G.C. Barozzi - Corso di Analisi Matematica
ZANICHELLI - Bologna 1989

Capitolo 2 FUNZIONI ELEMENTARI

Così come i numeri sono i mattoni per la costruzione dell'edificio matematico, le funzioni sono le strutture di base in cui esso si articola. Pensiamo che il lettore abbia già una qualche nozione relativa al concetto di funzione; per questo ridurremo la trattazione generale, contenuta nel paragrafo seguente, allo stretto indispensabile, per riservare nei paragrafi successivi un'attenzione maggiore ad alcune classi notevoli di funzioni numeriche reali, cioè funzioni in cui tanto la variabile indipendente quanto la variabile dipendente sono numeri reali.

2.1 IL CONCETTO DI FUNZIONE

Appartiene al senso comune l'idea che esistono certe grandezze che "dipendono" da altre. Ad esempio, quando ci rechiamo dal benzinaio per fare il pieno del serbatoio del motorino, sappiamo che il conto finale dipenderà dal numero di litri di carburante acquistati. In questo caso abbiamo due grandezze variabili, il numero di litri di miscela ed il prezzo del quantitativo acquistato, che sono legate da una semplice relazione: se x è il numero di litri acquistati e y è il prezzo corrispondente, avremo che

$$y = px,$$

dove p è il prezzo di un litro di miscela. Di solito i distributori di benzina mostrano tanto il numero p che è fisso (salvo aumenti periodici disposti dal Governo) quanto le due quantità variabili x e y. In questo caso c'è una *proporzionalità diretta* tra x e y.

Il lettore può trovarsi da sé molti altri esempi semplici dello stesso tipo, oppure esempi in cui due grandezze x e y sono legate da una formula di *proporzionalità inversa*, cioè una legge del tipo $y = k/x$, dove k è una certa costante. Ad esempio, nel corso di Fisica si studia la legge di Boyle-Mariotte

$$PV = \text{cost}.$$

P e V sono rispettivamente la pressione e il volume di una certa massa di gas perfetto che viene mantenuto a temperatura costante; la costante a secondo membro dipende da tale temperatura oltre che, ovviamente, dalla quantità di gas considerato. Si ha dunque

$$P = \frac{\text{cost}}{V},$$

cioè la pressione è inversamente proporzionale al volume.

Un esempio un poco più complicato è quello che lega il reddito

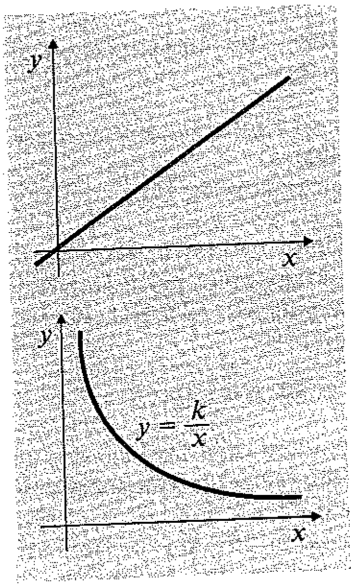

FIGURA 2.1
Proporzionalità diretta (sopra) e proporzionalità inversa (sotto) tra due variabili positive x e y.

imponibile di un individuo (è il reddito lordo meno le detrazioni previste dalla legge) alla tassa relativa che ciascuno deve pagare. Il buon senso suggerisce che se x è il reddito imponibile, espresso in una certa unità di misura, e y è la corrispondente tassa espressa nella stessa unità, allora un aumento di x produce un aumento di y (chi più guadagna, più tasse paga, o almeno dovrebbe pagare), anzi ci si aspetta che la percentuale di reddito che va in tasse aumenti al crescere del reddito.

Per l'anno fiscale 1987 il calcolo dell'IRPEF (*imposta sul reddito delle persone fisiche*) in funzione del reddito imponibile è sintetizzato dalla Tabella 2.1, in cui tutte le cifre s'intendono in migliaia di lire:

Tabella 2.1
Calcolo dell'IRPEF per l'anno 1987.

Reddito (per scaglioni)	Aliquota (per scaglioni)	Imposta dovuta sui redditi intermedi compresi negli scaglioni
fino a 6000	12	12% sull'intero importo
da 6001 fino a 11000	22	720 + 22% della parte eccedente 6000
da 11001 fino a 28000	27	1820 + 27% della parte eccedente 11000
da 28001 fino a 50000	34	6410 + 34% della parte eccedente 28000
da 50001 fino a 100000	41	13890 + 41% della parte eccedente 50000
da 100001 fino a 150000	48	34390 + 48% della parte eccedente 100000
da 150001 fino a 300000	53	58390 + 53% della parte eccedente 150000
da 300001 fino a 600000	58	137890 + 58% della parte eccedente 300000
oltre 600000	62	311890 + 62% della parte eccedente 600000

Per semplificare i conteggi, tanto il reddito quanto la tassa corrispondente vengono arrotondati al migliaio: ad esempio, per calcolare la tassa corrispondente ad un reddito di 19 milioni 481 mila lire, occorre calcolare

$$1820 + 0{,}27 \times (19\,481 - 11\,000) = 1820 + 2289{,}97 = 4\,109{,}87$$

che viene arrotondato a 4110 (cioè 4 milioni 110 mila lire).

In definitiva mediante la tabella precedente, si viene ad associare ad un numero naturale x (il reddito imponibile espresso in migliaia di lire) una tassa y, anch'essa espressa in migliaia di lire da un numero naturale, ma non v'è una singola formula che consenta il calcolo di y a partire da x, quanto piuttosto un complesso di formule da applicare a seconda dei casi.

Abbiamo detto poco sopra che la tassa varia "in funzione" del reddito; abbiamo usato, per la prima volta, il termine *funzione* secondo una delle molte accezioni con cui esso viene usato nella nostra lingua.

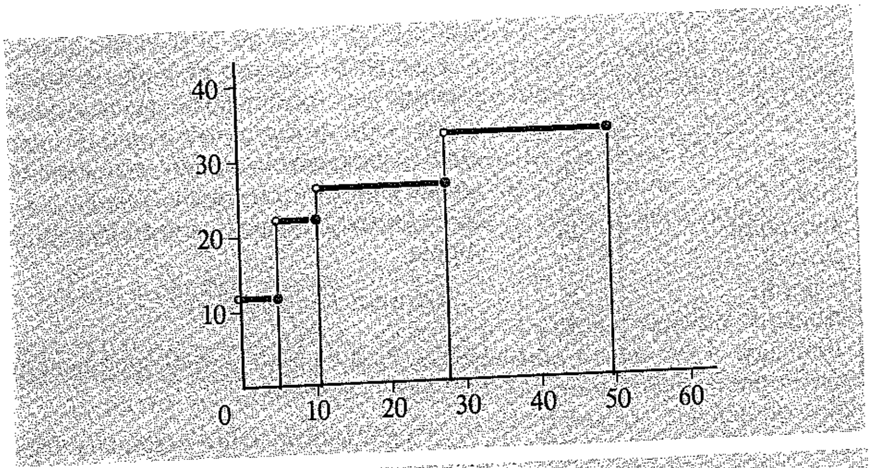

Figura 2.2
Aliquote fiscali relative all'IRPEF (anno 1986) per redditi non superiori a 50 milioni.

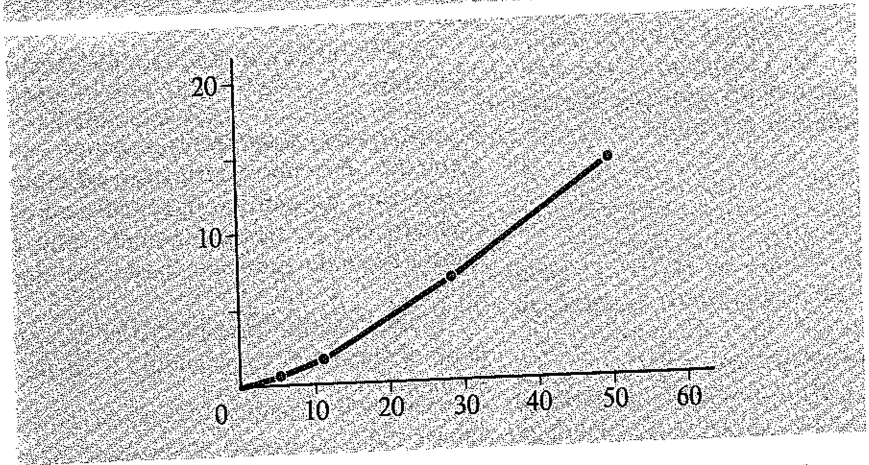

Figura 2.3
Grafico dell'IRPEF (anno 1986) per redditi non superiori a 50 milioni.

In Matematica esso viene usato con un significato ben preciso, anche se molto ampio. In generale se X è un insieme (non vuoto) e Y è un altro insieme (anch'esso non vuoto), si dice che è assegnata una funzione da X a Y (o di X in Y) se noi disponiamo dell'*informazione* sufficiente ad *associare* ad ogni elemento $x \in X$ un ben determinato elemento $y \in Y$. Si dice che y è il *corrispondente* o l'*immagine* di x mediante f e si scrive

$$f(x) := y, \qquad \text{oppure } f: x \to y.$$

Il concetto di funzione è molto generale: non è necessario che X e Y siano insiemi costituiti da numeri (anche se spesso in Matematica ci si occupa di questo caso); possiamo considerare la funzione che ad ogni studente di una certa scuola associa l'allineamento di sei cifre che contiene la sua data di nascita secondo il formato

gg/mm/aa,

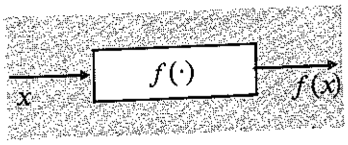

Figura 2.4
Una funzione può essere assimilata ad un'unità dotata di un ingresso ed un'uscita; per ogni valore x fornito all'ingresso, scelto in un insieme X di valori ammissibili, l'unità restituisce in uscita un elemento y appartenente ad un prefissato insieme Y.

cioè due cifre per il giorno, due per il mese, due per le ultime cifre dell'anno di nascita. Ad esempio, se Stefano è nato il 14 ottobre 1971, gli viene associato il numero 141071; se Luca è nato il 3 aprile 73, il numero associato è 030473.

Anche se X e Y sono insiemi numerici, non è detto che esista una "formula", cioè una regola per calcolare $f(x)$ a partire da x. Non è neppure necessario che X sia diverso da Y: nel caso delle tasse, esaminato poco sopra, tanto X quanto Y coincidono con l'insieme N dei numeri naturali.

Se X è un insieme *finito*, cioè contiene un numero finito di elementi, possiamo rappresentare una funzione $f : X \to Y$ in forma *tabellare*, cioè costruendo una tabella costituita da due colonne: nella prima colonna si

TABELLA 2.2
Temperature massime registrate durante una settimana.

lunedì	26
martedì	24
mercoledì	24
giovedì	25
venerdì	26
sabato	27
domenica	25

scrivono gli elementi di X, nella seconda, a fianco di ogni elemento di x, si scrive l'elemento di Y che la funzione associa a tale elemento. Ad esempio, la funzione che associa ad ogni elemento X, costituito dai giorni di una certa settimana, la temperatura massima misurata in quello stesso giorno in una certa località, può avere una rappresentazione del tipo mostrato nella Tabella 2.2.
In definitiva la funzione considerata non è altro che un insieme di coppie

(giorno, temperatura)

costruito, sulla base di dati sperimentali, in modo che siano rispettati i due criteri seguenti:

1) ogni giorno della settimana compare come primo elemento di una coppia;
2) non esistono due coppie aventi in comune lo stesso primo elemento.

Si osservi che, al contrario, esistono coppie aventi in comune il secondo elemento. Facendo riferimento all'esempio visto poco sopra, nel quale si associava un numero di sei cifre ad ogni studente di una certa scuola, è chiaro che lo stesso fenomeno può certamente verificarsi anche per questa seconda funzione: basta che due ragazzi siano nati nello stesso giorno.

L'osservazione precedente ci consente di dare una definizione formale di funzione, riportandola a quella di insieme di coppie ordinate di elementi.

DEFINIZIONE 2.1. Siano X e Y due insiemi (non vuoti); un insieme f di coppie ordinate di elementi (x, y), con $x \in X$, $y \in Y$, si dice una funzione di X in Y, se

1) per ogni elemento x di X esiste una coppia avente x come primo elemento;
2) non esistono coppie distinte aventi in comune il primo elemento: se (x, y') e (x, y'') sono coppie di f, allora $y' = y''$.

In definitiva la funzione f altro non è che un sottoinsieme del cosiddetto *prodotto cartesiano* di X per Y, indicato con il simbolo

$$X \times Y;$$

quest'ultimo è l'insieme costituito da *tutte* le coppie (x, y) con $x \in X$ e $y \in Y$. Tuttavia, anziché indicare un tale sottoinsieme con una lettera maiuscola, ad esempio F, e scrivere $(x, y) \in F$, si preferisce usare lettere minuscole dell'alfabeto, come f, g, ..., e scrivere, come già abbiamo fatto,

$$f(x) = y, \quad \text{oppure} \quad f: x \rightarrow y,$$

per indicare il fatto che y è l'elemento di Y che la funzione associa ad x. Questa difformità di notazioni trova una spiegazione di carattere storico: i simboli che ancor oggi si usano per le funzioni furono sostanzialmente introdotti da Eulero (nome latinizzato del matematico svizzero Leonhard Euler, 1709-1783), mentre la teoria degli insiemi, ed il relativo formalismo, furono introdotti verso la fine del secolo scorso principalmente ad opera di Georg Cantor (1845-1918).

I termini *applicazione*, *trasformazione*, *mappa*, vengono talvolta usati come sinonimi di funzione.

Poiché il primo elemento di ciascuna delle coppie che costituiscono una determinata funzione f può essere scelto ad arbitrio in X, è