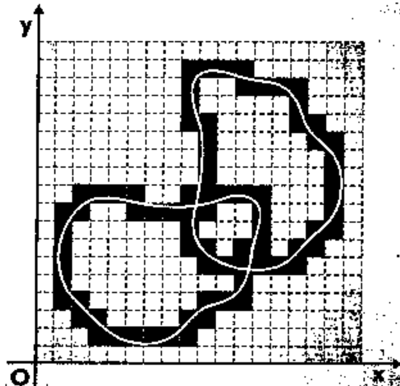
Giovanni Prodi
Luisa Prodi

SCOPRIRE LA MATEMATICA

per il [illegible] di secondo grado

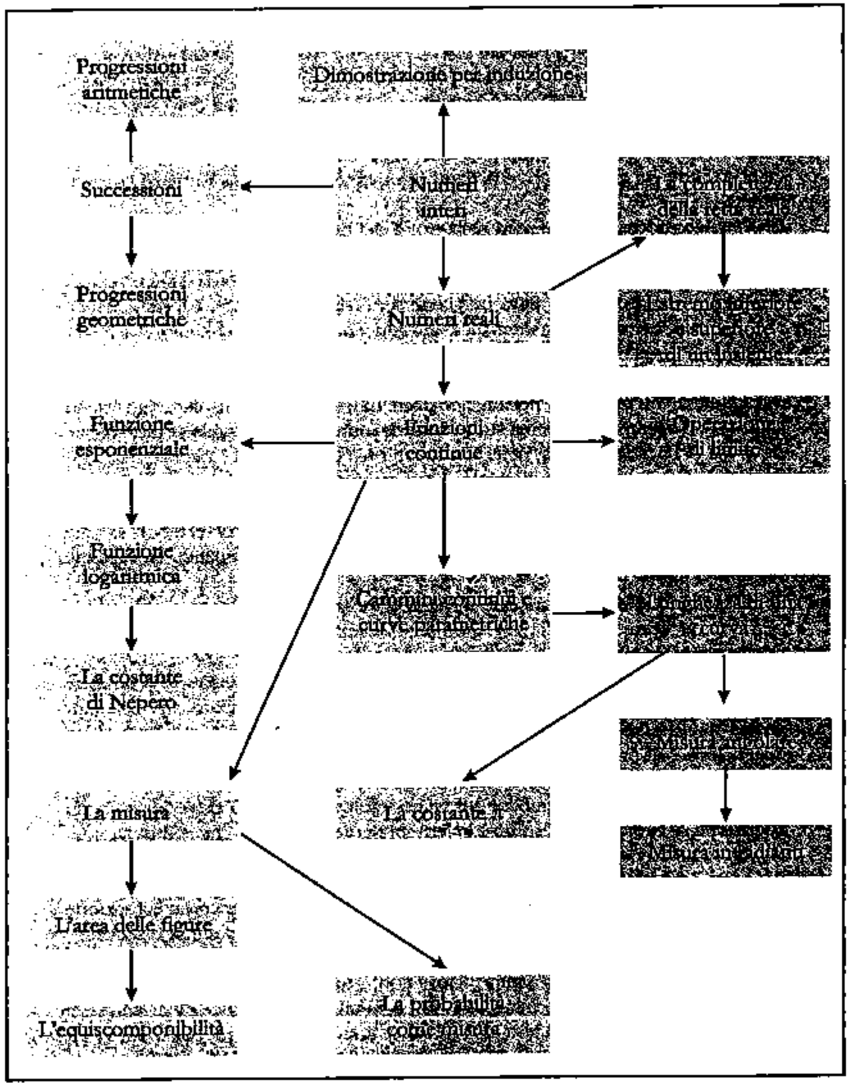


VERSO L'INFINITO

SUCCESSIONI LIMITI CONTINUITÀ
ESPONENZIALI E LOGARITMI MISURA

g&c
Ghisetti e Corvi Editori

MAPPA CONCETTUALE



INDICE

VERSO L'INFINITO

CAPITOLO 1

SUCCESSIONI

OBIETTIVI

Obiettivo generale del capitolo è quello di introdurre le successioni numeriche, presentando alcune delle proprietà che esse ereditano dall'insieme dei numeri naturali.

Obiettivi specifici:
- riesaminare l'insieme dei naturali dal punto di vista delle proprietà che lo caratterizzano;
- saper dare la definizione di una successione sia mediante il termine generale che per ricorrenza;
- essere in grado di fare congetture sulle formule che esprimono certe successioni;
- comprendere, a partire da opportuni esempi, l'importanza della costruzione di modelli matematici, con significato sia descrittivo che predittivo;
- saper operare su progressioni aritmetiche e geometriche, e saperne calcolare somme parziali;
- saper utilizzare il metodo della dimostrazione per induzione.

1.1 Introduzione alle successioni

Nel corso di questi anni avrete a più riprese studiato l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Rivolgiamo ancora una volta l'attenzione a tale insieme, considerando in particolare la relazione d'ordine che lo caratterizza, e che possiamo descrivere mediante le seguenti proprietà:

- esiste in $\mathbb{N}$ un primo elemento, più piccolo di ogni altro, lo *zero*;
- ogni elemento ha un immediato *successivo*;
- ogni numero, tranne 0, è successivo di un altro numero;
- partendo dallo 0 e passando all'elemento successivo un certo numero di volte, si può raggiungere ogni elemento di $\mathbb{N}$.

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \ldots$$

Nel linguaggio di tutti i giorni usiamo talvolta il termine 'successione' per indicare una sequenza di oggetti presi da un certo insieme. Nel linguaggio matematico a questo termine viene dato un significato preciso:

> **Dato un insieme T, si dice *successione* a valori in T un'applicazione di $\mathbb{N}$ in T.**

Notiamo che in una successione un elemento di T può essere ripetuto più volte, dal momento che l'applicazione di cui parla la definizione non è necessariamente iniettiva. Come esempi possiamo considerare le seguenti successioni a valori in $\mathbb{Q}$ (o anche in $\mathbb{R}$), visualizzate dai grafici in figura:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \ldots$$
$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \ldots \qquad \mathbf{1}$$
$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots$$

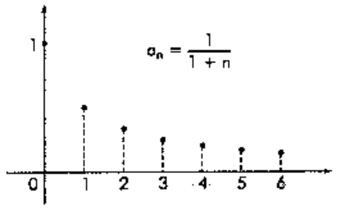


Fig. 1

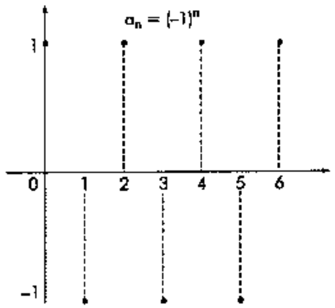


Fig. 2

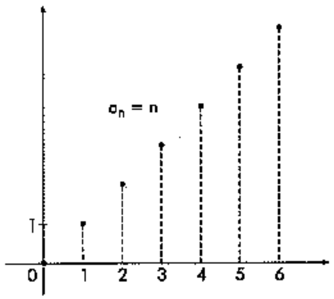


Fig. 3

Nella seconda successione i numeri 1 e -1 sono ripetuti infinite volte; la terza successione è quella stessa degli interi naturali (dunque l'applicazione di cui parla la definizione è, in questo caso, l'identità).
I valori di una successione (che si dicono anche *termini* della successione) dovrebbero essere indicati, secondo le notazioni che già abbiamo usato per le applicazioni, in questo modo:

$$a(0), \quad a(1), \quad a(2), \quad \ldots$$

ma è più abituale la notazione:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots \qquad \mathbf{2}$$

in cui l'intero naturale è scritto come indice, cioè a destra della lettera che indica la successione, e leggermente in basso.
Assegnare una successione significa assegnare infiniti valori (è la prima volta che affrontiamo consapevolmente il problema della costruzione di un insieme infinito). Tuttavia negli esempi che abbiamo considerato sopra non ci siamo sentiti a disagio, perché era del tutto chiara l'intenzione di assegnare una ben determinata legge di formazione dei termini.

Come assegnare una successione:

mediante il termine generale ...

La prima delle successioni **1** può essere rappresentata così:

$$a_n = \frac{1}{1+n}$$

per la seconda delle **1** si ha:

$$a_n = (-1)^n$$

mentre la terza si può rappresentare così:

$$a_n = n$$

In tutti questi casi la successione è assegnata rappresentando a_n con una ben determinata espressione, che viene detta *termine generale* della successione.

...oppure per ricorrenza

Vi sono altri modi interessanti per assegnare una successione; uno, molto importante, consiste nell'assegnare il primo termine a_0 e una ben determinata regola che permette di passare da un termine al successivo. È evidente allora che, uno dopo l'altro, si possono ottenere tutti i termini della successione. In questo caso si dice che la successione è definita *per ricorrenza* (o con procedimento ricorsivo).

Esempio 1 *Le progressioni aritmetiche*

Consideriamo la successione definita ponendo $a_0 = b$, $a_{n+1} = a_n + h$, dove b e h sono numeri reali fissati. Evidentemente la successione risulta:

$$b, \quad b+h, \quad b+2h, \quad b+3h, \quad \ldots$$

dal momento che, una volta ottenuto a_n, si ricava a_{n+1} aggiungendo la costante h:

$$a_n \xrightarrow{+h} a_{n+1} = a_n + h$$

È molto facile, in questo caso, esprimere il termine generale:

$$a_n = b + nh \qquad \mathbf{3}$$

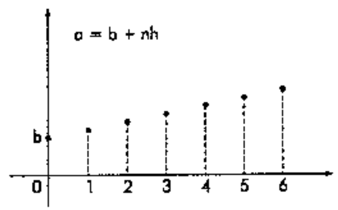


Fig. 4

Si dice che una successione di questo tipo è una *progressione aritmetica* con *valore iniziale* b e *ragione* b. Se rappresentiamo in un riferimento cartesiano le coppie (n, a_n), troviamo che tutti i punti rappresentativi stanno su una retta di equazione:

$$y = bx + b$$

La **3** ha senso anche per n intero negativo; l'estensione della funzione agli interi negativi può essere anch'essa fatta per ricorrenza: per ottenere $a_{-(k+1)}$ da a_{-k} basta evidentemente sottrarre b (anzichè sommarlo, come si faceva prima).

Esempio 2 *Le progressioni geometriche*

Un'altra successione che ci è già nota da tempo è quella delle potenze di un numero b fissato (che è detto base). Possiamo definirla mediante queste due relazioni:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot b \end{cases} \qquad \textbf{4}$$

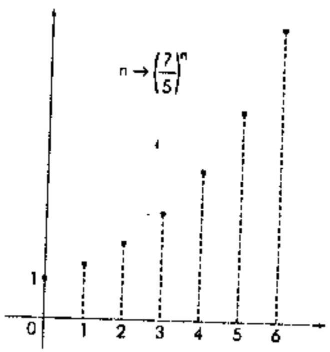


Fig. 5

La successione è definita per $n = 0$ e, una volta che sia definita per un intero n, è definita per l'intero successivo: così è definita per ogni intero naturale.
Si ha:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= b \\ &\vdots \\ a_n &= \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{n \text{ fattori}} = b^n \end{aligned}$$

L'intero n è chiamato, come si sa, esponente della potenza b^n.
Se $b = 1$, tutti i termini della successione rimangono uguali a 1 (la successione è costante).

Se la base b è maggiore di 1, si intuisce che le successive potenze crescono al crescere dell'esponente, diventando più grandi di ogni numero. Una dimostrazione precisa di questo importante fatto verrà data più avanti.
Se è $0 < b < 1$ la successione delle potenze è decrescente, e si intuisce che al crescere dell'esponente n, b^n diventa più piccola di ogni numero positivo fissato. Anche su questo torneremo più avanti.
La successione $a_n = b^n$ è definita per $n \geq 0$; può essere estesa a tutti gli interi relativi, cioè all'insieme $\mathbb{Z}$, in modo che continuino a valere le **4**; in altre parole: il passaggio da un termine al successivo si deve ottenere sempre mediante moltiplicazione per b; allora è chiaro che, supponendo $b \neq 0$, il termine immediatamente precedente un dato termine si deve ottenere da questo mediante moltiplicazione per $\frac{1}{b}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \ldots & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} & 1 & b & b^2 & b^3 & \ldots \end{array}$$

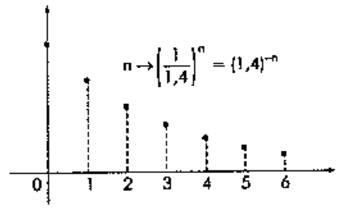


Fig. 6

È naturale continuare a usare il simbolo di potenza per indicare i termini corrispondenti agli interi negativi; quindi si porrà, per ogni intero negativo $-n$:

$$b^{-n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \qquad \textbf{5}$$

Così abbiamo introdotto l'importante notazione degli esponenti negativi, di cui ci serviremo spesso in seguito.
Se indichiamo con f la funzione $n \to b^n$ definita in $\mathbb{Z}$, vale la seguente importantissima relazione:

$$f(m + n) = f(m) \cdot f(n). \qquad \textbf{6}$$

Questa è evidente se m e n sono entrambi positivi o anche se sono entrambi negativi (tenendo presente la **5**). Supponiamo che n e m siano interi di segno opposto: sia $m > 0$ e $n = -k$, con $k > 0$. Risulta:

$$b^m b^n = b^m b^{-k} = \frac{b^m}{b^k}.$$

È evidente allora che, se $m > k$, questa si può scrivere b^{m-k}, mentre se è $k > m$ si può scrivere:

$$\frac{1}{b^{k-m}} = b^{m-k}$$

in ogni caso risulta verificata la relazione **6**.
Il significato che abbiamo dato al simbolo b^n per $n \leq 0$ è convenzionale: si tratta però di una convenzione obbligatoria se si vuole che, ponendo $f(n) = b^n$, valga la **6**.
Più in generale, possiamo considerare una successione del tipo:

$$\lambda, \quad \lambda \cdot b, \quad \lambda \cdot b^2, \quad \lambda \cdot b^3, \quad \ldots$$

dove λ e b sono numeri assegnati. Essa viene detta *progressione geometrica* con valore iniziale λ e ragione b. Evidentemente si tratta della successione delle potenze a esponente intero di b moltiplicate per la costante λ. Essa può essere definita anche per ricorrenza mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n \cdot b \end{cases}$$

che sono un'ovvia variante delle **4**.

Esempio 3 *Il fattoriale*

La successione così definita:

$$a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

viene chiamata fattoriale e indica il numero delle permutazioni (ossia degli ordinamenti) che si possono fare in un insieme di n elementi.
Vediamo ora come la successione fattoriale si può costruire mediante un procedimento per ricorrenza. Conviene ampliare la definizione ponendo $0! = 1$. Allora la definizione ricorsiva del fattoriale è:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot (n+1) \end{cases}$$

Notiamo che in questo procedimento per ricorrenza l'espressione che dà a_{n+1} contiene non solo a_n, ma anche l'intero n.

Osservazione: con il termine successione si indica anche un'applicazione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ formato dai numeri che seguono un intero fissato. Ad esempio $a_n = \dfrac{1}{n}$ è una successione definita per $n \geq 1$.

Successioni monotòne

È importante osservare nell'andamento di una successione certe regolarità: per la successione $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ si osserva che ogni valore è maggiore di quello che lo precede immediatamente, mentre nella successione $b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ogni termine è minore di quello che lo precede immediatamente.

Successioni di questo tipo si chiamano monotòne; più precisamente:

data la successione a_n a valori reali, essa si dice:

- ***crescente***, se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n$
- ***non decrescente***, se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geq a_n$
- ***decrescente***, se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n$
- ***non crescente***, se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n$

Non ogni successione è monotona: la successione $b_n = n^2 - 8n + 15$ non corrisponde a nessuno dei quattro casi elencati nella definizione appena data: osserviamo, infatti, che $b_1 = 8$ e $b_2 = 3$, quindi $b_1 > b_2$, ma $b_6 = 3$ e $b_7 = 8$. La successione b_n non ha né un andamento crescente né un andamento decrescente.

1.2 Alcune successioni interessanti

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che una successione può essere definita mediante un procedimento per ricorrenza. Ora ci proponiamo di far vedere che questo procedimento non è solo un artificio matematico: anzi, molte successioni che servono per descrivere fenomeni naturali vengono spontaneamente introdotte mediante una relazione ricorrente (ad esempio con intervallo di un anno) e spesso la situazione che si verifica a un certo tempo dipende in modo ben determinato da quella del tempo precedente (ad esempio da quella dell'anno precedente).
Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 4 *Un modello matematico: l'accrescimento geometrico*

Supponiamo che una certa popolazione biologica aumenti ogni anno di una quantità proporzionale al numero degli individui presenti, con un coefficiente di proporzionalità k (che rappresenta l'eccedenza dei nati sui morti). Allora, indicando con a_n il numero dei soggetti presenti nell'anno n-simo, si ha:

$$a_{n+1} = a_n + ka_n = (1+k)a_n$$

Si avrà allora $a_n = (1+k)^n a_0$; questa è una progressione geometrica con valore iniziale a_0 e ragione $1 + k$. In questo caso si dice che vale la legge dell'accrescimento geometrico (o naturale).

Esempio 5 *Un altro modello: l'accrescimento con risorse limitate*

L'accrescimento geometrico di una popolazione biologica si può verificare solo quando è disponibile una quantità illimitata di risorse. Supponiamo ora che, nell'ambiente dove vive una certa popolazione biologica, vi sia una quantità di cibo bastante solo per b individui e supponiamo che l'incremento annuale della popolazione sia proporzionale alla quantità di risorse non ancora sfruttate.
Indicando con a_n il numero degli individui presenti nell'anno n-esimo, l'incre-

CAPITOLO 2

LIMITI DELLE SUCCESSIONI

OBIETTIVI

Obiettivi generali del capitolo sono l'introduzione e la formalizzazione del concetto di limite di una successione e la caratterizzazione della retta reale per mezzo della proprietà di completezza.

Obiettivi specifici:
- saper descrivere il comportamento all'infinito di una successione usando un linguaggio tecnicamente corretto;
- saper calcolare, se esiste, il limite di una successione;
- essere in grado di usare in modo opportuno l'algebra dei limiti;
- saper calcolare la somma di alcuni tipi di serie a termini positivi;
- saper esprimere la proprietà di completezza di un insieme numerico;
- essere in grado di trovare l'estremo superiore e inferiore di un insieme numerico, riconoscendo i particolare eventuali massimi o minimi.

2.1 La nozione di limite di una successione

Esaminando gli svariati esempi di successioni a valori reali considerati nel capitolo precedente, siamo portati spontaneamente a mettere in evidenza alcuni comportamenti tipici.

1 Vi sono successioni, come la successione dei quadrati degli interi naturali:

$$0,\quad 1,\quad 4,\quad 9,\quad 25,\quad \ldots,\quad n^2,\quad \ldots$$

i cui termini, al crescere dell'intero n, crescono oltre ogni limite. Anche la successione che rappresenta l'accrescimento geometrico, il cui termine generale è:

$$a_n = (1+k)^n a_0$$

ha un comportamento di questo tipo se il coefficiente k è positivo. (Con un semplice programma al calcolatore se ne può studiare l'andamento, dando a k e ad a_0 dei valori particolari, ed è molto istruttivo osservare cosa succede).

2 In altri casi, il termine generale si avvicina sempre più a un numero reale. Ad esempio, i termini della successione:

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n+1},\quad \ldots$$

si avvicinano sempre più al valore 0, mentre i termini della successione:

$$0,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5},\quad \ldots,\quad \frac{n}{n+1},\quad \ldots$$

si avvicinano indefinitamente al valore 1. Ha un comportamento di questo tipo la successione che abbiamo introdotto nel paragrafo 1.2 (esempio 5) per studiare l'andamento di una popolazione biologica in presenza di risorse limitate. (Rivedere la tabella costruita in un caso particolare).

3 La successione:

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad \ldots$$

che ha come termine generale $(-1)^n$, oscilla fra i valori 1 e -1.
La successione:

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \quad \ldots$$

è anch'essa oscillante, però con oscillazioni che diventano sempre più grandi. Queste ultime due successioni, così come moltissime altre, non hanno nessuno dei comportamenti che abbiamo osservato nei primi due punti: le classifichiamo quindi in una terza famiglia. In questa famiglia troveremo delle successioni dall'andamento assai bizzarro!

Nel descrivere questi comportamenti tipici, ci siamo serviti di espressioni suggestive, come: 'cresce oltre ogni limite' oppure: 'si avvicina indefinitamente al valore...', che però non hanno un significato preciso. È necessario che precisiamo questo significato mediante opportune definizioni. Cominciamo dalla prima situazione. Per chiarire che cosa debba significare che la successione a_n 'cresce oltre ogni limite', possiamo immaginare un gioco fra due persone: la prima fissa a suo arbitrio un numero m (e lo può prendere anche grandissimo) la seconda è tenuta a rispondere alla mossa esibendo un intero r tale che per ogni intero n maggiore o uguale di r si abbia:

$$a_n \geq m \qquad \mathbf{1}$$

Ad esempio, nel caso della successione dei quadrati: $a_n = n^2$, per avere $n^2 \geq m$ basta prendere $n \geq \sqrt{m}$ (supponendo che m sia stato scelto positivo), quindi l'intero r può essere preso uguale al primo intero che sia maggiore o uguale a $\sqrt{m}$. Se abbiamo preso $m = 10^6$, si potrà prendere $r = 10^3$. Solo se il secondo giocatore è in grado di rispondere a ogni mossa del primo (cioè è in grado di contrapporre a ogni m un r tale che per ogni $n \geq r$ valga la **1**) possiamo ragionevolmente dire che la successione a_n 'cresce oltre ogni limite'.
Abbiamo parlato poco sopra di 'primo intero che sia maggiore o uguale a $\sqrt{m}$': possiamo eliminare questa espressione un po' ingombrante, introducendo la nozione di parte intera di un numero.

Dato un numero reale a, si chiama parte intera di a e si denota con $[a]$ il più grande intero minore o uguale ad a.

Con questa nozione, il primo intero r maggiore o uguale a $\sqrt{m}$ è $[\sqrt{m}] + 1$.

Definizione di limite infinito

Ed ecco allora la definizione precisa:

Si dice che la successione di numeri reali a_n tende a $+\infty$ e si scrive:

$$\lim a_n = +\infty$$

se, qualunque sia il numero m, esiste un intero r tale che per ogni $n \geq r$ si abbia:

$$a_n \geq m$$

Come si vede, l'espressione 'tende a $+\infty$' viene qui usata in luogo dell'espressione più vaga 'cresce oltre ogni limite' che avevamo usato prima. Poichè nell'espressione di a_n possono comparire più variabili, useremo spesso la notazione più completa:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

in cui viene messa in evidenza la variabile rispetto a cui si fa il limite.
Quanto al misterioso simbolo $+\infty$ (che si legge 'più infinito') avremo presto occasione di motivarlo.
Vediamo ancora un esempio. Consideriamo la progressione geometrica di ragione b:

$$1, \quad b, \quad b^2, \quad b^3, \quad \ldots, \quad b^n, \quad \ldots$$

Si tratta della legge dell'accrescimento geometrico che abbiamo richiamato sopra, in cui si è posto $b = 1 + k$ e si è preso, per semplicità, $a_0 = 1$. Vogliamo dimostrare che se è $b > 1$ (cioè $k > 0$), si ha:

$$\lim_{n\to\infty} b^n = +\infty$$

Questa affermazione è intuitivamente evidente; per dimostrarla ricordiamo l'importante disuguaglianza che abbiamo ottenuto nel paragrafo 1.4, formula **19**:

$$b^n = (1 + k)^n \geq 1 + nk \qquad \mathbf{2}$$

valida per $k \geq 0$.
In base alla nostra definizione, si tratta di fare vedere che, fissato un numero m qualsiasi, è possibile trovare un intero r tale che, per $n \geq r$, sia:

$$b^n \geq m \qquad \mathbf{3}$$

Ora, a motivo della disuguaglianza **2**, la **3** vale certamente se risulta:

$$1 + nk \geq m \qquad \mathbf{4}$$

cioè se è:

$$n \geq \frac{m-1}{k}$$

(ricordiamo che abbiamo supposto $k > 0$). Se $r = \left[\frac{m-1}{k}\right] + 1$, per $n \geq r$ vale allora la **4** e perciò la **3**. Così dunque l'affermazione è dimostrata.
Una variante abbastanza ovvia della nostra definizione è quella del limite a $-\infty$.

Si dice che la successione di numeri reali a_n tende a $-\infty$ e si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

se, qualunque sia il numero m, esiste un intero r tale che per $n \geq r$ risulta:

$$a_n \leq m$$

È facile verificare, ad esempio, che la successione:

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad \ldots, \quad -n, \quad \ldots$$

formata dagli opposti degli interi naturali tende a $-\infty$. Fissiamo infatti un numero m e vediamo per quali valori di n si ha:

$$-n \leq m$$

Questa disuguaglianza equivale alla $n \geq -m$, quindi è soddisfatta per $n \geq r$, essendo $r = [-m] + 1$.
Un'osservazione quasi ovvia: nella definizione di $\lim a_n = +\infty$ possiamo limitarci a prendere m positivo. Infatti, se sappiamo 'rispondere alla mossa' quando m è positivo, a maggior ragione lo sappiamo fare per $m \leq 0$. Analogamente, nella definizione di $\lim a_n = -\infty$ si può prendere sempre m negativo.

Definizione di limite finito

Passiamo alla situazione esaminata nel punto **2**: abbiamo l'avvicinamento indefinito dei termini di una successione a un numero reale.
La definizione precisa è la seguente:

Si dice che la successione di numeri reali a_n tende al numero reale l (o ha per limite l) se, per ogni numero positivo ε, esiste un intero r tale che per $n \geq r$ sia:

$$|a_n - l| \leq \varepsilon \qquad \textbf{5}$$

Per indicare che la successione a_n tende ad l si scrive: $\lim a_n = l$, oppure, con più precisione:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\,.$$

La struttura logica di questa definizione non è diversa da quella precedente. Anche qui, per chiarire la definizione, possiamo pensare a un gioco fra due persone: il primo fissa il numero ε positivo; per mettere in difficoltà il suo avversario, sarà indotto a prendere ε molto piccolo. Il secondo giocatore, per rispondere alla mossa, dovrà avvicinarsi a l per meno di ε e sarà quindi costretto a prendere il numero r molto grande: l'importante è, comunque, che riesca a trovare un tale r.
La sua strategia consisterà nel fissare, una volta per tutte, una funzione $\varepsilon \to r(\varepsilon)$ di risposta, cioè tale che per $n \geq r(\varepsilon)$ valga la **5**.
Dimostriamo, applicando letteralmente la definizione, che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Fissato un numero $\varepsilon > 0$, consideriamo la disuguaglianza:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \leq \varepsilon \qquad \textbf{6}$$

che si può scrivere:

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \varepsilon$$

e anche, dal momento che è certamente $n+1 > 0$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$$

Questa, a sua volta, si può scrivere:

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Se $r(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$, per $n \geq r(\varepsilon)$ è soddisfatta la **6**. Così la dimostrazione è conclusa.
È anche interessante la traduzione grafica della nozione di limite. Consideriamo nel piano cartesiano la striscia formata dai punti (x, y) tali che $|y - l| \leq \varepsilon$.

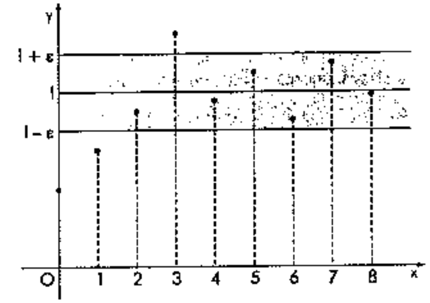


Fig. 1

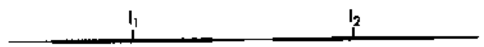
Ebbene, la definizione ci dice che i punti rappresentativi della successione (n, a_n), per n abbastanza grande, stanno tutti nella striscia. Si dice anche che sono *definitivamente* contenuti nella striscia; in seguito sarà comodo dire che i termini di una successione possiedono definitivamente una certa proprietà se la possiedono a partire da un certo indice. Ad esempio, diremo che i termini della successione $a_n = n - 5$ sono definitivamente positivi (infatti sono positivi per $n \geq 6$).
I due teoremi seguenti sono importanti per comprendere meglio la definizione di limite.

L'unicità del limite

TEOREMA 1 **Se una successione a_n tende a un limite, questo è unico.**

Per dimostrarlo supponiamo per assurdo che la successione a_n converga verso due limiti distinti, l_1 e l_2. Possiamo evidentemente supporre che sia $l_1 < l_2$.

Fig. 2



Prendiamo un ε positivo che sia inferiore a $\frac{l_2 - l_1}{2}$; in tal modo i due intervalli $[l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon]$ e $[l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon]$ non hanno punti in comune. Essendo

$\lim a_n = l_1$, possiamo trovare un intero r_1 tale che per $n \geq r_1$ si abbia $|a_n - l_1| \leq \varepsilon$ (cioè: i punti della successione stanno definitivamente nel primo intervallo); analogamente, essendo $\lim a_n = l_2$, possiamo trovare un intero r_2 tale che per $n \geq r_2$ si abbia $|a_n - l_2| \leq \varepsilon$ (cioè: i punti della successione stanno definitivamente nel secondo intervallo). Indichiamo con r il maggiore dei due interi r_1, r_2; per $n \geq r$ il punto a_n dovrebbe appartenere sia al primo che al secondo intervallo, e questo è evidentemente assurdo.

L'unicità del limite ci permette di dire '*il* limite della successione a_n' (usando l'articolo determinativo).

La permanenza del segno

TEOREMA 2 **Se una successione tende a un limite positivo, i suoi termini sono definitivamente positivi.**

Dimostrazione: sia $l > 0$ il limite della successione a_n.
Preso $\varepsilon = \frac{l}{2}$, sia r tale che per ogni intero $m \geq r$ risulti:

$$|a_m - l| \leq \frac{l}{2}$$

Da questa disuguaglianza si ottiene la seguente:

$$a_m - l \geq -\frac{l}{2}$$

da cui:

$$a_m \geq \frac{l}{2} > 0$$

Dunque, per ogni $m \geq r$, a_m risulta positivo.
Ovviamente, se la successione tende a un limite negativo, i suoi termini risultano definitivamente negativi.

Un'osservazione importante

Se è $\lim a_n = l$, non è detto che la successione a_n debba avvicinarsi a l sempre crescendo o sempre decrescendo. Ad esempio la successione:

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \ldots$$

tende a 0, tuttavia non è né crescente né decrescente: è oscillante, ma con oscillazioni sempre più smorzate. Non è neppure detto che l'approssimazione migliori nel passare da un termine al successivo (cioè che la successione $|a_n - l|$ sia decrescente). Ad esempio, nella successione:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{5}, \quad \ldots$$

il limite (che è 0) viene raggiunto, ma anche lasciato, infinite volte.

Successioni infinitesime

Una successione che tende a zero si dice infinitesima.

Rileggendo con cura la definizione di limite finito, si scopre che *la successione a_n tende al limite l se e solo se la successione $a_n - l$ è infinitesima.* Questa osservazione ci sarà molto utile nel prossimo paragrafo.
A proposito di nomenclatura: si dice che una successione è *convergente* se tende a un limite finito mentre si dice che è *divergente* se tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Rivedendo dunque la classificazione fatta all'inizio, possiamo includere nel tipo **1** tutte le successioni divergenti (a $+\infty$ o anche a $-\infty$), nel tipo **2** tutte le successioni convergenti. Nel tipo **3** includeremo tutte le altre.

2.2 Operazioni algebriche e limiti

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto l'operazione di limite; è utile vedere come essa si comporta in relazione alle operazioni algebriche tra successioni: addizione, moltiplicazione, operazioni di opposto e di reciproco. Ecco un quesito tipico: se a_n e b_n sono successioni a valori reali, è spontaneo chiamare successione somma la successione $a_n + b_n$; ebbene: se a_n e b_n sono convergenti, come si comporta la successione somma? È abbastanza naturale congetturare che essa converga verso la somma dei limiti. Analogo quesito si pone per la successione prodotto $a_n \cdot b_n$, per la successione degli opposti e dei reciproci di una successione a_n.
Ecco un primo risultato importante:

Il limite della successione somma

TEOREMA 3 **Se le successioni a_n e b_n tendono ai limiti l_1 e l_2 rispettivamente, la successione somma $a_n + b_n$ tende al limite $l_1 + l_2$.**

Prima di dimostrare il teorema, dimostriamo un lemma, che è un caso particolare del teorema stesso. (Si usa chiamare lemma una proposizione di carattere tecnico, che ha un ruolo strumentale nella dimostrazione di un teorema).

LEMMA 1 **La successione somma di due successioni infinitesime è una successione infinitesima.**

Anzitutto, ricordiamo la disuguaglianza che sussiste per i valori assoluti dei numeri reali:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad 7$$

Siano ora α_n e β_n due successioni infinitesime. Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$.
Esiste un intero r_1 tale che per $n \geq r_1$ risulta:

$$|\alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad 8$$

$\left(\text{se } \varepsilon \text{ è un numero positivo, anche } \frac{\varepsilon}{2} \text{ è un numero positivo}\right)$. Analogamente, essendo anche la successione β_n infinitesima, esiste un intero r_2 tale che per $n \geq r_2$ risulta:

$$|\beta_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \mathbf{9}$$

Sia ora r il maggiore dei due interi r_1 e r_2; per $n \geq r$ valgono sia la **8** che la **9**. Applicando la disuguaglianza **7** si ha allora:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dunque, per $n \geq r$:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq \varepsilon \qquad \mathbf{10}$$

Questo appunto ci dice che la successione $\alpha_n + \beta_n$ è infinitesima.
È facile ora dimostrare il teorema **T3**. Come abbiamo osservato a conclusione del paragrafo precedente, affermare che a_n tende a l_1 equivale a dire che la successione $a_n - l_1$ è infinitesima.
Poniamo $a_n - l_1 = \alpha_n$, cioè $a_n = l_1 + \alpha_n$: la successione α_n è infinitesima. Analogamente, ponendo $b_n - l_2 = \beta_n$, cioè $b_n = l_2 + \beta_n$, la successione β_n risulta infinitesima. Pertanto si può scrivere:

$$a_n + b_n = l_1 + l_2 + (\alpha_n + \beta_n)$$

Il lemma ora dimostrato ci dice che la successione $\alpha_n + \beta_n$ è infinitesima. Questo equivale appunto a dire che la successione $a_n + b_n$ ha come limite $l_1 + l_2$.

Il limite della successione prodotto

Occupiamoci ora della successione prodotto di due successioni convergenti. Per procedere più speditamente, è opportuno premettere due semplici lemmi.

LEMMA 2 **La successione prodotto di una successione infinitesima per una successione costante è infinitesima.**

Sia α_n una successione infinitesima e sia k una costante. Se è $k = 0$, la successione prodotto $k \cdot \alpha_n$ è nulla, ed è perciò, banalmente, infinitesima. Sia $k \neq 0$. Preso un numero $\varepsilon > 0$, sia r un intero tale che per $n \geq r$ risulti:

$$|\alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{|k|}$$

$\left(\text{teniamo presente che anche } \frac{\varepsilon}{|k|} \text{ è un numero positivo}\right)$.

Per $n \geq r$ si ha allora:

$$|k \cdot \alpha_n| = |k| \cdot |\alpha_n| \leq |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

Dunque, per $n \geq r$ risulta:

$$|k \cdot \alpha_n| \leq \varepsilon$$

Questo ci dice che la successione $k \cdot \alpha_n$ è infinitesima.

LEMMA 3 **La successione prodotto di due successioni infinitesime è infinitesima.**

Siano α_n e β_n due successioni infinitesime; fissiamo un numero $\varepsilon > 0$, arbitrario. Esiste un intero r_1 tale che per $n \geq r_1$ risulta:

$$|\alpha_n| \leq \varepsilon$$

Esiste un intero r_2 tale che per $n \geq r_2$ risulta:

$$|\beta_n| \leq 1$$

(anche 1 è un numero positivo). Sia r il maggiore fra r_1 ed r_2. Per $n \geq r$ si ha:

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| \leq \varepsilon \cdot 1$$

Dunque, per $n \geq r$ si ha:

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| \leq \varepsilon$$

Pertanto la successione $\alpha_n \cdot \beta_n$ è infinitesima.
Ed ecco il risultato che riguarda la successione prodotto:

TEOREMA 4 **Se le successioni a_n e b_n tendono ai limiti l_1 e l_2, rispettivamente, la successione *prodotto* $a_n \cdot b_n$ tende al limite $l_1 \cdot l_2$.**

Dopo **L2** e **L3**, la dimostrazione del teorema è molto semplice. Per ipotesi, possiamo porre:

$$a_n = l_1 + \alpha_n, \qquad b_n = l_2 + \beta_n$$

dove α_n e β_n sono successioni infinitesime. Si ha:

$$a_n \cdot b_n = (l_1 + \alpha_n) \cdot (l_2 + \beta_n) = l_1 \cdot l_2 + \alpha_n \cdot l_2 + l_1 \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

Per **L2** e **L3**, le successioni $\alpha_n \cdot l_2, l_1 \cdot \beta_n, \alpha_n \cdot \beta_n$ sono infinitesime; per **L1** la successione $\alpha_n \cdot l_2 + l_1 \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n$ è infinitesima. Questo ci dice che la successione $a_n \cdot b_n$ ha come limite $l_1 \cdot l_2$.

I limiti della successione opposta e reciproca

TEOREMA 5 **Se la successione a_n tende al limite l, la successione *opposta* $-a_n$ tende al limite $-l$.**

La dimostrazione è molto semplice e la lasciamo come esercizio al lettore.

TEOREMA 6 **Se la successione a_n tende al limite l, diverso da 0, la successione *reciproca* $\frac{1}{a_n}$ tende al limite $\frac{1}{l}$.**

Prima di passare alla dimostrazione vera e propria, dobbiamo fare un'osservazione sull'enunciato. Chiediamoci: la successione reciproca $\frac{1}{a_n}$ è definita? Veramente, la nostra ipotesi non esclude che per qualche indice n sia $a_n = 0$ e, pertanto, l'espressione non sia definita; però è certo che per valori di n abbastanza grandi è $a_n \neq 0$.

Infatti, per il **T2**, i termini della successione sono o definitivamente positivi, o definitivamente negativi; pertanto il nostro enunciato ha senso, a patto di considerare eventualmente la successione $\frac{1}{a_n}$ definita solo per n abbastanza grande.

Conviene, comunque, procurarsi una disuguaglianza analoga a quella che abbiamo usato per dimostrare il **T2**. Essendo, per ipotesi, $\lim a_n = l$, con $l \neq 0$, esiste un intero r_1 tale che, per ogni $n \geq r_1$ si ha:

$$|a_n - l| \leq \frac{|l|}{2}$$

e si ricava facilmente:

$$|a_n| \geq |l| - |a_n - l| \geq \frac{|l|}{2}$$

Da questa disuguaglianza ne deriva un'altra, che è il punto centrale della nostra dimostrazione. Per $n \geq r_1$ si ha:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|a_n - l|}{|a_n| \cdot |l|} \leq 2\frac{|a_n - l|}{|l|^2}$$

Fissato un $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un intero r_2 tale che per $n \geq r_2$ sia $2\frac{|a_n - l|}{|l|^2} \leq \varepsilon$.

Basta evidentemente che per $n \geq r_2$ sia $|a_n - l| \leq \frac{\varepsilon \cdot |l|^2}{2}$ e ciò è ancora una volta possibile perché è $\lim a_n = l$.

Dunque, detto r il più grande dei due numeri r_1 e r_2, si ha, per $n \geq r$:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| \leq \varepsilon$$

e questo ci dice appunto che $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{l}$.

Dai teoremi dimostrati si deducono molte conseguenze ovvie: ad esempio, se a_n e b_n sono successioni tendenti ai limiti l_1 e l_2 rispettivamente, la successione $a_n - b_n$ tende a $l_1 - l_2$. Se poi è $l_2 \neq 0$, la successione $\frac{a_n}{b_n}$ tende a $\frac{l_1}{l_2}$.

2.3 La completezza della retta reale

Il principale problema che abbiamo affrontato in questo capitolo è quello di vedere se una successione è convergente, cioè se tende a un limite finito. In certi casi il limite balza subito agli occhi, in altri casi non è facile decidere: può darsi che il limite non esista, oppure che esista ma non lo sappiamo riconoscere fra i numeri che ci sono già noti. Insomma, è importante sapere se esiste il limite di una successione, prescindendo dal fatto che lo sappiamo rappresentare in qualche modo.

Ma per raggiungere questo scopo è opportuno conoscere bene l'ambiente in cui cerchiamo il limite, cioè l'insieme dei numeri reali, così come, prima di mettersi a pescare in un fiume, è ragionevole informarsi se vi sono molti o pochi pesci...

Non vi è un unico modo di descrivere l'insieme dei numeri reali, vi sono caratterizzazioni diverse ma equivalenti legate ai nomi dei matematici che le hanno pensate (Dedekind, Cantor...). Noi useremo l'idea delle 'scatole cinesi', che chi ha seguito questo corso fin dai primi anni probabilmente ricorda. La riprendiamo comunque:

Una scatola cinese è una successione $[a_n, b_n]$ di intervalli tali che:

- ciascuno è contenuto nel precedente;
- le ampiezze diventano piccole quanto si vuole, cioè, col linguaggio che abbiamo ora appreso:
$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Un numero reale può essere individuato da una sola scatola cinese? La nostra intuzione ci dice di no. Per esempio, il numero zero può essere rappresentato da:

$$[-1, 1], \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \quad \ldots$$

$$[-1; 0], \quad \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \quad \ldots$$

$$[0, 1], \quad \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \ldots$$

Come si vede, si tratta di scatole cinesi diverse (perché ognuna ha intervalli che non ci sono nelle altre due) che godono, tuttavia, di questa comune proprietà: preso un intervallo $[a_n; b_n]$ da una scatola e un intervallo $[c_m; d_m]$ da un'altra, essi hanno sempre almeno un punto in comune.

È, allora, abbastanza spontaneo dare la seguente definizione:

Due scatole cinesi $[a_n; b_n]$ e $[c_n; d_n]$ si 'agganciano' se per ogni $n \in \mathbb{N}$ gli intervalli $[a_n; b_n]$ e $[c_n; d_n]$ hanno punti in comune.

La dimostrazione che questa relazione è una relazione di equivalenza (gode, cioè, delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva), non è difficile, ed è abbastanza intuibile, perciò la tralasciamo.

L'insieme delle scatole cinesi, in base a questa relazione di equivalenza, viene ripartito in classi di equivalenza: **ognuna di esse è un numero reale.**

Una singola scatola cinese è un rappresentante della classe di equivalenza cui appartiene, cioè di un numero reale. Naturalmente, per semplicità, continueremo a usare la singola scatola cinese come numero reale pensando di identificarla con la classe di equivalenza cui appartiene.

Potremmo dimostrare che l'insieme di equivalenza delle scatole cinesi, $\mathbb{R}$, è un corpo (perché in esso sono definibili le operazioni di addizione e di moltiplicazione: l'addizione è un'operazione che ha le proprietà associativa, commutativa, è dotata di un elemento neutro, che chiamiamo 0, e di un opposto per ogni numero, e anche la moltiplicazione, pure associativa e commutativa, ha un elemento neutro e ammette un inverso per ogni elemento diverso da 0, infine vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione) ordinato, os-

LE FUNZIONI CONTINUE

OBIETTIVI

Obiettivo generale del capitolo è introdurre il concetto di continuità di una funzione e dei più significativi risultati che si possono dedurre dalla continuità delle funzioni reali.

Obiettivi specifici:

- saper verificare la continuità di una funzione in un punto e in un intervallo, anche utilizzando l'algebra delle funzioni continue;
- saper calcolare i limiti di funzioni, per comprenderne l'andamento in punti particolari o all'infinito;
- disegnare grafici di funzioni, facendo ricorso alle caratteristiche che si possono individuare nell'equazione della funzione stessa (simmetrie, periodicità, limiti...);
- conoscere e saper applicare i principali teoremi sulle funzioni continue (teoremi degli zeri, del massimo, di inversione);
- esaminare altri tipi di applicazioni continue, ad esempio curve parametriche o funzioni di più variabili.

3.1 Funzioni reali continue

I termini 'continuo', 'continuità' sono usati nel linguaggio comune per indicare una modalità che si riscontra frequentemente nei fenomeni naturali.

Ad esempio, diciamo che un corpo si muove con continuità per dire che esso non può scomparire per ricomparire istantaneamente in un punto lontano.

Analogamente, verifichiamo che la crescita di un essere vivente avviene in modo continuo: esso raggiunge una certa statura solo dopo essere passato per tutte le stature intermedie, senza salti.

Vediamo qualche esempio con maggiore dettaglio:

- Registriamo l'andamento della temperatura dell'aria in una data località per alcune ore. Possiamo usare uno strumento (termografo) costituito da una lamina sensibile alla temperatura e da un rullo rotante su cui è avvolto un rotolo di carta.
  Alla lamina è collegata una punta scrivente che si sposta in corrispondenza alle variazioni di temperatura, tracciando sulla carta una linea, come quella rappresentata nella figura seguente. (T indica la temperatura in gradi centigradi ed t il tempo in ore).
  Osserviamo che il grafico si presenta come un tratto continuo, senza salti.

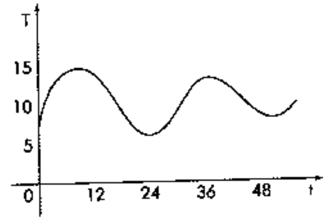


Fig. 1

- Vediamo ora - per contrasto - un fenomeno fisico che viene rappresentato con una legge di tipo discontinuo.

Il grafico qui sotto rappresenta il volume (in cm^3) di un grammo di H_2O in funzione della temperatura (misurata in gradi centigradi) alla pressione ordinaria di 1 atm. Per rendere il disegno più espressivo, si è rappresentato in ordinata, anziché il volume V, il volume diminuito di 1. Il grafico ha un andamento continuo nel tratto $T > 0$ (in cui H_2O è liquida) e anche nel tratto $T < 0$ (in cui H_2O è solida, cioè si presenta come ghiaccio); nel punto $T = 0$ c'è un salto (che, nel disegno, è stato ridotto, per comodità).

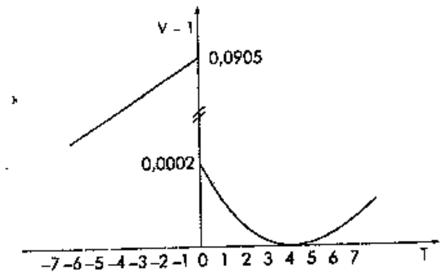


Fig. 2

Riusciamo a 'farci una ragione' dell'esistenza di questa discontinuità (che sembra in contrasto con l'affermazione 'natura non facit saltus'): infatti il punto $T = 0$ è punto di passaggio dalla fase liquida alla fase solida. Come è noto, solidificandosi l'acqua aumenta di volume.

La definizione di funzione continua

Cerchiamo ora di esprimere in termini matematicamente precisi la nozione di funzione di variabile reale, a valori reali, **continua**. Che cosa vogliamo intendere quando diciamo che una funzione f è continua nel punto x_0? Intendiamo che, pur di restare abbastanza vicini ad x_0, i corrispondenti valori di f restano vicini quanto si vuole ad $f(x_0)$. Naturalmente, occorre precisare in termini matematici che cosa si intende per 'vicino': basterà ricordare che la distanza fra due punti della retta reale di coordinate x e y è espressa da $|x - y|$.
Ed ecco allora la definizione, che fu introdotta da Cauchy intorno al 1820, ed è una delle più importanti conquiste del pensiero matematico:

Si dice che la funzione f, a valori reali definita in un insieme D di $\mathbb{R}$ è continua nel punto $x_0 \in D$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tali che per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e appartenente a D si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \qquad 1$$

Per capire questa definizione possiamo pensare - analogamente a quanto abbiamo fatto nel paragrafo 2.1 per la definizione di limite di una successione - a un 'gioco a due': il primo giocatore fissa a suo arbitrio un intervallo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ (dove $y_0 = f(x_0)$), il secondo dovrà contrapporre un $\delta > 0$ tale che, al variare di x nel dominio D di f e nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ il punto $f(x)$ non esca dall'intervallo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$: naturalmente, il primo giocatore, per prevalere, prenderà valori di ε sempre più piccoli; il secondo gli opporrà valori di δ che necessariamente saranno sempre più piccoli (ma sempre positivi, per rispettare le regole del gioco). La strategia del secondo giocatore consisterà dunque nel trovare una 'funzione di risposta' $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$ opportuna.

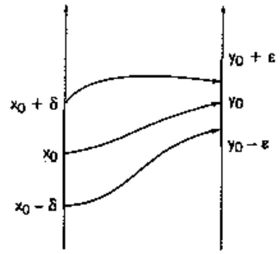


Fig. 3

Abbiamo rilevato che la struttura logica della definizione di continuità è molto vicina a quella della definizione di limite di una successione: più avanti vedremo che queste due nozioni sono strettamente legate.
La definizione di continuità che abbiamo ora dato può essere interpretata in modo espressivo sul grafico della funzione; consideriamo infatti la striscia del piano racchiusa fra le due rette 'orizzontali':

$$y = y_0 - \varepsilon \qquad\qquad y = y_0 + \varepsilon$$

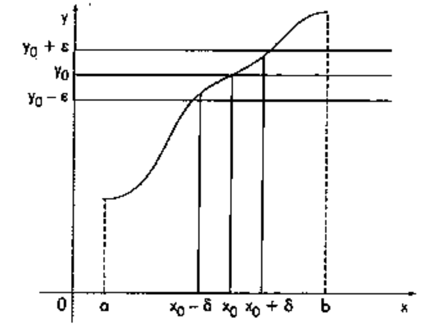


Fig. 4

Ebbene: la nostra definizione esige che si possa trovare un intervallo (abbastanza piccolo) con centro in x_0, in corrispondenza del quale il grafico sia tutto contenuto nella striscia.

La definizione data si completa in modo naturale con la seguente altra:

> **Si dice che la funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è continua in D se è continua in ogni punto di D.**

Può essere utile fare alcune precisazioni sull'uso del termine 'intervallo'. Quando scriviamo $[a, b]$ intendiamo l'insieme dei punti x della retta per cui $a \leq x \leq b$; si tratta dell'intervallo *chiuso*, in cui sono compresi anche gli estremi. Se invece gli estremi non sono compresi, cioè se l'insieme che consideriamo è l'insieme degli x tali che $a < x < b$, si parla dell'intervallo *aperto* (a, b). Infine vi sono gli intervalli $(a, b]$ e $[a, b)$, cui appartiene solo uno dei due estremi.
Un intervallo della retta contenente un intervallo aperto cui appartiene un punto x_0 viene chiamato *intorno* del punto x_0.

Alcuni esempi interessanti

Vediamo qualche esempio interessante di *funzione continua*:

1 La funzione $x \to x$ (identità) è continua

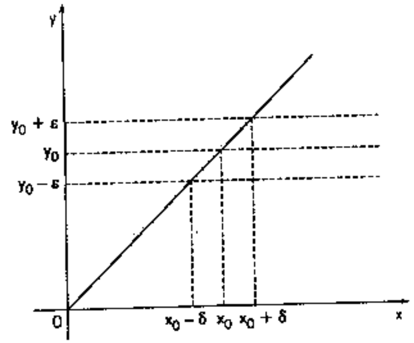


Fig. 5

Prendiamo, infatti, un qualunque punto x_0 e fissiamo un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Vogliamo vedere per quali valori di x è soddisfatta la disuguaglianza:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

cioè, nel nostro caso:

$$|x - x_0| \leq \varepsilon$$

Si vede subito che basta prendere $\delta = \varepsilon$ perché per i punti dell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ la disuguaglianza sia soddisfatta.

2 La funzione $x \to x^2$ è continua.

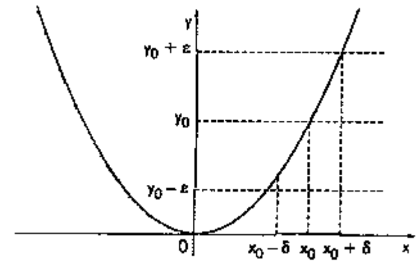


Fig. 6

Prendiamo, infatti, un qualunque punto x_0 e fissiamo un $\varepsilon > 0$, arbitrario. Vogliamo vedere per quali valori è soddisfatta la disuguaglianza:

$$|x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon \qquad 2$$

Per il nostro scopo, però, è inutile trovare tutte le soluzioni di questa disequazione: ci basta poter dimostrare che le soluzioni riempiono un intervallo simmetrico rispetto ad x_0. (Osserviamo che, nelle dimostrazioni di continuità è inutile in generale cercare il δ ottimale, cioè più grande possibile: basta trovare un $\delta > 0$ tale che valga la **1**. Ciò permette spesso di semplificare i calcoli.)
Possiamo allora limitarci a cercare le soluzioni per cui è $|x - x_0| \leq 1$.
La **2** si può scrivere:

$$|x - x_0||x + x_0| \leq \varepsilon$$

Teniamo conto che è $|x + x_0| \leq |x_0| + |x| \leq 2|x_0| + 1$, essendo $|x| \leq |x_0| + 1$.
Pertanto, la **2** è certamente soddisfatta se si ha:

$$|x - x_0|(2|x_0| + 1) \leq \varepsilon$$

cioè:

$$|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}$$

Basta dunque prendere δ uguale al minore dei due numeri: $1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}$ per soddisfare alle condizioni volute dalla definizione. Quindi la funzione $x \to x^2$ è continua.

3 La funzione *reciproco* $x \to \dfrac{1}{x}$, definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, è continua.

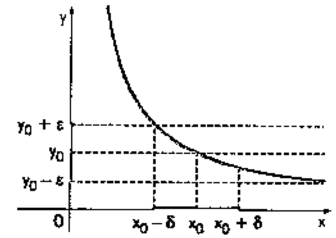


Fig. 7

Sia x_0 un qualsiasi numero reale diverso da 0. Posto $y_0 = \frac{1}{x_0}$, e preso un $\varepsilon > 0$, consideriamo l'intervallo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.
Possiamo supporre che ε sia così piccolo che questo intervallo non includa lo zero. Domandiamoci per quali valori di x è soddisfatta la disuguaglianza:

$$y_0 - \varepsilon \leq \frac{1}{x} \leq y_0 + \varepsilon \qquad \mathbf{3}$$

Supponiamo dapprima che sia $x_0 > 0$; per il modo con cui abbiamo preso ε, si ha $y_0 - \varepsilon > 0$. Dalla **3** ricaviamo allora che è $x > 0$ e, moltiplicando membro a membro per x, otteniamo:

$$x(y_0 - \varepsilon) \leq 1 \qquad 1 \leq x(y_0 + \varepsilon)$$

da cui:

$$\frac{1}{y_0 + \varepsilon} \leq x \leq \frac{1}{y_0 - \varepsilon}$$

L'intervallo $\left[\frac{1}{y_0 + \varepsilon}, \frac{1}{y_0 - \varepsilon}\right]$, in cui vale la **3** contiene nel suo interno il punto x_0; non importa che esso non sia simmetrico rispetto ad x_0: si potrà trovare un intervallo simmetrico contenuto in esso e tale perciò che in esso valga la **3**. Quindi la funzione *reciproco* è continua nel punto x_0, se è $x_0 > 0$. Lasciamo al lettore di apportare alla dimostrazione le semplici varianti che occorrono per il caso $x_0 < 0$.

4 Le funzioni coseno e seno sono continue. La dimostrazione verrà data nel prossimo paragrafo, dopo che avremo dimostrato alcune interessanti proprietà delle funzioni continue.

Per fare meglio risaltare la nozione di continuità diamo qualche esempio di *funzione discontinua*.

5 La funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

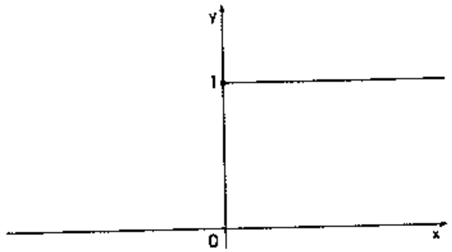


Fig. 8

non è continua nel punto 0, mentre è continua in tutti gli altri punti.

6 La funzione g così definita:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{per ogni } x \text{ razionale} \\ -x & \text{per ogni } x \text{ irrazionale} \end{cases}$$

è continua nel punto 0 e discontinua in tutti gli altri punti. (Non è possibile dare una rappresentazione grafica efficace di questa strana funzione ...).

Lasciamo al lettore la verifica di quanto affermato riguardo a questi esempi.

Continuità a destra e a sinistra

Si dice che f è *continua a destra* nel punto x_0 di D se risulta continua in x_0 la funzione che si ottiene restringendo la definizione di f ai soli punti x di D per cui è $x \geq x_0$.

(In altre parole, si considerano solo i punti di D che stanno a destra di x_0, i punti che stanno alla sinistra vengono ignorati).
Analogamente si definisce la *continuità a sinistra*. Ad esempio, la funzione f dell'esempio **5)** è continua a destra, ma non è continua a sinistra perché in ogni punto a sinistra di 0 vale 0, mentre in 0 vale 1.

Osservazione: la definizione di funzione continua in un punto x_0 - nei termini che abbiamo esposto - è molto generale: non ha bisogno di alcuna ipotesi sul sottoinsieme D della retta reale in cui la funzione è definita e nemmeno sul punto x_0 di D. In particolare, la definizione si applica anche al caso in cui la funzione f sia definita in un intervallo $[a, b]$ e il punto x_0 sia uno degli estremi.

3.2 Prime proprietà delle funzioni continue

Vediamo ora alcune proprietà delle funzioni continue che si deducono abbastanza rapidamente dalla definizione.

TEOREMA 1 **(di permanenza del segno)**
Una funzione f a valori reali che sia continua e positiva in x_0 si mantiene positiva in tutto un intervallo, contenuto nel dominio di f, che ha centro in x_0.

Per ipotesi è $f(x_0) = y_0 > 0$. Poniamo $\varepsilon = \frac{y_0}{2}$. Per la continuità di f in x_0 possiamo trovare un intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, contenuto nel dominio di f, tale che in esso risulti:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Da questa disuguaglianza ricaviamo, in particolare:

$$f(x) - f(x_0) \geq -\varepsilon$$

cioè:

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon = y_0 - \frac{1}{2}y_0 = \frac{1}{2}y_0 > 0$$

Dunque in tutto questo intervallo f si mantiene positiva.

In modo analogo si dimostra che se è $f(x_0) < 0$, la funzione f si mantiene negativa in tutto un intervallo contenuto nel dominio della funzione, con centro x_0.

TEOREMA 2 **La somma di due funzioni reali di variabile reale, entrambe continue in x_0, è una funzione continua in x_0.**

TEOREMA 3 **Il prodotto di due funzioni reali di variabile reale, entrambe continue in x_0, è una funzione continua in x_0.**

Dei teoremi T2 e T3 non diamo la dimostrazione: essi hanno un enunciato molto simile a quello dei teoremi T3 e T4 del cap. 2 riguardanti le successioni e anche le dimostrazioni possono essere modellate su quelle di questi ultimi. (È un ottimo esercizio fare questa specie di trascrizione). Del resto, anche la dimostrazione del teorema T1 (di permanenza del segno) è del tutto simile a quella dell'analogo teorema sulle successioni (T2 del cap. 2).

Funzioni infinitesime

È utile la definizione di funzione infinitesima, analoga a quella di successione infinitesima:

Una funzione si dice infinitesima in x_0 se è continua in x_0 ed è nulla in x_0.

Si vede immediatamente che una funzione è continua in x_0 se e soltanto se $f(x) - f(x_0)$ è infinitesima in x_0. Dunque una funzione f continua in x_0 si può scrivere nella forma $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, dove $\alpha(x)$ è una funzione infinitesima in x_0.
Nella parte finale di questo capitolo, il lettore che abbia desiderio di approfondire (e che abbia una sufficiente dose di tenacia) troverà una nuova dimostrazione dei teoremi T2 e T3, condotta da un punto di vista più generale, assieme ad altri interessanti risultati.
Il seguente teorema è pure molto importante:

TEOREMA 4 **Siano f e g due funzioni reali di variabile reale componibili (cioè tali che il codominio di f sia contenuto nel dominio di g). Sia $f(x_0) = y_0$; allora, se f è continua in x_0 e g è continua in y_0, la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0.**

In breve: la funzione composta di due funzioni continue è una funzione continua.
La dimostrazione è veramente semplice. Sia $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = z_0$; per dimostrare che $g \circ f$ è continua in x_0, prendiamo, come sempre, un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, e consideriamo l'intervallo $[z_0 - \varepsilon,\ z_0 + \varepsilon]$: poiché g è continua in y_0, esiste un $\delta > 0$ tale che l'intervallo $[y_0 - \delta,\ y_0 + \delta]$ sia contenuto nel dominio di g e venga mandato dalla g entro l'intervallo $[z_0 - \varepsilon,\ z_0 + \varepsilon]$. D'altra parte, f è continua in x_0 e pertanto esiste un $\sigma > 0$ tale che l'intervallo $[x_0 - \sigma,\ x_0 + \sigma]$ sia contenuto nel dominio di f e sia mandato dalla f entro l'intervallo $[y_0 - \delta,\ y_0 + \delta]$. Allora è immediato constatare che la $g \circ f$ porta l'intervallo $[x_0 - \sigma,\ x_0 + \sigma]$ entro l'intervallo $[z_0 - \varepsilon,\ z_0 + \varepsilon]$ e questo appunto dice che $g \circ f$ è continua in x_0.
Il disegno rende evidente lo schema della dimostrazione.

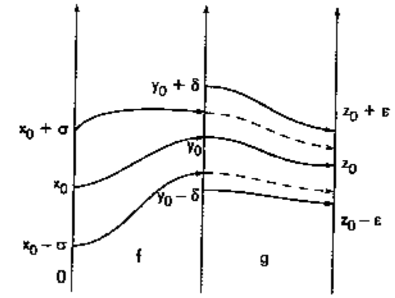


Fig. 9

Si noterà come nella determinazione dei vari intervalli (di ampiezza δ, σ) si proceda 'a ritroso' rispetto all'ordine con cui le funzioni sono composte.
Dai teoremi dimostrati seguono immediatamente alcuni importanti corollari.

COROLLARIO 1 **Il prodotto di una funzione continua per una costante è ancora una funzione continua.**

COROLLARIO 2 **La differenza fra due funzioni continue è una funzione continua.**

COROLLARIO 3 **f è una funzione continua in x_0 ed è $f(x_0) \neq 0$, allora anche la funzione *reciproco* $x \to \dfrac{1}{f(x)}$ è continua in x_0.**

Soltanto quest'ultima affermazione richiede qualche commento: la funzione $x \to \dfrac{1}{f(x)}$ si può pensare composta dalle due funzioni f e g: $y \to \dfrac{1}{y}$; f è, per ipotesi, continua in x_0, g è continua in $y_0 = f(x_0)$ essendo $y_0 \neq 0$ (come si è visto nell'esempio **3** del paragrafo precedente). Basta dunque applicare il T4.

Continuità delle funzioni seno e coseno

Anzitutto dimostriamo che la funzione $x \to \sin x$ è continua nel punto 0. (Essendo $\sin 0 = 0$, ciò equivale, secondo la definizione che abbiamo dato, a dimostrare che la funzione seno è infinitesima nel punto 0).
In un riferimento cartesiano consideriamo il cerchio avente per centro l'origine O. Sia P un generico punto del cerchio e $A \leftrightarrow (1, 0)$. Misurando gli angoli in radianti, possiamo chiamare x sia la misura dell'angolo $\widehat{AOP}$ che la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ (su questo argomento torneremo, con maggiore approfondimento, nel capitolo 5).

In genere si definisce *periodo proprio* della funzione il minimo, se esiste ed è diverso da 0, dei numeri reali positivi T per cui vale $f(x+T)=f(x)$.
Vi sono funzioni che sono periodiche secondo la definizione appena data, ma che non hanno un periodo proprio: ad esempio la funzione costante $x \rightarrow k$ oppure oppure la cosiddetta funzione di Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{per } x \text{ irrazionale}\\ 0 & \text{per } x \text{ razionale}\end{cases}$$

Nel caso della funzione costante, ogni valore reale positivo può essere considerato un periodo; nel caso della funzione di Dirichlet ogni numero razionale positivo T (basta riflettere che la somma di due razionali è razionale, mentre la somma di un razionale e di un irrazionale è un irrazionale).
Sapere che una funzione è periodica permette di farne lo studio su un intervallo di ampiezza uguale al periodo. Basterà poi replicare quello che si è ottenuto su tutto l'asse reale per ottenere il grafico della funzione nella sua interezza.

Funzioni monotòne

Si dice che f è *crescente* se per ogni coppia di punti x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$; si dice *non decrescente* se per ogni coppia di punti x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Analogamente, f si dice *decrescente* se per ogni coppia di punti x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$; si dice *non crescente* se per ogni coppia di punti x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$.

La conoscenza degli intervalli in cui una funzione cresce o decresce può essere utile per tracciarne correttamente il grafico.

3.4 I limiti delle funzioni

Spesso ci si imbatte in questo problema: è data una funzione f, a valori reali, definita in un intervallo della retta reale, a eccezione di un punto x_0; ci si domanda: la si può definire anche nel punto x_0 in modo che risulti continua in x_0?
Consideriamo, ad esempio, la funzione:

$$x \rightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \qquad \mathbf{4}$$

definita per $x \geq 0$, eccetto che per $x = 2$.

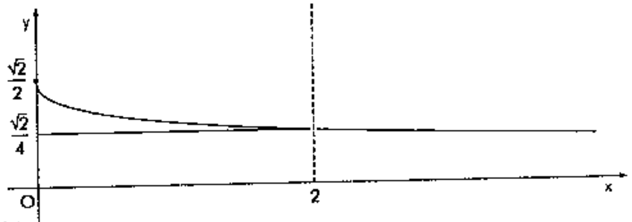


Fig. 14

Possiamo definirla anche nel punto 2 in modo che risulti continua? In questo caso la risposta risulta affermativa, come si vede facilmente con un artificio. Infatti, per $x \geq 0$, si può scrivere:

$$x-2=(\sqrt{x}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{2})$$

Allora si ha:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

È possibile dimostrare (vedi esercizio svolto 16 di questo capitolo) che la funzione $x \rightarrow \sqrt{x}$ è continua; poiché la funzione *somma* e la funzione *reciproco* sono continue, la funzione:

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \qquad \mathbf{5}$$

è continua anche per $x = 2$ e ha valore $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

La funzione assegnata **4** coincide, dove è definita, con la funzione **5**, che è definita e continua anche nel punto $x = 2$. È chiaro perciò che la **4** può essere definita anche nel punto $x = 2$ $\left(\text{col valore } \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ in modo da risultare continua.

Consideriamo invece la funzione *segno di x* che è definita per $x \neq 0$ in questo modo:

$$sgn(x)=\begin{cases}1 & \text{per } x>0\\ -1 & \text{per } x<0\end{cases}$$

Essa non può essere definita in in modo tale da risultare continua.

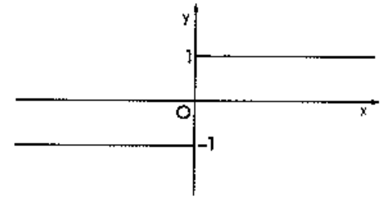


Fig. 15

L'esame del grafico rende evidente l'affermazione; facciamo, comunque, un ragionamento preciso: assegnamo alla funzione per $x = 0$ un valore λ. Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$. Se la funzione così definita fosse continua si potrebbe trovare un $\delta > 0$ tale che, al variare di x nell'intervallo $[-\delta, \delta]$, i valori della funzione appartengano all'intervallo $[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$; ma questo è impossibile se si prende $\varepsilon < 1$. Infatti, comunque si prenda λ, fra i valori della funzione ci sono 1 e -1 che distano fra loro di 2 e che, pertanto, non possono essere contenuti in uno stesso intervallo di ampiezza minore di 2.
Diamo a questo punto una definizione precisa; **supporremo che f sia una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ della retta reale (o anche in un intervallo illimitato) eccetto che in un suo punto x_0.**

Si dice che la funzione f ha come limite λ al tendere di x ad x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

se ponendo $f(x_0) = \lambda$ la funzione f risulta continua in x_0.

Ricordando la definizione di funzione continua in un punto, possiamo porre la definizione in quest'altra forma equivalente:

Si dice che la funzione f tende al limite λ al tendere di x ad x_0, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

se per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un numero δ positivo tale che per ogni x del dominio di f per cui è $|x - x_0| < \delta$, risulti:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \textbf{6}$$

Abbiamo supposto la funzione f non definita per $x = x_0$. Se la funzione f fosse definita nel punto x_0, occorrerebbe prescindere da questo valore; in questo caso il limite λ potrebbe benissimo risultare diverso dal valore $f(x_0)$ (in certi vecchi trattati di calcolo infinitesimale, il limite veniva detto 'valore vero' della funzione f nel punto x_0: si voleva sottolineare che tra tutti i valori che si possono attribuire alla f nel punto x_0 è da preferirsi quello che rende continua la funzione, cioè il limite). Nell'enunciare la definizione di limite in questo caso, basta evidentemente che la **6** valga per $x \neq x_0$.
Il termine 'limite' è già stato impiegato a proposito delle successioni. Viene spontaneo domandarsi: è proprio molto diversa la definizione di limite di una successione da quella di limite di una funzione?
Confrontando le due definizioni, ci accorgiamo che non solo esse hanno la stessa struttura logica (pensiamo al solito 'gioco a due'...) ma che esse, con un'opportuna interpretazione, diventano coincidenti.
Nel caso di una successione a_n, la relazione:

$$\lim a_n = \lambda$$

significa che, per ogni numero $\varepsilon > 0$, esiste un intero m tale che, per $n \geq m$ si ha:

$$|a_n - \lambda| \leq \varepsilon \qquad \textbf{7}$$

Nel caso di una funzione f, la relazione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

significa che, per ogni numero $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ tale che nell'insieme $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ (ad eccezione del punto x_0) si ha:

$$|f(x) - \lambda| \leq \varepsilon \qquad \textbf{8}$$

Come si vede, mentre la **7** deve valere per $n \geq m$, la **8** deve valere per $|x - x_0| < \delta$. L'analogia è perfetta se si considerano gli interi n con $n \geq m$ 'vicini' al punto $+\infty$, alla stessa maniera con cui i punti per cui è $|x - x_0| < \delta$ si pensano 'vicini' al punto x_0.

Alcune proprietà del limite

In base a questa analogia è facilissimo dimostrare le seguenti affermazioni ricalcando le dimostrazioni che abbiamo fatto nei paragrafi 2.1 e 2.2 per i limiti delle successioni:

- Il limite è unico (effettivamente, se non vi fosse stato questo risultato di unicità, non sarebbe stato neppure lecito impiegare la notazione $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$, che presenta il limite come un'operazione univoca).
- Date due funzioni f e g definite in uno stesso intervallo, escluso il punto x_0 dell'intervallo stesso, se si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda_1, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda_2$$

allora risulta:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

- Se è $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ ed è $\lambda \neq 0$, allora si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}$$

Una dimostrazione delle affermazioni riguardanti il limite della somma, del prodotto di funzioni e del reciproco di una funzione può essere ottenuta utilizzando i teoremi analoghi che riguardano la continuità.
Vediamo, ad esempio, la dimostrazione nel caso della somma. Sia dunque:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda_1, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda_2$$

Allora, la funzione f diventa continua in x_0 se si pone $f(x_0) = \lambda_1$, mentre la funzione g diventa continua in x_0 se si pone $g(x_0) = \lambda_2$. La somma delle funzioni così ottenute: $f + g$ è continua in x_0 e vi assume il valore $\lambda_1 + \lambda_2$. Ciò significa (ricordando la definizione di limite nella sua prima formulazione) che $\lambda_1 + \lambda_2$ è il limite della funzione $f + g$.
Analogamente si procede per le altre affermazioni.
In modo analogo a quanto già visto per le successioni si può stabilire il significato delle relazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e altre analoghe.
Per ciascuna delle relazioni scritte si chiede di formulare la definizione precisa e di fornire almeno un esempio.

Limiti di funzioni e limiti di successioni

Il seguente risultato - del tutto intuibile e di uso frequente - assomiglia molto al teorema di composizione delle funzioni continue che abbiamo dimostrato nel paragrafo 3.2.

TEOREMA 5

Sia x_n una successione reale tale che $\lim x_n = \bar{x}$; sia f una funzione reale definita in un insieme D della retta reale comprendente tutti i punti x_n e il punto $\bar{x}$, e continua in $\bar{x}$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\bar{x})$$

Dimostrazione: Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$, ad arbitrio. Per la continuità di f in $\bar{x}$, si può trovare un $\delta > 0$ tale che, se $|x - \bar{x}| \leq \delta$, con $x \in D$, si ha $|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$. A questo punto, determiniamo un m intero, tale che per $n \geq m$ risulti $|x_n - \bar{x}| \leq \delta$. Si ha allora, sempre per $n \geq m$:

$$|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

Come si vede, anche la dimostrazione è molto simile a quella del teorema di composizione delle funzioni continue.

Limiti da destra e da sinistra

È abbastanza ovvio che cosa debba intendersi per limite di una funzione al tendere di x ad x_0 da destra (o da sinistra). Il limite da destra di una funzione f coincide con il limite della funzione che si ottiene restringendo l'insieme di definizione di f ai soli punti x per cui è $x > x_0$. In altre parole, richiamandoci a quanto abbiamo detto nell'osservazione conclusiva del paragrafo 3.1, il limite al tendere di x ad x_0 da destra è quel valore che si deve attribuire ad f nel punto x_0 perché essa sia continua a destra. Ad esempio, la funzione *parte intera* $x \to [x]$ ha per ogni valore intero n sia il limite da destra (uguale ad n) sia il limite da sinistra (uguale ad $n - 1$).

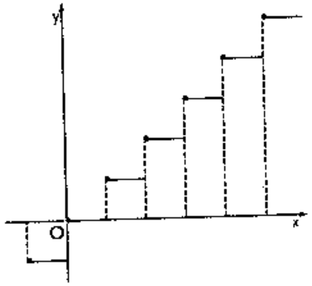


Fig. 16

Il fatto che questi due limiti non coincidono ci dice che la funzione *parte intera* è discontinua (cioè non continua) nei punti interi; tuttavia essa è continua a destra anche in questi punti (perché il valore coincide con il limite da destra).

Useremo le notazioni:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

per indicare i limiti di f al tendere di x ad x_0 da destra e da sinistra, rispettivamente.

3.5 Le funzioni monotòne e i loro limiti

Un'importante proprietà delle funzioni monotòne, analoga a quella espressa dal **T10** del paragrafo 2.4, è la seguente:

TEOREMA 6

Per ogni punto x_0 interno all'intervallo I di definizione una funzione monotòna ammette limiti finiti da destra e da sinistra.

Dimostrazione. Supponiamo f non decrescente. Consideriamo l'insieme dei valori che f assume a sinistra di x_0, cioè l'insieme $\{f(x) : x < x_0\}$. Esso è certamente non vuoto (infatti esistono punti di I a sinistra di x_0) ed è limitato superiormente (infatti per ogni $x < x_0$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$); allora esso ha un estremo superiore, che indicheremo con l. Dimostriamo che l è il limite da sinistra. Preso un $\varepsilon > 0$, esiste, per la definizione di estremo superiore, un punto $\bar{x}$ tale che $\bar{x} < x_0$ e che sia:

$$l - \varepsilon < f(\bar{x}) \leq l$$

Essendo la funzione f non decrescente, si avrà, per ogni x tale che $\bar{x} \leq x < x_0$:

$$l - \varepsilon \leq f(\bar{x}) \leq f(x) \leq l$$

Dunque per tutti i punti a sinistra di x_0 e tali che $0 < |x - x_0| \leq |x_0 - \bar{x}|$ si ha $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. Ciò dice appunto che il limite da sinistra è l.

Analogamente si dimostra che esiste il limite da destra. Anche l'estensione della dimostrazione al caso delle funzioni non crescenti è ovvia.
La dimostrazione del teorema mette in evidenza, per una funzione f non decrescente, la disuguaglianza:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

I limiti da destra e da sinistra possono essere diversi (si pensi alla funzione *parte intera*); *quando coincidono, il loro valore comune non può essere che $f(x_0)$ e la funzione f risulta continua in x_0.*

Osservazione: la dimostrazione del teorema sussiste anche se la funzione f non è definita in x_0 (ferma restando l'ipotesi che f sia monotòna in $I \setminus \{x_0\}$ e che x_0 sia interno ad I).