Da G. Prodi e L. Prodi
VERSO L'INFINITO - Ghiselli e Corvi 2005

6.2 La costruzione dell'area

Il procedimento generale che seguiremo per introdurre l'area di un insieme del piano imita il modo con cui, disponendo di un foglio di carta millimetrata, si valuta l'area di una figura tracciata sul foglio stesso. Supponiamo che la figura rappresenti, in un'opportuna scala, un certo territorio, ad esempio un'isola. Supponiamo che, nella scala adottata, 1 km sia rappresentato da 1 cm.

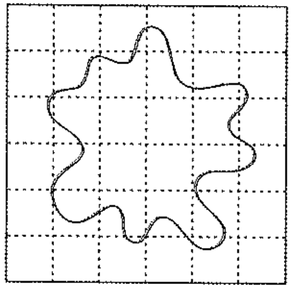

Fig. 1

Per avere una stima per difetto dell'area, in km^2, possiamo contare i quadrati di lato 1 cm contenuti completamente nella figura, per avere una stima per eccesso, possiamo contare i quadrati che hanno almeno un punto in comune con la figura (in altre parole, escludiamo i quadrati che rappresentano solo mare).
Fra i valori c'è una discrepanza piuttosto forte. Possiamo ottenere una migliore approssimazione contando i quadratini di lato 2,5 mm: quelli compresi nella figura e quelli aventi almeno un punto in comune con essa (avremo allora un valore per difetto e uno per eccesso dell'area in ettometri quadrati).

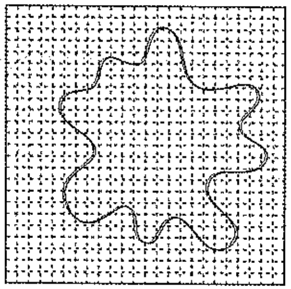

Fig. 2

Volendo avere un risultato ancora più preciso, possiamo pensare di suddividere ulteriormente ogni quadratino di lato 2,5 mm: la cosa risulta poco agevole sul piano pratico, ma teoricamente è possibile continuare a fare quadrettature sempre più fini, rendendo sempre più piccola la differenza fra l'area circoscritta e l'area inscritta.
Proviamo allora a definire in termini più precisi il procedimento di misura.

Quadrettature e pluriquadrati

Consideriamo anzitutto un riferimento cartesiano e tracciamo le rette parallele all'asse x di ordinata intera ($y = k$, con $k \in \mathbb{Z}$) e le rette parallele all'asse y di ascissa intera ($x = h$, con $h \in \mathbb{Z}$). Otteniamo così una quadrettatura, cioè una famiglia di quadrati, che indicheremo con ε_0; tutto il piano risulta ricoperto da questi quadrati.
Per poter far giocare in ε_0 la proprietà di additività è opportuno che ε_0 sia una *partizione* del piano, cioè che sia formata da quadrati fra loro disgiunti e ciò può avvenire se si stabilisce che da ogni quadratino venga tolta una parte della sua frontiera, e precisamente il lato destro e il lato superiore; così dei quattro vertici viene assegnato al quadratino solo quello in basso a sinistra. Se le coordinate di questo vertice sono (m, n), con m e n interi relativi, i punti del quadratino sono i punti $P \leftrightarrow (x, y)$ tali che:

$$m \leq x < m+1, \qquad n \leq y < n+1$$

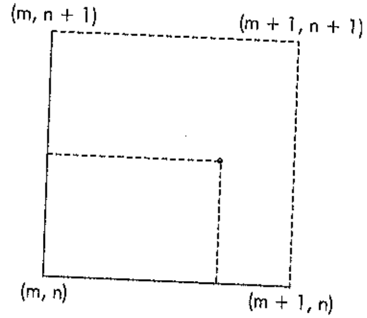

Fig. 3

Indichiamo con ε_1 la quadrettatura ottenuta suddividendo ogni lato dei quadratini di ε_0 in 10 parti uguali, mediante rette parallele agli assi (e considerando i quadratini sempre privi del loro lato destro e del loro lato superiore). I vertici dei quadratini di ε_1 avranno coordinate $\left(\frac{m}{10}, \frac{n}{10}\right)$, essendo m e n interi relativi; ogni quadrato di ε_0 risulta scomposto in 100 quadratini di ε_1. Così si può proseguire. Indicheremo con ε_k la quadrettatura costituita dai quadratini che hanno i vertici nei punti di coordinate $\left(\frac{m}{10^k}, \frac{n}{10^k}\right)$ con m e n interi relativi.

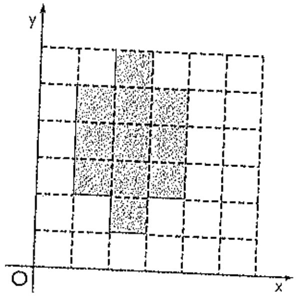

Fig. 4

Chiamiamo pluriquadrato una figura che sia unione di un numero finito di quadratini presi da una stessa quadrettatura ε_k.

Naturalmente, se un pluriquadrato è estratto da una quadrettatura ε_k, esso può pensarsi estratto anche da una quadrettatura più fine di ε_k, cioè da ogni ε_r, con $r > k$.

La famiglia dei pluriquadrati è di impiego particolarmente comodo: si verifica subito che l'unione, l'intersezione e la differenza di pluriquadrati sono ancora pluriquadrati. Basta prendere l'ovvia precauzione di considerare fra i pluriquadrati anche l'insieme vuoto (unione di una famiglia ...vuota di pluriquadrati).
Le quadrettature risultano comode in tante questioni pratiche: anche lo schermo della televisione è basato su una quadrettatura del campo visivo (con la complicazione ulteriore della varia intensità luminosa e del colore di ogni quadratino).
L'attribuzione dell'area ai quadratini è ovvia, se si tiene presente che per l'area devono valere le proprietà F1, F2, F3 ed F4. Posta uguale ad 1 l'area dei quadrati di ε_0, è chiaro che l'area di ciascun quadratino di ε_1 deve essere uguale a $\frac{1}{100}$ (ce ne sono 100 in ogni quadratino di ε_0, e devono avere tutti la stessa area, perché si ottengono l'uno dall'altro mediante una traslazione). Così proseguendo, si capisce che ogni quadratino di ε_k deve avere area $\frac{1}{10^{2k}}$. Rispettando l'additività, si deve dunque assegnare ad un pluriquadrato D estratto dalla quadrettatura ε_k l'area:

$$m(D) = \frac{r}{10^{2k}} \qquad \mathbf{3}$$

dove r è il numero dei quadratini che lo compongono. Naturalmente, se D viene considerato estratto da una quadrettatura più fine di ε_k, l'area che si attribuisce rimane la medesima.
La proprietà di additività nella famiglia dei pluriquadrati è ovvia: se due pluriquadrati D_1 e D_2 (che possiamo pensare estratti da una medesima quadrettatura ε_k) sono disgiunti, $D_1 \cup D_2$ è costituito da un numero di quadratini che è esattamente la somma di quelli di D_1 con quelli di D_2.
Dopo queste premesse, siamo in grado di introdurre un procedimento di misura di tipo generale.
Sia T un insieme *limitato* di $\mathbb{R}^2$ (ricordiamo che 'limitato' significa che è tutto contenuto in un disco – o, equivalentemente, in un quadrato – con centro nell'origine). Fissata la quadrettatura ε_k di tutto il piano, risultano fissati:

I il pluriquadrato più grande possibile, estratto da ε_k, tutto contenuto in T. Esso sarà formato da tutti i quadratini di ε_k che sono interamente contenuti in T; lo chiameremo *pluriquadrato* inscritto in T. Lo indicheremo con D'_k, e indicheremo con m'_k la sua misura. Nel caso in cui non vi sia alcun quadratino di ε_k tutto contenuto in T, D'_k è l'insieme vuoto e la sua misura è nulla.

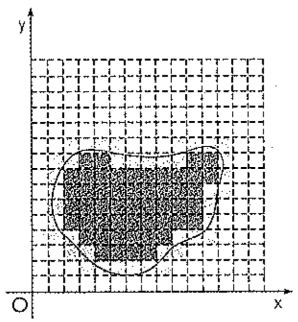

Fig. 5

II il pluriquadrato più piccolo possibile, estratto da ε_k, che contiene T. Esso è formato da tutti i quadratini di ε_k che contengono qualche punto di T. Poiché i quadratini di ε_k sono a due a due disgiunti, se vogliamo ricoprire T con un pluriquadrato, dobbiamo inserire in esso tutti i quadratini che contengono qualche punto di T. Indichiamo con D''_k il pluriquadrato circoscritto a T e con m''_k la sua misura.

Occorre tenere presente che, essendo T limitato, sia D'_k che D''_k sono composti da un numero finito di quadratini.
Notiamo ora che si ha $m'_k \leq m''_k$ (perché tutti i quadratini di D'_k fanno parte anche di D''_k); inoltre valgono le seguenti proprietà molto importanti:

- la successione m'_k è crescente al crescere di k (o, almeno, non decrescente): infatti, quando la quadrettatura si infittisce, il pluriquadrato inscritto in T resta tale e quale o si arricchisce di altri quadratini.
- la successione m''_k è decrescente al crescere di k (o, almeno, non crescente): infatti, quando la quadrettatura si infittisce, il pluriquadrato circoscritto a T resta tale e quale o perde qualche quadratino.

Ed ecco allora la fondamentale definizione:

Se le successioni m'_k e m''_k costituiscono una scatola cinese (in altre parole: se esse hanno anche la proprietà dell'avvicinamento indefinito, o contiguità) il numero reale che esse comprendono si dice *area* o, più generalmente, *misura* di T: $m(T)$ e l'insieme T si dice *misurabile* (o anche *quadrabile*).

Il termine 'misurabile' è generico, si riferisce a qualsiasi tipo di misura, mentre il termine 'quadrabile' si riferisce a quel particolare tipo di misura che è l'area.
Osserviamo che la successione m'_k, essendo non decrescente e limitata superiormente, tende all'estremo superiore dell'insieme $\{m'_k\}$, analogamente, la successione m''_k, essendo non crescente e limitata inferiormente, tende all'estremo inferiore dell'insieme $\{m''_k\}$; se l'insieme T è misurabile, il limite delle successioni è evidentemente il medesimo ed è $m(T)$. Dunque l'area può essere ottenuta anche con il procedimento di limite. Riflettiamo ancora sulla definizione che abbiamo dato: osserviamo che, volendo attribuire a T un'area, non abbiamo altra scelta. Infatti, essendo:

$$D'_k \subset T \subset D''_k$$

per la proprietà F2 dell'area (isotonia), la misura di T deve essere compresa, per ogni k, fra $m'_k = m(D'_k)$ e $m''_k = m(D''_k)$. Dunque, nel caso in cui $[m'_k, m''_k]$ sia una scatola cinese, non c'è altra scelta possibile; nel caso in cui $[m'_k, m''_k]$ non sia una scatola cinese, c'è tutto un intervallo di indeterminazione (fra l'estremo superiore di $\{m'_k\}$ e l'estremo inferiore di $\{m''_k\}$). Questa incertezza ci distoglie dall'attribuire una misura (area) a T. Ma possiamo trovare effettivamente esempi di insiemi non misurabili? Sia T l'insieme costituito dai punti del quadrato

$$0 \leq x < 1, \qquad 0 \leq y < 1$$

a coordinate razionali, cioè con x e y numeri razionali. Il quadrato formato da tutti i punti (x, y) con $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ è un elemento della quadrettatura ε_0. D'altra parte, tutti i quadratini in cui si spezza passando alla quadrettatura ε_1 e alle successive contengono sia punti di T, sia punti che non sono di T. Se ne conclude che, in questa caso, per ogni k si ha:

$$m'_k = 0, \qquad m''_k = 1$$

L'insieme che abbiamo preso in osservazione, quindi, risulta non misurabile. Abbiamo iniziato con l' esempio di un insieme non misurabile, ma ora dimostreremo che molte delle figure che già conosciamo sono misurabili e che la loro area ha il valore che ci è familiare fin dalle scuole medie. Cominciamo con il rettangolo, anzi, con il rettangolo avente i lati paralleli agli assi.

TEOREMA 1 **Un rettangolo con i lati paralleli agli assi è misurabile, e la sua area è uguale al prodotto delle lunghezze dei lati.**

Abbiamo parlato del rettangolo, senza precisare se in esso siano da includere i lati che lo limitano o no (o se siano da includere soltanto in parte); come vedremo nella dimostrazione, il risultato finale è il medesimo. Cominciamo la dimostrazione con un caso particolare: quello di un rettangolo $[a, b) \times [c, d)$, (con $a < b$, $c < d$), dove a, b, c, d sono numeri decimali finiti; si può dunque scrivere:

$$a = \frac{\alpha}{10^k}, \quad b = \frac{\beta}{10^k}, \quad c = \frac{\gamma}{10^k}, \quad d = \frac{\delta}{10^k}, \qquad \mathbf{4}$$

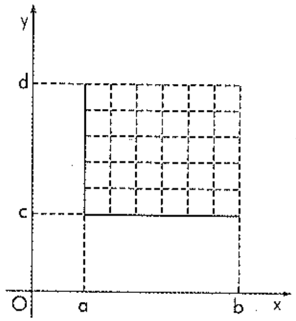

Fig. 6

dove k è un intero ≥ 0 e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi relativi. È evidente che in questo caso il rettangolo coincide con un pluriquadrato estratto dalla quadrettatura ε_k; i quadratini che lo compongono sono disposti secondo $(\beta - \alpha)$ colonne e $(\delta - \gamma)$ righe. In tutto, dunque, vi saranno $(\beta - \alpha)(\delta - \gamma)$ quadratini, ciascuno di area 10^{-2k}. In base alla definizione che abbiamo dato, l'area del rettangolo è data da $(\beta - \alpha)(\delta - \gamma)10^{-2k}$. Sostituendo ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i valori dati dalla **4**, si ottiene che l'area è:

$$(b - a) \cdot (c - d)$$

Fino a qui la dimostrazione, a parte la maggiore pignoleria, coincide con quella che si fa nella scuola elementare. Consideriamo ora un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, essendo a, b, c, d numeri reali qualsiasi, con $a < b$ e $c < d$. Fissato un intero $k > 0$, risultano determinati un pluriquadrato inscritto ed un pluriquadrato circoscritto estratti da ε_k. Si verifica subito che essi sono entrambi rettangoli (privi del lato destro e del lato superiore). Sia $[a'_k, b'_k] \times [c'_k, d'_k]$ il pluriquadrato inscritto.

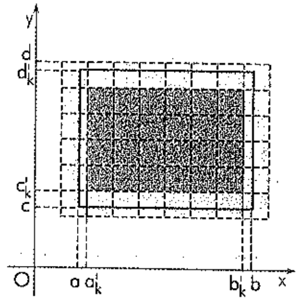

Fig. 7

Si ha:

$$\lim_{k\to\infty} a'_k = a, \quad \lim_{k\to\infty} b'_k = b, \quad \lim_{k\to\infty} c'_k = c, \quad \lim_{k\to\infty} d'_k = d$$

Infatti si ha:

$$a \leq a'_k < a + 10^{-k}, \qquad b \leq b'_k < b + 10^{-k},$$
$$c \leq c'_k < c + 10^{-k}, \qquad d \leq d'_k < d + 10^{-k}$$

Per quanto abbiamo dimostrato prima, l'area del pluriquadrato inscritto è $(b'_k - a'_k) \cdot (d'_k - c'_k)$. Al tendere di k all'infinito, questa successione tende a $(b - a) \cdot (c - d)$. Questo prova che il rettangolo è misurabile, ed ha per area $(b - a) \cdot (c - d)$.

Osservazione: questa formula ci dice, fra l'altro, che un rettangolo conserva la sua area quando viene sottoposto ad una traslazione.

Osservazione: se avessimo considerato un rettangolo privo del suo contorno, cioè $(a, b) \times (c, d)$, oppure un rettangolo privo del suo lato inferiore avremmo trovato lo stesso risultato.

Osservazione: il ragionamento fatto ci dice che un segmento parallelo all'asse x o all'asse y (che si può considerare come un rettangolo degenere, avente, cioè, un lato di lunghezza nulla) è misurabile ed ha area nulla.

Proprietà degli insiemi misurabili

Prima di procedere allo studio di altri casi particolari, è opportuno dimostrare un risultato di carattere generale: il teorema che segue ci dice che la famiglia di insiemi misurabili è *chiusa* rispetto alle operazioni di unione, intersezione e differenza.

TEOREMA 2 **Se A e B sono insiemi di $\mathbb{R}^2$ misurabili, anche $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ lo sono. Se, inoltre, A e B sono disgiunti, si ha:**

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad \mathbf{5}$$

Prima di affrontare la dimostrazione del teorema, riflettiamo ancora sulla definizione di insieme misurabile. La misurabilità consiste nel fatto che, indicando sempre con D''_k il pluriquadrato circoscritto ad un insieme T e con D'_k il pluriquadrato inscritto, estratti da ε_k, la differenza:

$$m(D''_k) - m(D'_k)$$

tende a zero al tendere di k all'infinito: ma questa differenza rappresenta la misura del pluriquadrato $D''_k \setminus D'_k$. Come si possono caratterizzare i quadratini di $D''_k \setminus D'_k$? Sono quadratini che contengono punti dell'insieme T, ma che non sono interamente contenuti in T; potremmo chiamarli quadratini *di confine*. Veniamo dunque alla dimostrazione del teorema, cominciando con il caso dell'unione. Le considerazioni che faremo potranno essere seguite più facilmente osservando la figura seguente:

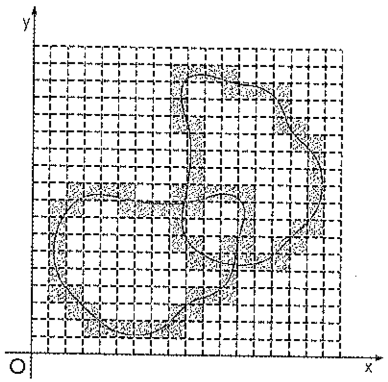

Fig. 8

Presa la quadrettatura ε_k, quali sono i quadratini di confine per $A \cup B$? Ciascuno di essi contiene punti di $A \cup B$ e punti che non sono di $A \cup B$, cioè punti che non sono né di A né di B. Allora, se esso contiene punti di A, lo ritroviamo fra i quadratini di confine di A; se contiene punti di B, lo ritroviamo fra i quadratini di confine di B. Naturalmente, un quadratino di confine di $A \cup B$ può essere simultaneamente di confine per A e per B. In conclusione il pluriquadrato di confine di $A \cup B$ è contenuto nell'unione del pluriquadrato di confine di A con il pluriquadrato di confine di B, ed ha area che non supera la somma delle aree di questi. Ma A e B sono misurabili per ipotesi: l'area del pluriquadrato di confine di A e l'area del pluriquadrato di confine di B tendono a zero; così, per quello che si è detto, anche l'area del pluriquadrato di confine di $A \cup B$, essendo maggiorata dalla somma delle aree dei due pluriquadrati di confine, tende a zero. Perciò $A \cup B$ è misurabile.
Dimostriamo ora la proprietà di additività dell'area. Siano A e B insiemi misurabili *disgiunti*. Sappiamo già che $A \cup B$ è misurabile, quindi, per calcolare l'area di $A \cup B$, non c'è che da prendere il limite dell'area del pluriquadrato estratto da ε_k inscritto in $A \cup B$, che indicheremo con D'_k. Vediamo come è fatto questo pluriquadrato; esso comprende:

- quadratini tutti contenuti in A; essi formano il pluriquadrato $D'_{1,k}$, inscritto in A;
- quadratini tutti contenuti in B; essi formano il pluriquadrato $D'_{2,k}$, inscritto in B;
- quadratini tutti contenuti in $A \cup B$, che si trovano 'a cavallo' fra A e B (cioè che contengono sia punti di A che punti di B); essi formano un pluriquadrato che indicheremo con M_k.

Possiamo dunque scrivere:

$$D'_k = D'_{1,k} \cup D'_{2,k} \cup M_k$$

poiché A e B sono disgiunti, questi tre pluriquadrati sono anch'essi certamente disgiunti (qualcuno di essi può essere, naturalmente, anche vuoto). Allora, per le aree si ha:

$$m(D'_k) = m(D'_{1,k}) + m(D'_{2,k}) + m(M_k) \qquad \textbf{6}$$

ma M_k, contenendo sia punti di A che punti che non sono di A, è tutto contenuto nel pluriquadrato di confine di A; la sua area, $m(M_k)$, non supera l'area del pluriquadrato di confine di A e perciò tende a 0 al tendere di k all'infinito.
Dunque, passando al limite in entrambi i membri della relazione **6**, si ottiene:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

che è, appunto la **5**.
Per concludere la dimostrazione, resta da provare la misurabilità di $A \cap B$ e di $A \setminus B$, quando A e B siano misurabili. L'unica cosa da vedere è che il pluriquadrato di confine di $A \cap B$ e quello di $A \setminus B$ sono anch'essi contenuti nell'unione del pluriquadrato di confine di A, con il pluriquadrato di confine di B. E questo lo lasciamo da verificare al lettore.

Abbiamo ancora bisogno di un risultato generale. Il seguente teorema ci dice che la misurabilità di un insieme può essere accertata 'rinserrandolo' fra due insiemi misurabili (anziché soltanto fra due pluriquadrati come vuole la definizione). Questo ci darà un grande vantaggio in pratica, perché gli insiemi di cui abbiamo verificato la misurabilità ci serviranno come insiemi 'di prova' per mostrare la misurabilità di nuovi insiemi.

TEOREMA 3 **Un insieme T è misurabile se si possono trovare due insiemi misurabili, uno contenente T e uno contenuto in T, le cui aree differiscono di tanto poco quanto si vuole.**

Prendiamo un numero $\varepsilon > 0$, arbitrario. Per ipotesi, si possono trovare due insiemi misurabili A', A'' tali che sia:

$$A' \subset T \subset A''$$

e:

$$m(A'') - m(A') < \varepsilon$$

Essendo A' ed A'' misurabili, si può trovare una quadrettatura ε_k, con k tanto grande che, indicando con D'_k il pluriquadrato inscritto in A' e con D''_k il pluriquadrato circoscritto ad A'', si abbia:

$$m(D''_k) - m(A'') \leq \varepsilon, \qquad m(A') - m(D'_k) \leq \varepsilon$$

(Si tenga presente che il limite di $m(D'_k)$ al tendere di k all'infinito è $m(A')$ e, analogamente, il limite di $m(D_k'')$ è $m(A'')$). Si ha dunque che $D_k' \subset A' \subset T \subset A'' \subset D_k''$ e, come si può vedere nella figura, la differenza fra le misure di un insieme e di quello immediatamente successivo non supera mai ε.

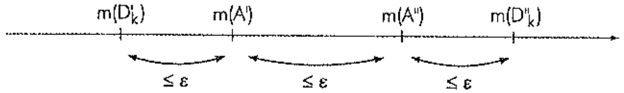

Fig. 9

Se ne ricava che:

$$m(D_k'') - m(D_k') \leq 3\varepsilon$$

Dunque abbiamo ottenuto un pluriquadrato D_k'' contenente T ed un pluriquadrato D_k' contenuto in T, entrambi estratti dalla quadrettatura ε_k, le cui aree differiscono per meno di 3ε. A maggior ragione, il pluriquadrato estratto da ε_k inscritto in T (che contiene D_k') e quello estratto da ε_k circoscritto a T (che è contenuto in D_k'') hanno misure che differiscono per non più di 3ε. Essendo 3ε un numero positivo qualsiasi, si conclude che T è misurabile. Naturalmente, per l'isotonia della misura si ha:

$$m(A') \leq m(T) \leq m(A'')$$

Dunque la misura di T è l'elemento separatore della coppia di classi contigue formata dall'area degli insiemi misurabili contenuti in T e dall'area degli insiemi misurabili contenenti T.

Osservazione: il **T3** ci dice anche che la classe degli insiemi misurabili non si allarga più se adoperiamo gli insiemi misurabili anziché i pluriquadrati per 'rinserrare' gli insiemi che vogliamo misurare.

Ed ecco alcuni risultati particolari di notevole interesse.

TEOREMA 4 **Un segmento è misurabile ed ha area nulla.**

Abbiamo già dimostrato il teorema nel caso di un segmento parallelo ad un asse. Possiamo dunque limitarci al caso del segmento obliquo. Siano $P \leftrightarrow (a, c)$, $Q \leftrightarrow (b, d)$ gli estremi del segmento. Preso un intero $n > 0$, suddividiamo il segmento PQ in n intervalli di uguale ampiezza, mediante i punti $P_0 = P$, P_1, P_2, ..., $P_n = Q$ (in ordine) e consideriamo i rettangoli con i lati paralleli agli assi che hanno come vertici opposti due punti consecutivi della suddivisione.

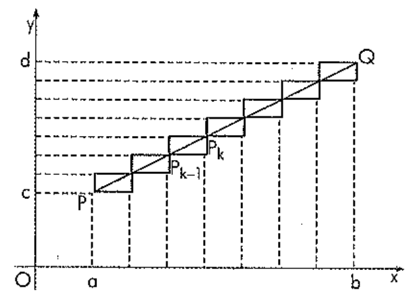

Fig. 10

Ciascuno dei rettangoli ha base $\dfrac{b-a}{n}$, altezza $\dfrac{d-c}{n}$ e perciò area $\dfrac{(b-a)\cdot(d-c)}{n^2}$. Essi costituiscono un insieme (che potremo chiamare plurirettangolo) che è certamente misurabile, essendo unione di rettangoli e che ha area:

$$n \cdot \frac{(b-a)\cdot(d-c)}{n^2} = \frac{(b-a)\cdot(d-c)}{n}$$

Al tendere di n all'infinito, la misura del plurirettangolo tende a 0. Per il **T3** possiamo affermare che il segmento è misurabile ed ha misura nulla.

TEOREMA 5 **Ogni triangolo è misurabile.**

Consideriamo, infatti, a partire dalla quadrettatura ε_k, i quadratini di confine: questi, contenendo sia punti interni che punti esterni al triangolo T, contengono certamente almeno un lato di T.

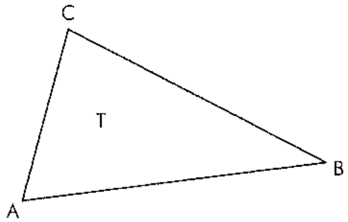

Fig. 11

Ma, per il teorema precedente, il pluriquadrato estratto da ε_k che copre uno dei lati del triangolo ha misura che tende a zero al tendere di k all'infinito. Lo stesso accade dunque anche per il pluriquadrato che copre l'insieme $AB \cup BC \cup CA$ (cioè la frontiera del triangolo).

Questo risultato si può estendere facilmente ai poligoni: occorre però, in via preliminare, ritornare sulla definizione di poligono. In geometria elementare si considerano esclusivamente poligoni convessi; qui daremo, invece, la seguente definizione più ampia:

Si dice *poligono* un insieme del piano che è unione di una famiglia finita di triangoli i quali, a due a due, possono avere:

- **nessun punto in comune**
- **un solo vertice in comune**
- **un intero lato in comune**

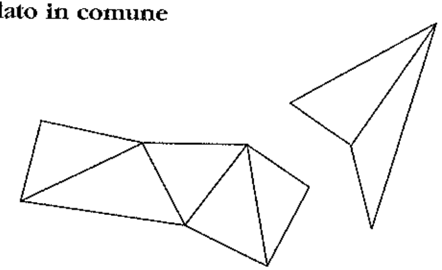

Fig. 12