{a^2-1}$; **b** $\left(\frac{a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}} + 1\right) \div \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a+1}{a}}}$

(155) **a** $\frac{1}{2h} \cdot \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x-h}\right)$; **b** $\frac{1}{h} \cdot \left((x+h)^2 - x^2\right)$

(156) **a** $\dfrac{\frac{a+by}{c+dy} - \frac{a+bx}{c+dx}}{\frac{a+b}{c+d} - \frac{a}{c}}$; **b** $\dfrac{1+\frac{a+8}{a+4}}{\frac{9+2a}{4a+a^2} - \frac{a-3}{a^2}} - \frac{a^2+4}{a+2}$

(157) **a** $\left(\frac{2x+1}{x^2-x} - \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right) \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^3+1}$; **b** $\left(x - \frac{x^2+y^2}{x-y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{x-y}{x+y}\right)$

(158) Risolvere l'equazione $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$.

Se $1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0$, *allora* $\frac{2}{x}=\ldots$

159 Determinare il valore di $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, sapendo che x e y sono numeri diversi da zero, tali che $x-y=xy$.

160 A che cosa è uguale l'espressione $\frac{P+Q}{P-Q}-\frac{P-Q}{P+Q}$ dove $P=x+y$ e $Q=x-y$?

Semplificare le espressioni seguenti.

161 $\left(\frac{x}{2x^2-4x+2}-\frac{1}{2x-2}\right)\cdot\left(\frac{x^2-4x+1}{x^2-1}+\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}\right)$

162 $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\div\frac{ab}{a-b}$

163 $\left[\left(x+y+\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)\div\left(x-y+\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)\right]\cdot\left(x-\frac{x^2}{x+y}\right)$

164 $\frac{1}{1+a}+\left(1+\frac{1}{a+a^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a-a^2}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{a^2+a+1}\right)+\frac{a^2}{a^2-1}$

165 $\left(a-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{b}\right)\div[(1+ab)\cdot(ab-1)]$

166 $\frac{x}{x-y}-\left(1-\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-y}-1\right)^3$

167 $\frac{(2x+1)^2-3x^2-2\cdot(5x-4)}{(2x+1)^2-(10-x)^2}$

168 $\frac{\frac{b^4}{a^2-2ab+b^2}-(a^2+2ab+b^2)}{\frac{ab}{a-b}+a}$

169 $\frac{\frac{a^2+b^2-2ab}{ab^2-a^2b}+\frac{a+b}{a^2-ab}}{\left(\frac{a+b}{b^2-ab}+\frac{4}{a-b}\right)\cdot(a+b)}$

Paragrafo 2.6

170 Sviluppare, indicando le proprietà applicate:

a $3a^2(a^3b)$ **b** $(a^2+b^2)(2ab)$ **c** $(3a^2b)^2$

d $\left(\frac{1}{3}a^2\right)^2(-2ab)$ **e** $(-3a^3b^2c)^2$ **f** $\left(\frac{1}{2}a^2\right)^3(2a^3)^2$

171 Inserire al posto dell'asterisco un opportuno monomio, in modo che le uguaglianze che seguono risultino vere per qualsiasi valore delle lettere:

a $-c^2\cdot * = c^4$ **b** $*\cdot(-m^3)=-m^7$ **c** $2y^4+*=-2y^4$

d $2n^2\cdot *=3n^2$ **e** $2n^2+*=2n^2$ **f** $3a^4b\cdot *=-3a^4b$

g $3a^4b+*=-\frac{3}{2}a^4b$ **h** $\frac{2}{3}x^2y-*=x^2y$ **i** $x^2+*=\frac{3}{2}x^2$

172 Calcolare il valore di:

a $(x^x)^{(x^x)}$ **b** $x^{[x^{(x^x)}]}$

per $x=2$

173 Completare le seguenti uguaglianze:

a $a^{2k}=(a^2)^{\cdots}$ **b** $a^{2k}=(a^k)^{\cdots}$ **c** $b^{mn}=(b^{\cdots})^{\cdots}$

d $a^{2k+1}=(a^k)^{\cdots}\cdot\ldots$ **e** $a^{m+3}=a^{\cdots}\cdot a^{\cdots}$ **f** $a^{1+k}=a\cdot\ldots$

g $(b^m+1)^2=\ldots$ **h** $a^{2k}+2a^kb+b^2=(\ldots)^2$ **i** $(2a+b^m)^2=\ldots$

j $(2a+b^m)^3=\ldots$ **k** $(a^m+b)(a^m-b)=\ldots$ **l** $a^{2k}-b^{2m}=(\ldots)(\ldots)$

m $9-a^{4m}=(\ldots)(\ldots)$

n $a^{2n+1}-a=\ldots\cdot a^{2n}-a=a[\ldots-\ldots]=a[(a^{\cdots})^2-\ldots]=a(\ldots+\ldots)(\ldots-\ldots)$

174 Fattorizzare l'espressione $a^{3n+2}-a^2$

175 Sapendo che $y=3^x+2^x$, calcolare y quando:

a $x=3$ **b** $x=-1$ **c** $x=-2$

176 Sapendo che a, b, $a+b$ sono diversi da zero, semplificare l'espressione:

$$(a+b)^{-1}(a^{-1}+b^{-1})$$

177 Se a, b, $3a+\frac{b}{3}$ sono diversi da zero, semplificare l'espressione:

$$\left(3a+\frac{b}{3}\right)^{-1}\left[(3a)^{-1}+\left(\frac{b}{3}\right)^{-1}\right]$$

Il risultato ottenuto nell'esercizio precedente può essere utile?

178 La frazione $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}}$ è uguale a:

a $a^{-6}-b^{-6}$ **b** $a^{-2}-b^{-2}$ **c** $a^{-2}+b^{-2}$

d a^2+b^2 **e** a^2-b^2

Quali condizioni devono essere soddisfatte da a e da b affinché la frazione abbia significato?

179 Semplificare:

a $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$ **b** $(a^{-1}-b^{-1})(b-a)^{-1}$ **c** $(1+a^{-1})^{-1}+(1+a)^{-1}$