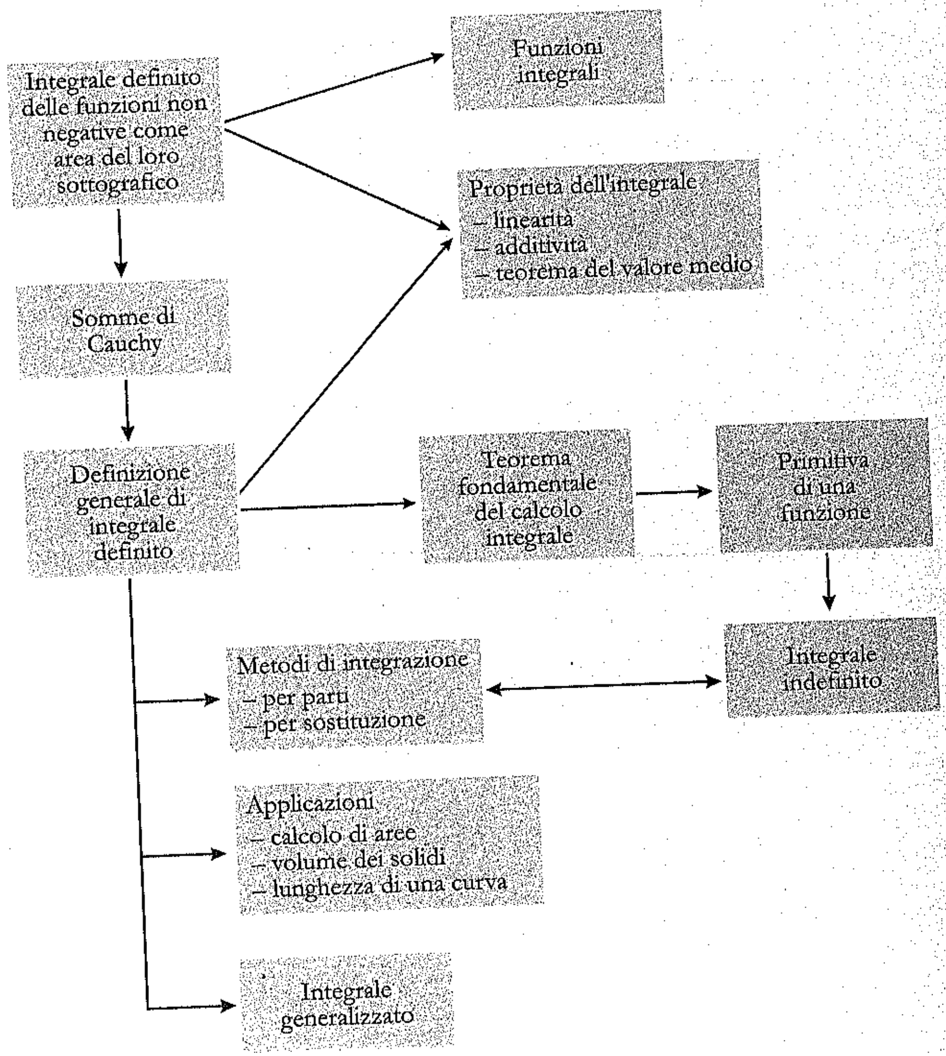
MAPPA CONCETTUALE SECONDA PARTE



Da: G. Prodi e altri: Calcolo differenziale e calcolo integrale
Ghisetti e Corvi 2006

CAPITOLO 8

LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE

OBIETTIVI

L'*obiettivo generale* è quello di arrivare al concetto di integrale, partendo dall'osservazione che esso ha avuto origine storicamente da due problemi apparentemente distanti tra loro che sono però strettamente connessi: il *problema della misura*, cioè quello di dare metodi generali per il calcolo delle lunghezze delle aree e dei volumi, e il *problema della primitiva* di una funzione, cioè quello della ricerca di tutte le funzioni che abbiano per derivata una funzione data.
Noi seguiremo la prima via, definendo anzitutto il concetto di integrale definito e poi dimostrando il teorema fondamentale del calcolo integrale, che risponde al secondo problema.

Obiettivi specifici sono:

- L'integrale definito di una funzione f non negativa in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, come area del sottografico di f.
- La sua caratterizzazione come limite delle cosiddette *somme di Cauchy.*
- La definizione generale dell'integrale definito, anche per funzioni f di segno qualunque e definite su intervalli orientati.
- La dimostrazione delle proprietà dell'integrale definito di: omogeneità, additività rispetto alla funzione f, addittività rispetto all'intervallo di integrazione, linearità, isotonia.
- L'integrabilità di alcune classi di funzioni.
- Il teorema della media integrale.
- Il teorema fondamentale del calcolo integrale.
- La definizione di integrale indefinito come famiglia di tutte le primitive di una funzione f continua in $[a, b]$.

8.1 Introduzione

Uno strumento matematico di straordinaria importanza è il cosiddetto *calcolo integrale.* Il concetto di **integrale** ha avuto origine storicamente da due problemi apparentemente distanti tra loro: da una parte il *problema della misura* cioè quello di dare metodi generali per il calcolo delle lunghezze, delle aree e dei volumi, e dall'altra il *problema della* ***primitiva*** *di una funzione*, cioè quello della ricerca di tutte le funzioni che abbiano per derivata una funzione data.
Per mostrare come questi problemi siano tra loro connessi riprendiamo l'esempio del *moto rettilineo* già considerato nel § 1.1. Un'automobile provvista di tachimetro si muova su una strada rettilinea e se ne registri l'andamento della velocità dalla partenza, avvenuta dal paese A al tempo $t = 0$. In questo modo conosciamo la funzione velocità $t \to v(t)$ per $t \geq 0$. Supponiamo che l'auto non possieda contachilometri mentre noi vogliamo sapere quanti chilometri abbia-

mo percorso all'istante t_0, cioè vogliamo conoscere $s(t_0)$, sapendo che per ogni $t < t_0$

$$s'(t) = v(t)$$

È ovvio che se la velocità è rimasta costante, $v(t) = k$, in $[0, t_0]$ allora il moto è stato uniforme e lo spazio percorso $s(t_0)$è dato da kt_0 e dunque proprio dall'area del cosiddetto *sottografico* o *trapezoide* della funzione v nell'intervallo $[0, t_0]$ (cfr. Fig. 1). Ricordiamo che per *sottografico* o *trapezoide* di una funzione $x \to f(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$ e a valori non negativi si intende l'insieme T di punti del piano (cfr. Fig. 2)

$$T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \qquad \mathbf{1}$$

Si tratta dunque dell'insieme che è racchiuso fra il grafico della funzione e l'asse delle x e fra le due rette verticali di ascissa a e b.

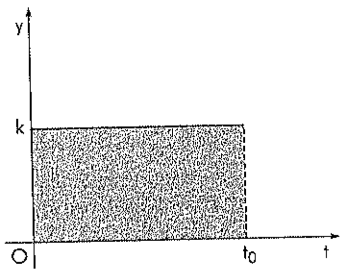


Fig. 1

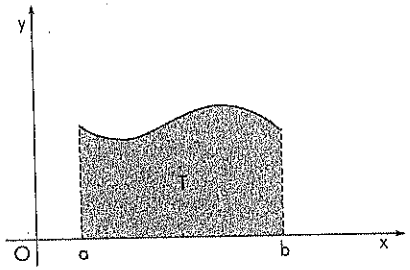


Fig. 2

Vediamo cosa succede in un altro caso particolare, quello del *moto uniformemente accelerato*; sappiamo che ora la velocità $v(t)$ è espressa da $v(t) = kt$ con k costante positiva e che lo spazio percorso dal nostro veicolo nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$ è dato da

$$s(t_0) = \frac{k}{2} t_0^2$$

Risulta così che anche in questo caso lo spazio $s(t_0)$ è dato dall'area del trapezoide di v nell'intervallo $[0, t_0]$ (cfr. Fig. 3).

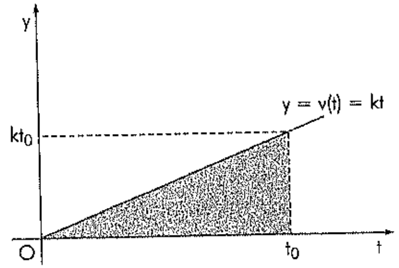


Fig. 3

Ebbene, è questo un risultato generale, valido anche se il moto non è né uniforme né uniformemente accelerato; vedremo infatti in questo capitolo come lo *spazio percorso in* $[0, t_0]$ *sia sempre dato dall'area del trapezoide di* v *in*

$[0, t_0]$. E poiché t_0 nell'esempio può essere un qualunque valore di t maggiore di zero, possiamo concludere in questo caso particolare che la conoscenza dell'area del sottografico di v ci permette di conoscere una primitiva s di v per ogni $t > 0$. Dunque il *problema della primitiva* di una funzione è strettamente collegato a quello dell'area. Lo strumento matematico che realizza questo legame è l'*integrale* di una funzione.

8.2 L'integrale definito delle funzioni non negative

Cominciamo col ricordare che una funzione f a valori reali si dice limitata se l'insieme dei valori assunti da f è limitato superiormente e inferiormente, cioè se esistono due reali M ed N tali che, per ogni x dell'insieme di definizione di f, sia $M \leq f(x) \leq N$.
Diamo ora la definizione di integrale per le funzioni non negative:

Se $x \to f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$, ivi limitata e non negativa, si dice che essa è *integrabile* in $[a, b]$ se il suo trapezoide T è misurabile (cfr. Fig. 1); l'area di T è detta *integrale* di f in $[a, b]$ ed è indicata con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sui motivi per cui si adotta questo simbolo, che a prima vista può apparire complicato, ritorneremo tra poco.
Cerchiamo ora un criterio che permetta di stabilire quando il trapezoide T di una funzione definita in $[a, b]$ è misurabile; ricordando la definizione di area, cercheremo di introdurre dei plurirettangoli inscritti e circoscritti a T che tengano conto della forma particolare di T.

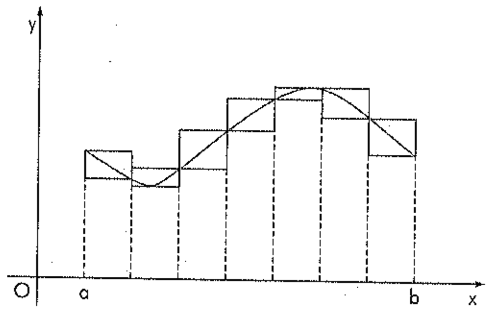


Fig. 4

Procediamo così: suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli uguali mediante i punti:

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}, \ \ldots, \ x_k = x_0 + k\frac{b-a}{n}, \ \ldots, \ x_n = b \qquad \mathbf{2}$$

In ciascuno di questi intervalli consideriamo l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione. Indicheremo con l'_k l'*estremo inferiore* di f nell'intervallo

$[x_{k-1}, x_k]$, con l''_k l'estremo superiore nello stesso intervallo. (Nei casi più comuni questi saranno, rispettivamente, il minimo e il massimo di f in $[x_{k-1}, x_k]$).

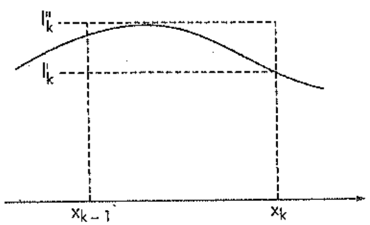


Fig. 5

In corrispondenza dell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ abbiamo dunque due rettangoli con la stessa base $[x_{k-1}, x_k]$ e con altezze l'_k e l''_k, rispettivamente; il primo è contenuto in T, il secondo contiene certamente la parte di T che sta nella striscia: $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. Ripetendo questa procedura per ogni intervallino della nostra suddivisione otteniamo due plurirettangoli (uno *contenuto* in T e l'altro *contenente* T) di aree (rispettivamente):

$$\alpha'_n = \sum_{k=1}^{n} l'_k \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(l'_1 + l'_2 + \dots + l'_n)$$
$$\alpha''_n = \sum_{k=1}^{n} l''_k \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(l''_1 + 1''_2 + \dots + l''_n) \qquad \mathbf{3}$$

Ricordiamo il simbolo $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ significa $f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$ (vedi ad esempio il volume *Verso L'Infinito*, paragrafo 1.3).

Ebbene, se, al tendere di n all'infinito, le due successioni α'_n, α''_n tendono ad un medesimo limite, allora l'insieme T è misurabile e la sua area è il limite comune delle successioni α'_n ed α''_n.

Infatti, poniamo $I = lim\, \alpha'_n = lim\, \alpha''_n$. Preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$, possiamo trovare un plurirettangolo contenuto in T di area $\alpha'_n > I - \varepsilon$ ed un plurirettangolo contenente T di area $\alpha''_n \leq I + \varepsilon$. Questo ci dice che T è misurabile con area I. Abbiamo dunque dimostrato il seguente

TEOREMA 1 **Se esistono i limiti delle successioni α'_n, α''_n, definite dalla 3, e coincidono, la funzione f è integrabile.**

Sussiste anche la proposizione inversa, cioè

TEOREMA 2 **Se f è integrabile (cioè se l'insieme T è misurabile), allora i due limiti 3 esistono e coincidono fra loro.**

Ricordiamo che se la definizione originaria dell'*area* impiega le quadrettature decimali come viene di solito fatto (vedi ad esempio il volume *Verso L'Infinito*, capitolo 6), allora si tratta di vedere che, nel caso di un trapezoide di base $[a, b]$, utilizzando le striscioline verticali che si ottengono dividendo l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini di uguale ampiezza, si arriva al medesimo risultato cui si arriva impiegando le quadrettature decimali.

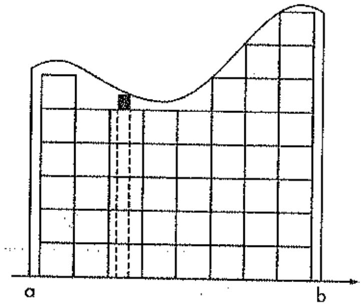


Fig. 6a

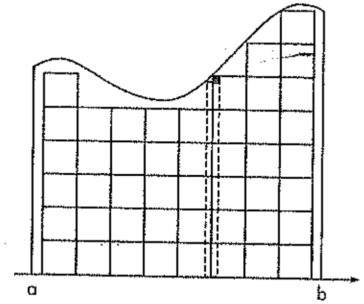


Fig. 6b

Ecco più precisamente la dimostrazione.

Sia $l(x) \geq 0$ per $\forall x \in [a, b]$; sia L l'estremo superiore della funzione in $[a, b]$. Essendo T misurabile, per $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+_0$ esiste un intero l tale che il pluriquadrato D,estratto dalla quadrettatura con quadratini di lato $\frac{1}{10^l}$, inscritto in T soddisfi alla disuguaglianza

$$m(T) - \varepsilon \leq m(D)$$

Suddividiamo ora l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali e consideriamo la somma

$$\alpha'_n = \sum_{k=1}^{n} l'_k \frac{b-a}{n}$$

che rappresenta l'area del plurirettangolo Q inscritto in T, formato da rettangolini di spessore $\frac{b-a}{n}$. Per ora non diciamo come deve essere preso n.

Domandiamoci se Q ricopre D; teniamo presente che D consta di colonne di quadratini che stanno fra due rette parallele all'asse y, di ascissa $\left[\frac{m-1}{10^l}, \frac{m}{10^l}\right]$, essendo l un intero relativo. Consideriamo dunque un rettangolino di Q che abbia come base un intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ tutto contenuto in un intervallo $\left[\frac{m-1}{10^l}, \frac{m}{10^l}\right]$; il rettangolino ha un'altezza l'_k che è certamente maggiore o uguale all'altezza complessiva della colonna di quadratini (infatti D è contenuto in T: l'altezza della colonna dei quadratini non può superare l'estremo inferiore di f in $\left[\frac{m-1}{10^l}, \frac{m}{10^l}\right]$ e, a maggior ragione, non può superare l'_k - cfr. Fig. 6a).

Allora quali sono i punti di D che eventualmente non stanno in Q? Essi appartengono a strisce aventi come base intervalli $[x_{k-1}, x_k]$ che contengono numeri del tipo $\frac{m}{10^l}$ (cfr. Fig. 6b): diciamo s il numero di questi, il numero s dipende da n

ed è $s(n) \leq m+1$. Dunque, i punti di D che non stanno in Q appartengono all'unione di s rettangolini di spessore $\frac{b-a}{n}$ e di altezza non superiore a L. Possiamo dunque scrivere

$$\alpha'_n = m(Q) \geq m(D) - s(n)L\frac{b-a}{n}$$

È ora il momento di precisare n. Si può trovare un $\overline{n}$ tale che per $n \geq \overline{n}$ sia

$$s(n)L\frac{b-a}{n} \leq (m+1)L\frac{b-a}{n} \leq \varepsilon$$

$$n \geq \frac{(m+1)L(b-a)}{\varepsilon}$$

$$\overline{n} = \left[\frac{(m+1)L(b-a)}{\varepsilon}\right] + 1$$

Dunque per $n \geq \overline{n}$:

$$\alpha'_n = m(Q) \geq m(D) - \varepsilon \geq m(T) - 2\varepsilon$$

Pertanto, per $n \geq \overline{n}$:

$$m(T) - 2\varepsilon \leq \alpha'_n \leq m(T)$$

Questa relazione ci dice (in base alla definizione stessa di limite) che

$$\lim_{n\to\infty} \alpha'_n = m(T)$$

Analogamente si procede per la successione α''_n.

Facciamo ancora un'osservazione interessante: fatta la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in n parti di uguale ampiezza, e indicando con t_k un qualunque punto dell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ si ha

$$l'_k \leq f(t_k) \leq l''_k$$

(per definizione stessa di estremo inferiore e superiore); perciò si ha:

$$\alpha'_n = \sum_{k=1}^{n} l'_k \frac{b-a}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{b-a}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} l''_k \frac{b-a}{n} = \alpha''_n$$

Dunque, se f è integrabile, comunque scegliamo negli intervalli $[x_{k-1}, x_k]$ i punti t_k, otteniamo una successione:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{b-a}{n} \qquad \textbf{4}$$

che, per una nota proprietà dei limiti (il **teorema dei due carabinieri**), converge verso il comune limite delle due successioni α'_n, α''_n, cioè verso

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \textbf{5}$$

Quanto abbiamo detto ora, anzi, dà una motivazione alla notazione dell'integrale: il simbolo $\int$ non è altro che la lettera S secondo un'antica grafia; sta ad indicare *somma* e ci ricorda che l'integrale è il limite di una sommatoria. L'espressione $f(x)dx$ vorrebbe indicare il prodotto di $f(x)$per dx, cioè per un infinitesimo della grandezza x; in realtà $f(x)dx$ sta a ricordarci l'espressione $f(t_k)\frac{b-a}{n}$ che compare nella **4**. Dunque, la **5** vorrebbe rappresentare l'integrale come *somma di infiniti infinitesimi*, mentre non possiamo che intenderlo, in base alla **4**, come limite di una somma finita. Tuttavia la notazione **5** è espressiva e ci suggerisce spontaneamente certe operazioni utili, come vedremo.

Osserviamo ancora che la variabile x che compare nella **5**, è una variabile muta, cioè non compare nel risultato finale, così come l'indice i della sommatoria $\sum_{i=1}^{n} a_i$, e può essere sostituita da una qualunque altra lettera.

Vediamo ora come, usando il teorema **T1**, si possa stabilire l'integrabilità di un'ampia classe di funzioni.

TEOREMA 3 **Una funzione definita in $[a, b]$, limitata, a valori non negativi e monotòna è integrabile.**

L'idea che sta alla base della dimostrazione è stata già utilizzata per dimostrare la misurabilità del disco (vedi ad esempio il volume *Verso L'Infinito*, paragrafo 6.3). Possiamo supporre che la funzione f, definita in $[a, b]$, sia non decrescente (le varianti da adottare nel caso di una funzione non crescente sono ovvie).

Consideriamo la solita suddivisione operata dai punti $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, con $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Essendo la funzione non decrescente, si ha in ogni intervallo:

$$l'_k = f(x_{k-1}); \quad l''_k = f(x_k)$$

(cioè: l'estremo inferiore coincide con il valore assunto nell'estremo sinistro e l'estremo superiore coincide con il valore assunto nell'estremo destro, in ogni intervallino).

Confrontiamo le due somme **3** facendone la differenza:

$$\alpha''_n - \alpha'_n = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\frac{b-a}{n} =$$

$$= \frac{b-a}{n}[(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))] =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

La Figura 7 dà un'evidente interpretazione del calcolo fatto: la differenza fra l'area del plurirettangolo circoscritto e quella del plurirettangolo inscritto coincide con l'area di un rettangolo di base $\frac{b-a}{n}$ e di altezza $f(b) - f(a)$.

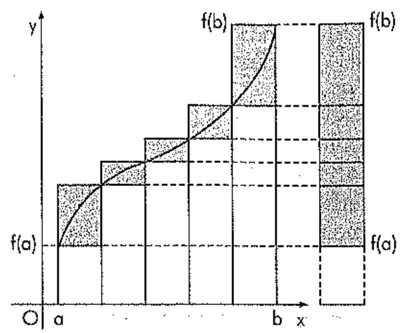


Fig. 7

È evidente allora che $\lim_{n \to \infty} (\alpha''_n - \alpha'_n) = 0$, quindi il trapezoide T è misurabile e la sua area è il limite comune delle successioni α'_n, α''_n.

COROLLARIO 1 **Sia f una funzione non negativa limitata definita in $[a, b]$; supponiamo che questo intervallo si possa scomporre in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali f è monotòna; allora f è integrabile.**

È evidente infatti che in questo caso il trapezoide T si può scomporre in un numero finito di trapezoidi, T_1, T_2, ..., T_m tutti misurabili in virtù del teorema precedente e aventi, a due a due, in comune al più un segmento; allora per le proprietà della misura, T è misurabile e la sua misura è uguale alla somma della misure dei T_i (cfr. Fig. 8).

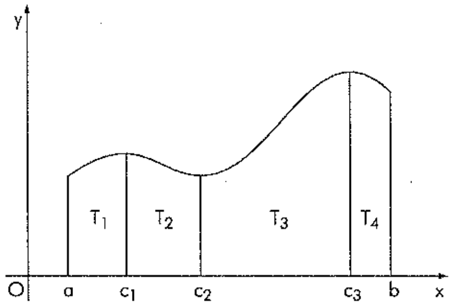


Fig. 8

Un altro importante risultato è espresso dal seguente

TEOREMA 4 **Ogni funzione non negativa e continua in $[a, b]$ è integrabile.**

Non daremo la dimostrazione di questo teorema, che coinvolge considerazioni piuttosto delicate (malgrado il suo carattere fortemente intuitivo). Per tutte le funzioni di uso più frequente sarà del resto sufficiente il **C1**.

Deduciamo le principali proprietà dell'integrale ora definito; tutte le funzioni che considereremo si intendono definite nell'intervallo $[a, b]$.

I Se f è integrabile e non negativa e k è un numero reale positivo o nullo, anche kf è integrabile e si ha

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Basta pensare alla definizione di area ed osservare che il trapezoide di kf si ottiene da quello di f moltiplicando ogni altezza per il fattore k (il che equivale a cambiare unità di misura sull'asse delle y).

II Se f e g sono integrabili e non negative, anche $f + g$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Costruiamo per la funzione $f + g$ le due successioni α'_n, α''_n definite dalla **3**. Indichiamo con l'_k ed l''_k, rispettivamente, gli estremi inferiori e superiori della funzione $f + g$, con f'_k, f''_k gli estremi inferiore e superiore della f, con g'_k e g''_k gli estremi inferiore e superiore della g nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Si ha, per $x \in [x_{k-1}, x_k]$:

$$f'_k \le f(x) \le f''_k \qquad g'_k \le g(x) \le g''_k$$

Sommando membro a membro

$$f'_k + g'_k \le f(x) + g(x) \le f''_k + g''_k \tag{6}$$

Ne segue che $f'_k + g'_k$ è una limitazione inferiore per $f + g$, sempre nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, mentre $f''_k + g''_k$ è una limitazione superiore. Allora si ha certamente

$$f'_k + g'_k \le l'_k \le l''_k \le f''_k + g''_k \tag{7}$$

Dalla **7** moltiplicando membro a membro per il numero (positivo) $\dfrac{b-a}{n}$ e sommando rispetto all'indice k (da 1 ad n) si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n} f'_k \frac{b-a}{n} + \sum_{k=1}^{n} g'_k \frac{b-a}{n} \le \sum_{k=1}^{n} l'_k \frac{b-a}{n} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} l''_k \frac{b-a}{n} \le \sum_{k=1}^{n} f''_k \frac{b-a}{n} + \sum_{k=1}^{n} g''_k \frac{b-a}{n}$$

Ma, per i teoremi sui limiti delle successioni, i due membri esterni di questa catena di disuguaglianza tendono verso

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Ne segue che i due membri interni tendono allo stesso limite; dunque $f + g$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

III Se f è integrabile e non negativa in $[a, b]$ e c è tale che $a < c < b$, allora f è integrabile in $[a, c]$ e $[c, b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Basta pensare che il trapezoide T di f in $[a, b]$ è l'unione dei due trapezoidi T_1 e T_2 di f in $[a, c]$ e $[c, b]$ e che ciascuno di essi è misurabile perché ottenuto come intersezione di T rispettivamente con il rettangolo $[a, c] \times [0, L]$ e $[c, b] \times [0, L]$ dove L è l'estremo superiore di f in $[a, b]$ (cfr. Fig. 9).

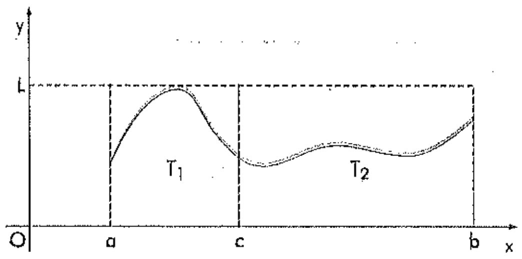


Fig. 9

IV Se f e g sono integrabili e non negative e si ha $f(x) \leq g(x)$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Basta osservare che il trapezoide relativo ad f è contenuto in quello relativo a g e ricordare la proprietà di isotonia dell'area (Si veda la **2** del paragrafo 6.1 del volume *Verso l'Infinito*).

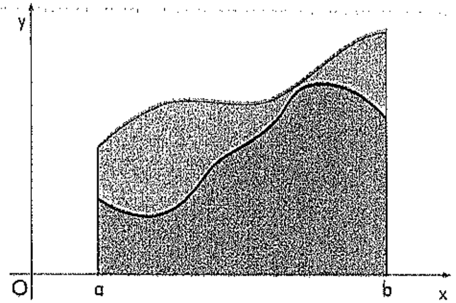


Fig. 10

8.3 La definizione generale di integrale definito

Fino ad ora abbiamo considerato soltanto l'integrale di funzioni non negative e la nozione di integrale è stata ricondotta a quella di area (l'area del sottografico della funzione).
Ora vogliamo estendere l'integrale a funzioni che possono assumere anche valori negativi; nello stesso tempo vogliamo dare all'integrale una struttura algebrica più ricca. Il passo che ci accingiamo a fare è analogo a quello che abbiamo

compiuto all'inizio dell'algebra, quando siamo passati dai numeri assoluti ai numeri relativi. Anche in questo caso la definizione di integrale verrà estesa in modo da conservare le principali proprietà formali: quella che più ci interessa è la **II**, cioè l'additività rispetto alla funzione da integrare:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \textbf{8}$$

Consideriamo allora in primo luogo il caso in cui la funzione f di cui vogliamo definire l'integrabilità sia non positiva e precisamente sia l'opposta di una funzione g non negativa e integrabile, cioè $f(x) = -g(x)$ e $g(x) \geq 0$ e integrabile. Allora, essendo $f(x) + g(x) = -g(x) + g(x) = 0$, si ha che $f + g$ è integrabile e

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = 0$$

Se allora vogliamo che valga la **8** deve essere

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = 0$$

cioè ricordando che $f(x) = -g(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b (-f(x))dx \qquad \textbf{9}$$

Siamo così portati a dire che

una funzione f non positiva è integrabile se lo è la funzione opposta $g = -f$ e il suo integrale è l'opposto dell'integrale della g.

Dal punto di vista dell'interpretazione geometrica ciò significa che risulta misurabile l'insieme

$$T' = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

il quale si ottiene dal sottografico T della funzione $g = f$ per simmetria rispetto all'asse x (cfr. Figg. 11 e 12).

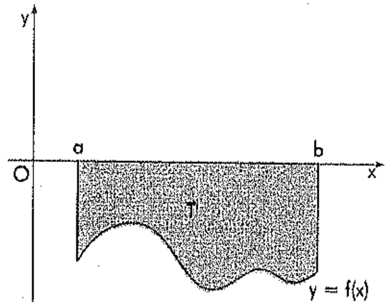


Fig. 11

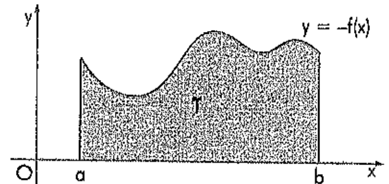


Fig. 12

I due insiemi T e T' hanno la stessa area. L'integrale, quindi, è l'area di T cambiata di segno.

Consideriamo ora una funzione f che sia differenza di due funzioni g e h entrambe non negative e integrabili:

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

Volendo far valere ancora la **8** e tener conto delle osservazioni precedenti si dovrà porre

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (-h(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

Viene allora naturale introdurre la seguente definizione

Una funzione $x \to f(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$ ed ivi limitata si dice *integrabile* se è differenza di due funzioni integrabili non negative g ed h; l'integrale (definito) di f in $[a, b]$ si pone, per definizione, uguale alla differenza degli integrali di queste, cioè

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx \qquad \textbf{10}$$

Naturalmente per legittimare questa definizione **occorre dimostrare subito che essa non dipende dalla particolare scomposizione di f nella differenza di due funzioni non negative e integrabili** (è evidente che se esiste una tale scomposizione ce ne sono infinite altre) e più precisamente che il valore attribuito all'integrale è indipendente dal modo con cui f viene scomposta. Supponiamo infatti che sia contemporaneamente

$$f(x) = g(x) - h(x) = g_1(x) - h_1(x) \qquad \textbf{11}$$

dove g, h, g_1 e h_1 sono funzioni non negative e integrabili. Dalla **11** si ricava

$$g(x) + h_1(x) = g_1(x) + h(x)$$

e quindi per la proprietà **II** del paragrafo precedente, applicabile perché le funzioni g, h, g_1 e h_1 sono non negative, si ha

$$\int_a^b g(x)dx + \int_a^b h_1(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

da cui

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx - \int_a^b h_1(x)dx$$

Dunque il valore dell'integrale di f che si ottiene a partire dalla scomposizione $f = g - h$ coincide con quello che si ottiene a partire dalla scomposizione $f = g_1 - h_1$. E così la definizione di funzione ***integrabile*** è pienamente legittimata.
In particolare una funzione f sarà integrabile in $[a, b]$ se lo sono le due funzioni f^+ (parte positiva di f) e f^- (parte negativa di f) così definite:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \le 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \ge 0 \end{cases}$$

Ovviamente si ha:

$$f^+(x) \ge 0$$
$$f^-(x) \ge 0$$
$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

(cfr. Figg. 13 e 14).
Pertanto se f^+ ed f^- (che sono funzioni non negative) sono integrabili, anche f lo è e si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

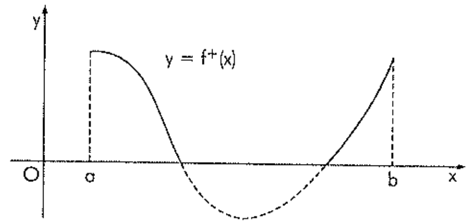


Fig. 13

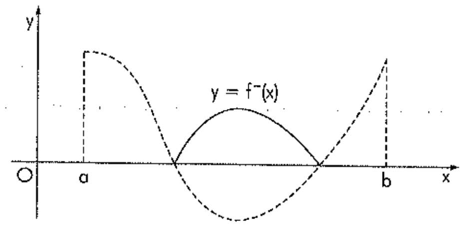


Fig. 14

Dal punto di vista *geometrico* ciò significa che risultano misurabili gli insiemi compresi tra il grafico della f e l'asse x e che l'integrale *computa* positivamente le aree di quelli che si trovano al di sopra dell'asse x e negativamente le aree di quelli che si trovano al di sotto dell'asse x (cfr. Fig. 15).

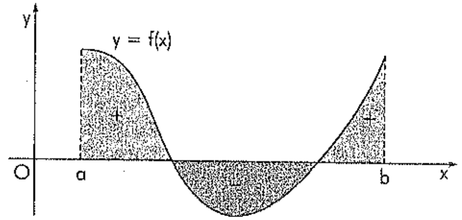


Fig. 15

Passiamo ora ad estendere e a completare per le funzioni di segno qualunque le *proprietà fondamentali dell'integrale* che abbiamo già visto per le funzioni non negative.

I **Integrabilità delle funzioni continue.** Se f è continua in $[a, b]$ f è integrabile.
Infatti in tal caso (lo si verifichi) anche f^+ ed f^- sono continue e dunque integrabili per il teorema **T4**.

II **Integrabilità delle funzioni monotòne.** Se f è monotòna in $[a, b]$ f è integrabile.
Infatti in tal caso (lo si verifichi) anche f^+ ed f^- sono monotòne e dunque integrabili per il teorema **T3**.

III **Omogeneità dell'integrale.** Se f è integrabile in $[a, b]$ e k un numero reale qualunque, anche kf è integrabile e si ha

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

La verifica è immediata.

IV **Additività dell'integrale rispetto alla funzione.** Se f e g sono integrabili in $[a, b]$ anche $f+g$ lo è e si ha

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La dimostrazione è immediata perché abbiamo proprio introdotto la definizione di funzione ***integrabile*** per ottenere questa proprietà; infatti basta osservare che se $f = f_1 - f_2$ e $g = g_1 - g_2$ con f_1, f_2, g_1 e g_2 non negative e integrabili si ha $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ con $f_1 + g_1$ e $f_2 + g_2$ non negative ed integrabili e quindi $f+g$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b (f_1(x)+g_1(x))\,dx - \int_a^b (f_2(x)+g_2(x))\,dx =$$

(per la proprietà **II** del paragrafo precedente)

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b g_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b g_2(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Da **III** e **IV** segue la cosiddetta

V **Linearità dell'integrale.** Se f e g sono integrabili in $[a, b]$ e h e k sono numeri reali qualunque allora $hf + kg$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b (hf(x)+kg(x))\,dx = h\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$$

VI **Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.** Se f è integrabile in $[a, b]$ e c è tale che $a < c < b$, allora f è integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La dimostrazione è immediata.

VII **Isotonia dell'integrale.** Se f e g sono integrabili in $[a, b]$ e si ha ivi $f(x) \le g(x)$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

La dimostrazione è immediata.

Ricordiamo anche un'altra importante proprietà che va sotto il nome di **teorema della media**.

VIII Se f è integrabile in $[a, b]$ la sua **media integrale** cioè il numero

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

è compreso tra l'estremo inferiore l e l'estremo superiore L di f in $[a, b]$.
Per questo basta osservare che si ha $l \le f(x) \le L$ in $[a, b]$ ed applicare la proprietà **VII**.
Se poi in particolare f è continua in $[a, b]$, poiché essa assume tutti i valori compresi tra l e L (vedi ad esempio il volume *Verso L'Infinito*, paragrafo 3.6, **T8**) si ha che esiste almeno un punto ξ in $[a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

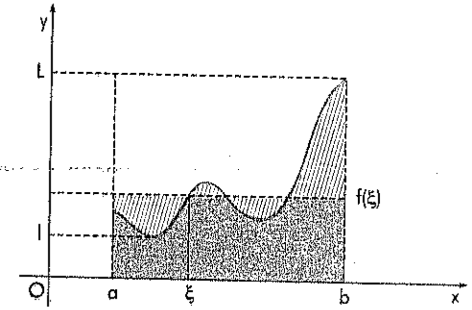


Fig. 16

Riprendiamo ora il procedimento che abbiamo introdotto nel paragrafo 8.2 per dare un criterio utile per l'integrabilità di una funzione non negativa e che ci ha portato ai teoremi **T1** e **T2**; cerchiamo ora di estendere tale procedimento al caso di funzioni di segno qualunque. Data, dunque, una funzione f limitata in $[a, b]$, per ogni n suddividiamo $[a, b]$ in n intervalli uguali mediante i punti

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

e consideriamo le somme α'_n e α''_n:

$$\alpha'_n = \sum_{k=1}^{n} l'_k \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad \alpha''_n = \sum_{k=1}^{n} l''_k \frac{b-a}{n}$$

dove, per ogni k, l'_k e l''_k sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[x_{k-1}, x_k]$. Si ha allora il seguente

TEOREMA 5 **Sia $f(x)$ una funzione limitata in $[a, b]$ allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$ se e solo se esistono i limiti delle due successioni α'_n e α''_n e sono uguali. Inoltre si ha**

$$\lim_{n\to\infty} \alpha'_n = \lim_{n\to\infty} \alpha''_n = \int_a^b f(x)dx$$

Prima di iniziare la dimostrazione conveniamo di indicare con $\alpha'_n(\varphi)$ e $\alpha''_n(\varphi)$ le somme α'_n e α''_n relative ad una funzione φ limitata in $[a, b]$.
Osserviamo poi che se indichiamo con λ l'estremo inferiore di f integrabile in $[a, b]$ la funzione $f(x) - \lambda$ è non negativa ed integrabile perché lo sono le funzioni $f(x)$ e la funzione $g(x) = \lambda$ e si può dunque applicare la proprietà **V**.
Allora, per il **T2**, si ha che

$$lim\,\alpha'_n(f-\lambda) = lim\,\alpha''_n(f-\lambda) = \int_a^b (f(x)-\lambda)dx = \int_a^b f(x)dx - \lambda(b-a) \quad \mathbf{12}$$

Osserviamo ora che:

$$\alpha'_n(f-\lambda) = \alpha'_n(f) - \lambda(b-a) \quad \text{e} \quad \alpha''_n(f-\lambda) = \alpha''_n(f) - \lambda(b-a) \quad \mathbf{13}$$

Passando al limite si ha:

$$lim\,\alpha'_n(f-\lambda) = lim\,\alpha'_n(f) - \lambda(b-a)$$
$$lim\,\alpha''_n(f-\lambda) = lim\,\alpha''_n(f) - \lambda(b-a)$$

dunque, per la **12**, $lim\,\alpha'_n(f) = lim\,\alpha''_n(f) = \int_a^b f(x)dx$

Viceversa, se $lim\,\alpha'_n(f) = lim\,\alpha''_n(f)$ da **13** segue che $lim\,\alpha'_n(f-\lambda) = lim\,\alpha''_n(f-\lambda)$; questo significa, per il teorema **T1**, che $f - \lambda$ è integrabile e dunque, per la proprietà **V** lo è anche f, poiché è $f(x) = (f(x)-\lambda) + \lambda$ e si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f(x)-\lambda)dx + \lambda(b-a) = lim\,\alpha'_n(f-\lambda) + \lambda(b-a) =$$
$$= lim\,\alpha''_n(f-\lambda) + \lambda(b-a) = lim\,\alpha'_n(f) = lim\,\alpha''_n(f)$$

Dal teorema **T5** si deduce che, come per le funzioni non negative, anche per una funzione f di segno qualunque integrabile si ha

$$lim\,\alpha_n = \int_a^b f(x)dx$$

dove $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{b-a}{n}$ e, per ogni k, t_k è un punto qualunque dell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Per questo basta ripetere passo passo il ragionamento svolto per le funzioni non negative.

Vediamo, infine, un'ulteriore estensione dell'operazione di integrazione in modo da sviluppare completamente le sue proprietà algebriche.
Sia dunque f una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$; essa è allora integrabile anche in ogni intervallo $[c, d]$, $a \le c < d \le b$, contenuto in $[a, b]$; quindi possiamo associare ad ogni intervallo di questo tipo l'integrale di f su di esso, cioè considerare l'applicazione

$$[c, d] \to \int_c^d f(x)dx$$

Vogliamo ora considerare anche gli intervalli orientati, distinguendo quelli *orientati positivamente* da quelli *orientati negativamente*.
Più precisamente dati due numeri c e d qualunque appartenenti ad $[a, b]$ essi individuano un intervallo $[c, d]$, orientato positivamente se è $c < d$, orientato negativamente se è $d < c$. Vogliamo associare anche agli intervalli $[c, d]$ orientati negativamente un numero da chiamare integrale di f su $[c, d]$. Quale sarà la definizione più opportuna? Se vogliamo mantenere la proprietà **VI** di additività rispetto all'intervallo di integrazione viene spontaneo definire

$$\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx \quad \text{se} \quad d < c \qquad \mathbf{14}$$

ed estendere questa definizione anche nel caso $c = d$, ponendo

$$\int_c^c f(x)dx = 0 \qquad \mathbf{15}$$

Infatti con queste definizioni possiamo dimostrare la **proprietà di additività per l'integrale** nella forma generale seguente.

VI* Se f è integrabile in $[a, b]$, $a < b$, presi comunque tre punti nell'intervallo $[a, b]$, c, d, e, si ha

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^e f(x)dx + \int_e^d f(x)dx \qquad \mathbf{16}$$

Infatti possiamo supporre $c \le d$ (perché altrimenti basterà scambiare il ruolo di c con quello di d); allora si possono presentare tre casi: 1) $c < e < d$, 2) $e \le c$, 3) $e \ge d$.
Nel primo caso la **16** non è altro che la **VI**.
Nel secondo caso, sempre utilizzando la **VI**, ed eventualmente la **15**, si ha

$$\int_e^d f(x)dx = \int_e^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

e dunque per la **14** si ha

$$\int_c^d f(x)dx = \int_e^d f(x)dx - \int_e^c f(x)dx = \int_c^e f(x)dx + \int_e^d f(x)dx$$

Analogamente si ragiona nel terzo caso.

Per *gli integrali su intervalli orientati* (il lettore se ne accerti) anche le proprietà **III**, **IV**, **V**, **VI**, e **VIII** precedenti rimangono valide; in particolare si osservi che nella **VIII**, (**teorema della media**) se è $b < a$ allora la media integrale di f non varia perché cambiano soltanto il segno del numeratore e quello del denominatore.
La proprietà **VII** nel caso $a > b$, si trasforma nella seguente:

se f e g sono integrabili ed è $f(x) \leq g(x)$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

8.4 La ricerca delle primitive e il teorema fondamentale del calcolo integrale

Esaminiamo ora *il problema della primitiva* alla luce del nuovo strumento che abbiamo introdotto: l'integrale. Vedremo che esso ci permetterà di risolvere il problema per tutte le funzioni continue.
Dimostriamo subito il cosiddetto **teorema fondamentale del calcolo integrale**:

TEOREMA 6 **Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$; preso un punto qualunque c di $[a, b]$ si consideri la funzione (detta anche funzione integrale di f):**

$$H(x) = \int_c^x f(t)dt$$

per ogni x di $[a, b]$. Allora H è derivabile in $[a, b]$ e si ha

$$H'(x) = f(x)$$

Dimostrazione. Sia x_0 un punto fissato di $[a, b]$; allora si ha, per la **16**, per ogni x di $[a, b]$

$$H(x) - H(x_0) = \int_c^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt =$$
$$= \int_c^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

e perciò si può scrivere per $x \neq x_0$

$$\frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0} \qquad \mathbf{17}$$

Ora, per la continuità di f, per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta > 0$ tale che qualunque sia x in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ si abbia

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon \qquad \mathbf{18}$$

Nello stesso intervallo, per il teorema della media, il secondo membro della **17** è compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f, in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$; allora, tenuto conto delle relazioni **17** e **18**, per ogni x compreso in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e diverso da x_0 si può scrivere

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

cioè

$$\left|\frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Questo dice appunto che H è derivabile in x_0 e che $H'(x_0) = f(x_0)$.

Dunque $H(x)$è una primitiva di $f(x)$ in $[a, b]$; e poiché sappiamo (vedi paragrafo 3.3., corollario del **T8**) che due primitive di f differiscono tra loro solo per una costante, possiamo concludere di aver trovato tutte le primitive di f; più precisamente *la famiglia di tutte le primitive di una funzione* f continua in $[a, b]$ è data da

$$\int_c^x f(t)\,dt + k$$

dove c è un punto fissato di $[a, b]$ e k una costante reale arbitraria.
In particolare si può prendere $c = a$ e dunque ogni primitiva $F(x)$ di $f(x)$ è data dall'espressione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k \qquad \mathbf{19}$$

essendo k un numero reale.
Di solito si suole indicare con il termine *integrale indefinito* la famiglia di tutte le primitive di una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$; per essa si usa la notazione

$$\int f(x)dx \qquad \mathbf{20}$$

Si riserva il nome di *integrale* definito all'integrale su un intervallo, quale è stato introdotto nei paragrafi precedenti.
Osserviamo che il **T6** vale ovviamente anche nel caso che f sia definita in un intervallo aperto, semiaperto o illimitato.
Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura dunque l'esistenza di una primitiva (e quindi di infinite altre) per ogni funzione f continua.
Nella pratica però si procede in senso inverso, cioè si utilizza la conoscenza di una primitiva di f (trovata per altra via) per calcolare un integrale definito. Per esempio si voglia calcolare $\int_a^b f(x)dx$, f essendo continua in $[a, b]$, conoscendo una primitiva F di f. Allora per quanto abbiamo visto esiste una costante k opportuna tale che F si possa scrivere nella forma **19**; da qui, ponendo $x = a$, si ricava che questa costante deve essere esattamente data da $F(a)$; allora, ponendo $x = b$ nella **19** si ottiene

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \mathbf{21}$$

L'integrale definito di f su $[a, b]$ è quindi dato dall'incremento di una qualsiasi primitiva F di f.

Ad esempio $\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Frequentemente l'incremento $F(b) - F(a)$ viene indicato con il simbolo

$$[F(x)]_a^b$$

La conoscenza di una primitiva e quindi dell'*integrale indefinito* di una funzione f è dunque importante anche per il calcolo esplicito dell'integrale definito della f su un intervallo fissato. Di qui dunque l'utilità di regole per la ricerca degli integrali indefiniti, quali quelle che vedremo nel prossimo capitolo.

Naturalmente non è detto che assegnata una funzione continua f qualunque sia sempre possibile determinare esplicitamente e in modo facile il suo integrale indefinito. In questi casi se si deve calcolare l'integrale definito di f su un intervallo si ricorrerà alle definizioni dei paragrafi precedenti o a qualche altro artificio che permetta il calcolo diretto di tale integrale definito.

In ogni caso insistiamo sul fatto che *l'integrale definito è un numero, mentre l'integrale indefinito è una famiglia di funzioni*; la conoscenza dell'integrale indefinito di una funzione f è un'informazione molto più ricca e più difficile da ottenere di quella dell'integrale definito su un *singolo intervallo*, perché ci permette di conoscere l'integrale definito su un qualsiasi intervallo (contenuto nell'intervallo di definizione della f). Per esempio, se abbiamo una funzione continua su tutto l'asse reale e dispari (cioè tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x) è immediato dedurre che il suo integrale definito esteso ad un intervallo di centro l'origine è nullo, cioè

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

e tuttavia può essere assai difficile trovare esplicitamente il suo integrale indefinito (cfr. fig. 17).

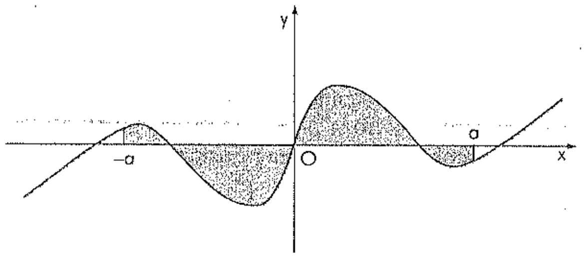


Fig. 17

Per finire riportiamo qui una tabella di integrali indefiniti ottenuti direttamente dalla conoscenza che abbiamo delle derivate delle funzioni elementari:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + k \qquad \text{se } \alpha \text{ è reale} \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k, \qquad \int e^x dx = e^x + k$$

$$\int cos\, x dx = sin\, x + k, \qquad \int sin\, x\ dx = -cos\, x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan\, x + k, \qquad \int \frac{1}{cos^2 x} dx = tan\, x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + k$$

Dalla conoscenza di questi integrali indefiniti è facile calcolare con la **21** gli integrali definiti *estesi ad intervalli contenuti nel campo di definizione della funzione integranda*; così ad esempio:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} sin\, x\ dx = [-cos x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -cos\frac{3\pi}{2} + cos\, 0 = 1$$

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [ln|x|]_1^2 = ln\, 2$$

Si faccia però attenzione a non commettere il seguente errore:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} dx = [ln|x|]_{-1}^{2} = ln\, 2$$

poiché l'intervallo $[-1, 2]$ *non è contenuto* nel campo di definizione di $\frac{1}{x}$ che è costituito da $\mathbb{R} - \{0\}$; la funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $[-1, 2]$.

VOCABOLI E SIMBOLI

- Integrale definito di una funzione f in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx$.
- Somme di Cauchy.
- Integrale indefinito: $\int f(x)dx$.