G. Prodi - N. Tani
Scoprire la matematica - Introduzione all'algebra
Ghisetti e Corvi 2003

CAPITOLO 1

# I NUMERI RELATIVI

**OBIETTIVI**

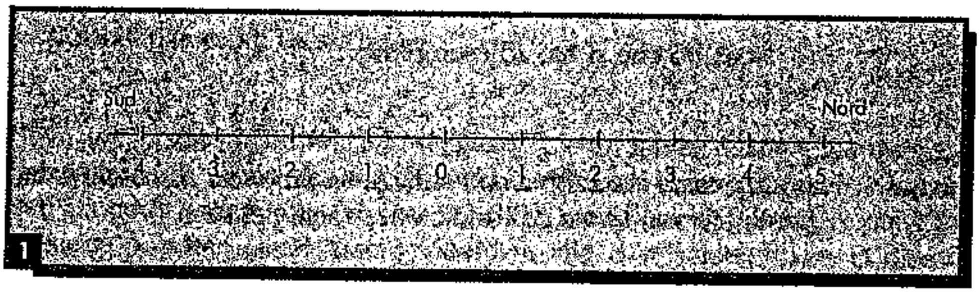
- Introdurre i numeri interi relativi.
- Definire i numeri razionali come insiemi di frazioni equivalenti.
- Estendere la struttura additiva dall'insieme dei numeri naturali all'insieme degli interi relativi e successivamente all'insieme dei razionali relativi.
- Introdurre la struttura moltiplicativa nell'insieme dei numeri razionali relativi.

## 1.1 Gli interi relativi

Nelle scuole precedenti abbiamo già conosciuto ed impiegato i numeri relativi; ma l'argomento è così importante che se ne rende opportuna una ripetizione ben ragionata, anche allo scopo di formulare in modo preciso le proprietà di questi numeri.

Cominciamo da una situazione concreta che ci è familiare.

Supponiamo di trovarci in un punto ben determinato di una lunga strada: per esempio sulla via Aurelia, alla periferia di Pisa. La posizione di un'automobile che si trovi sulla via Aurelia non si può stabilire dando soltanto la distanza dal punto in cui siamo: se si trova, ad esempio, a 3 km da noi, può essere verso Nord oppure verso Sud. Anche uno spostamento può essere compiuto verso Nord o verso Sud. È utile una rappresentazione come questa:




1

Qui abbiamo disegnato solo i punti che distano un numero intero di chilometri dal punto 0, in cui ci troviamo. Ogni numero ha sotto una freccia che segna la direzione – sempre rispetto al punto 0 – del punto rappresentato. Il punto 0 può essere indifferentemente dotato di una freccia a destra o a sinistra; o può essere scritto senza freccia come abbiamo fatto nel nostro disegno. I numeri con la freccia sono detti *interi relativi*; essi costituiscono un insieme che indicheremo col simbolo $\mathbb{Z}$. Togliendo ad un intero relativo la freccia, si ottiene un numero, cioè un elemento di $\mathbb{N}$, che viene detto suo *valore assoluto*: ad esempio, $\underrightarrow{3}$ e $\underleftarrow{3}$ hanno entrambi come valore assoluto 3. Il valore assoluto di un numero $a$ si indica con $|a|$.

Anche gli *spostamenti* lungo la nostra strada (spostamenti verso Nord, oppure verso Sud) possono essere indicati con numeri dotati di freccia, cioè con numeri relativi. Gli spostamenti ci suggeriscono un'operazione molto naturale: l'*addizione*. Ad esempio $\underrightarrow{2} + \underrightarrow{3}$ rappresenta lo spostamento che si ottiene compiendo successivamente uno spostamento verso Nord di 2 km, e poi uno spostamento, ancora verso Nord, di 3 km.

Allora scriveremo:

$$\underrightarrow{2} + \underrightarrow{3} = \underrightarrow{5}$$

Alla stessa maniera, risulta chiaro il significato di queste relazioni:

$$\underleftarrow{4} + \underleftarrow{2} = \underleftarrow{6} \quad \underleftarrow{3} + \underrightarrow{3} = 0 \quad \underleftarrow{3} + \underrightarrow{5} = \underrightarrow{2}$$

L'allievo controlli tutti questi esempi con il disegno.

Negli ultimi due esempi, i due spostamenti non hanno lo stesso verso: come è intuitivo, prevale il verso di quello che è più grande in valore assoluto, e il risultato ha un valore assoluto che è uguale alla differenza fra i valori assoluti (sottraendo, naturalmente, il minore dal maggiore: $5 - 3 = 2$). In conclusione possiamo dare la seguente regola:

**Se due numeri interi relativi $a$, $b$, hanno le frecce dirette nello stesso senso, allora $a + b$ è il numero intero relativo che ha la freccia diretta ancora nello stesso senso e che ha come valore assoluto la somma dei valori assoluti; se due numeri interi relativi hanno le frecce dirette in senso opposto, allora $a + b$ è il numero che ha la freccia diretta come quella del più grande in valore assoluto ed ha valore assoluto uguale alla differenza fra i valori assoluti (si intende che quando i valori assoluti siano uguali, il numero relativo somma è 0 (zero) che, ricordiamo, è senza freccia).**

Notiamo che si ha, ad esempio:

$$(\underrightarrow{3} + \underrightarrow{2}) + \underleftarrow{7} = \underleftarrow{2} \quad \underrightarrow{3} + (\underrightarrow{2} + \underleftarrow{7}) = \underleftarrow{2}$$

In questo caso abbiamo verificato la proprietà *associativa*. Vale anche la proprietà *commutativa* dell'addizione, come nel caso:

$$\underleftarrow{3} + \underrightarrow{4} = \underrightarrow{1} = \underrightarrow{4} + \underleftarrow{3}$$

Queste proprietà, che ora abbiamo verificato in casi particolari, possono essere dimostrate in generale tenendo conto del fatto che esse valgono in $\mathbb{N}$ (insieme degli interi naturali). Ma se pensiamo agli spostamenti sulla retta, esse risultano del tutto evidenti e perciò non ne daremo la dimostrazione.



Notiamo che esiste un *elemento neutro* per l'addizione, cioè un elemento che, sommato ad un qualsiasi elemento, lo lascia inalterato: è il numero 0 (zero). Infatti, indicando con $a$ un qualsiasi numero relativo, si ha:

$$a + 0 = a$$

Definiamo ora l'operazione di *opposto*. Si tratta di un'operazione che agisce su un solo numero (a differenza dell'addizione che coinvolge due numeri). L'operazione *opposto* applicata ad un numero relativo, non fa che invertire il senso della freccia; essa viene indicata col segno $-$; ad esempio:

$$-(\underrightarrow{3}) = \underleftarrow{3} \quad -(\underleftarrow{5}) = \underrightarrow{5}$$

Naturalmente, l'opposto di 0 dovrà essere 0. È chiaro che se $a$ è un qualsiasi numero relativo, si ha:

$$-a + a = 0$$

Ad esempio $-\left(\underrightarrow{3}\right) + \left(\underrightarrow{3}\right) = 0$; infatti è $-\left(\underrightarrow{3}\right) = \left(\underleftarrow{3}\right)$.

Inoltre l'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso:

$$-(-a) = a$$

Questa operazione di *opposto* ci permette di fare una semplificazione nel modo di rappresentare i numeri relativi. Aboliamo, in primo luogo, la freccia per quei numeri che l'hanno rivolta in uno dei due sensi (ad esempio verso destra). Diremo ***numeri positivi*** questi numeri. Scriveremo dunque 5 in luogo di $\underrightarrow{5}$, 3 in luogo di $\underrightarrow{3}$.

È evidente la nostra intenzione di fare in modo che i numeri positivi (con lo zero) si possano considerare a tutti gli effetti come coincidenti con gli interi naturali, che già conoscevamo. In secondo luogo, terremo presente che i numeri con la freccia a sinistra (*numeri negativi*) sono gli opposti dei corrispondenti numeri positivi. Ad esempio:

$$\underleftarrow{5} = -(\underrightarrow{5}) = -5$$

In questo modo, dunque, i numeri negativi verranno scritti semplicemente mettendo il segno $-$ davanti al loro valore assoluto. Così non avremo più bisogno delle frecce.

Consideriamo ora l'equazione:

$$a + x = b \tag{1.1}$$

dove $a$ e $b$ sono interi relativi assegnati, $x$ è un intero relativo che dobbiamo determinare in modo che l'uguaglianza scritta sia vera. Il termine *equazione* ci è già noto: comunque, avremo più avanti occasione di riprendere questa importante nozione. Limitiamoci a ricordare che la relazione scritta ci dice che $a + x$ (primo membro) e $b$ (secondo membro) sono due numeri uguali, cioè sono lo stesso numero. È ovvio che aggiungendo uno stesso numero ad entrambi i membri si ottengono ancora due numeri uguali. Aggiungiamo, ad esempio, l'opposto di $a$, cioè $-a$; ricaviamo:

$$a + x + (-a) = b + (-a)$$

Poiché $a + (-a) = 0$, troviamo:

$$x = b + (-a)$$

Ad esempio, se l'equazione è: $5 + x = 3$, aggiungendo $-5$ troviamo:

$$x = 3 + (-5) = -2$$

Effettivamente, $b + (-a)$ è una soluzione dell'equazione **1.1**, dal momento che sostituendo $b + (-a)$ in luogo di $x$ nella **1.1** si ricava:

$$a + [b + (-a)] = a + b + (-a) = b$$

e quindi l'equazione **1.1** risulta verificata. Nell'insieme degli interi naturali, $\mathbb{N}$, l'operazione che risolve la **1.1** è la sottrazione (ci domandiamo: quanto manca ad $a$ per arrivare a $b$?). Nell'insieme $\mathbb{N}$ questa operazione si può compiere solo quando $b$ (minuendo) è maggiore, o, tutt'al più, uguale ad $a$ (sottraendo). Nel campo dei numeri relativi, invece, questa operazione si può sempre fare senza eccezione e questo è un grosso vantaggio che si ottiene passando ai numeri relativi. Conveniamo di scrivere, d'ora in poi, $b - a$ in luogo di $b + (-a)$; così il risultato verrà indicato con il simbolo noto della sottrazione. Ma deve essere chiaro che nel campo dei numeri relativi non c'è bisogno di introdurre un'operazione di sottrazione: ci bastano l'addizione e l'operazione di *opposto*.

## 1.2 I razionali relativi: struttura additiva

**Si dice frazione un simbolo del tipo**

$$\frac{m}{n}$$

**dove $m$ ed $n$ sono interi naturali ed è $n \neq 0$.**

Sappiamo che due frazioni come $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ sono fra loro *equivalenti*: esse possono rappresentare la medesima porzione di una stessa grandezza (ad esempio: due pezzi di una torta divisa in tre parti, oppure quattro pezzi di una torta divisa in sei parti). Anche il calcolo delle probabilità ci fornisce un modello interessante per la nozione di frazioni equivalenti (se due casi sono favorevoli su tre, la probabilità è la stessa che se quattro casi sono favorevoli su sei, ammesso sempre che i casi elementari siano equiprobabili).

Sappiamo che, per regola generale, due frazioni $\frac{m}{n}, \frac{r}{s}$ sono *equivalenti* se è $m \cdot s = n \cdot r$.

Diremo che un insieme di frazioni fra loro equivalenti (come, ad es., l'insieme $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\right\}$) è un *numero razionale*. Quindi considereremo le frazioni fra loro equivalenti come simboli diversi per rappresentare lo stesso numero razionale.

Naturalmente, i numeri interi possono essere visti come particolari numeri razionali. Ad esempio, il numero 5 si può identificare con il numero razionale $\left\{\frac{5}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \dots\right\}$; il numero 0 si può far coincidere con $\left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \dots\right\}$; il numero 1 con $\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots\right\}$.





Abbiamo già imparato a sommare e a moltiplicare le frazioni: possiamo considerare quelle operazioni come operazioni fra numeri razionali. Anche i numeri razionali possono essere dotati di una freccia, esattamente come si è fatto per gli interi: si ottengono i *numeri razionali relativi*, che possono essere rappresentati su una retta. Indicheremo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali relativi.

Per i razionali relativi si introducono le stesse operazioni che abbiamo introdotto per gli interi relativi (operazioni di addizione e di *opposto*), e si seguono le stesse convenzioni: ad esempio si scrive $-\frac{3}{5}$ (*opposto* di $\frac{3}{5}$) per indicare $\left(\frac{3}{5}\right)$

Le operazioni di addizione e di *opposto* hanno le seguenti proprietà, che dovremo tenere presenti in modo preciso:

**F1** **L'addizione gode della proprietà *associativa*, che si esprime così:**

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

Per capire questa proprietà, dobbiamo renderci conto che noi abbiamo definito l'addizione solo per il caso di due addendi: perciò il simbolo $a + b + c$ (benché intuitivamente molto chiaro) non ha ancora un significato preciso. Volendo lasciare immutato l'ordine con cui si seguono i tre numeri $a$, $b$, $c$, possiamo interpretarlo come $(a + b) + c$, oppure $a + (b + c)$: ebbene, la proprietà associativa ci dice che queste diverse interpretazioni conducono al medesimo risultato. Quindi la somma di tre (o più) addendi si può indicare senza parentesi:

$$a + b + c.$$

**F2** **L'addizione gode della proprietà *commutativa*:**

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

**F3** **Esiste un (unico) *elemento neutro* per l'addizione: il numero 0. Si ha dunque:**

$$\boldsymbol{a} + 0 = 0 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

**F4** **Per ogni numero $a$ c'è un (unico) *opposto*, cioè un unico numero, $-a$, tale che:**

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = 0$$

**NOTA** Le proprietà seguenti sono un esempio di come si possano dedurre tante significative proprietà degli insiemi numerici dalle poche proprietà essenziali **F1**, **F2**, **F3**, **F4**.

Un lettore attento (ce ne sono ancora malgrado tutto ...) avrà notato che negli enunciati **F3** ed **F4** la parola unico è tra parentesi. Con ciò intendiamo dire che l'unicità dell'elemento neutro e l'unicità dell'opposto possono essere sottintese perché si deducono con un po' di ragionamento da tutte le altre proprietà che abbiamo enunciato. Vediamo come.

Supponiamo che, oltre a 0, esista un ulteriore elemento neutro $0'$; allora si ha:

$$0 + 0' = 0' \quad \text{perché 0 è elemento neutro}$$
$$0 + 0' = 0 \quad \text{perché } 0' \text{ è elemento neutro}$$

Allora, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza deve essere $0 = 0'$; cioè $0'$ coincide necessariamente con 0; ciò è come dire che l'elemento neutro è unico.
Analogamente, dato un elemento $a$, supponiamo che $a'$ e $a''$ siano suoi opposti; partiamo dall'uguaglianza:

$$a + a' = 0$$

Aggiungendo $a''$ ad ambo i membri si ottiene

$$a'' + a + a' = a''$$

Questa relazione si può scrivere:

$$(a + a'') + a' = a''$$

Ma, per ipotesi, è $a + a'' = 0$, essendo anche $a''$ un opposto di $a$; dunque si ha $0 + a' = a''$ e perciò si conclude:

$$a' = a''$$

Cioè: ogni elemento ha un unico opposto.

Ed ecco un'altra proprietà che si intuisce facilmente e che possiamo ora dimostrare:

l'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso.

Infatti se $a'$ è l'opposto di $a$, allora:

$$a + a' = 0$$

Sommiamo ad entrambi i membri l'opposto di $a'$ che indichiamo con $a''$:

$$a + a' + a'' = 0 + a''$$

per la proprietà associativa questa relazione si può scrivere:

$$a + (a' + a'') = a'' \text{ e poiché } a' + a'' = 0$$

per ipotesi si conclude che:

$$a = a''$$

Ovvero: l'opposto dell'opposto di $a$ è il numero $a$ stesso.

Dalle proprietà **F1**, **F2**, seguono inoltre alcune uguaglianze che mostrano come si possa applicare l'operazione di addizione a più di tre addendi; anche queste uguaglianze sono intuitivamente ovvie; l'interesse sta nel dimostrarle, tramite una catena di uguaglianze, facendo uso solo delle proprietà associativa e commutativa:

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$$



Notiamo che si ha:

$$\begin{aligned}(a + b) + (c + d) &= a + [b + (c + d)] = \\ &= a + [(b + c) + d] = \quad \text{(per la proprietà associativa)} \\ &= a + [(c + b) + d] = \quad \text{(per la proprietà commutativa)} \\ &= a + [c + (b + d)] = (a + c) + (b + d) \\ &\qquad \text{(per la proprietà associativa)}\end{aligned}$$

L'uguaglianza è pertanto verificata.

## 1.3 I razionali relativi: struttura moltiplicativa

Introdotta l'addizione, vogliamo ora introdurre nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali relativi la seconda operazione algebrica fondamentale: la *moltiplicazione*. A questo punto, occorre fare un passo indietro e ricordare che la moltiplicazione è stata già introdotta nell'insieme dei numeri razionali assoluti. Ricordiamo che la frazione prodotto di due frazioni ha come denominatore il prodotto dei denominatori e come numeratore il prodotto dei numeratori.

Ad esempio: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$; ricordiamo che ogni numero razionale non nullo ha un reciproco, definito dal fatto che, moltiplicato per il numero dato, dà come risultato 1. Ad esempio, il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$; infatti $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$.

L'operazione di moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali assoluti ha le seguenti proprietà importanti, che esponiamo proseguendo l'elenco già iniziato:

**F5** **La proprietà associativa, che si esprime così:**

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

**F6** **La proprietà commutativa, così espressa:**

$$a \cdot b = b \cdot a$$

**F7** **La moltiplicazione ha un (unico) elemento neutro, che si indica con 1. Si ha dunque:**

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

**F8** **Ogni numero diverso da 0 ha un (unico) reciproco cioè un numero, che si scrive $a^*$ tale che:**

$$a \cdot a^* = a^* \cdot a = 1$$

**Il reciproco di $a$, per ragioni che tra poco vedremo, si indica più comunemente con uno dei simboli $1/a$, $\frac{1}{a}$ o $a^{-1}$.**

**F9** **Vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, cioè risulta:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Queste sono le proprietà fondamentali della moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali assoluti. Ora, noi vogliamo definire la moltiplicazione nel campo dei razionali relativi in modo tale da soddisfare a queste due condizioni:

1 Nel caso che i due fattori siano numeri razionali positivi, la moltiplicazione deve essere quella che già conosciamo. Ad esempio, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$ sono numeri razionali assoluti e possono essere considerati numeri razionali positivi. Ebbene: deve risultare $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ anche nell'ambito dei numeri relativi.

2 Anche nell'ambito dei numeri relativi la moltiplicazione deve avere le proprietà **F5**, **F6**, **F7**, **F8**, **F9**.

Anzitutto, notiamo che deve essere $a \cdot 0 = 0$ per ogni numero razionale $a$. Può sembrare fatica inutile dimostrare questa relazione che è intuitivamente accettabile. Ma l'interesse – tipicamente matematico – sta nel fare vedere che dalle proprietà **F1**, **F2**, ... **F9** si possono dedurre tutte le proprietà algebriche di cui abbiamo bisogno per calcolare con i nostri numeri, e perciò anche la relazione $a \cdot 0 = 0$. Per dimostrarla, dunque, partiamo dalla relazione $1 + 0 = 1$. Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per $a$ e tenendo presente che 1 deve essere elemento neutro per la moltiplicazione, si ottiene:

$$a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a$$

Applicando invece la proprietà distributiva, si ricava:

$$a + a \cdot 0 = a$$

Aggiungiamo ora ad ambo i membri l'opposto di $a$:

$$(-a) + a + a \cdot 0 = (-a) + a$$

Essendo $(-a) + a = 0$, si ricava $a \cdot 0 = 0$, come volevamo dimostrare.

Vediamo ora quale deve essere il prodotto di un numero positivo per un numero negativo; ad esempio: $3 \cdot (-2)$. Teniamo presente che $2 + (-2) = 0$; allora moltiplicando per 3 ambo i membri:

$$3 \cdot [2 + (-2)] = 3 \cdot 0 = 0$$

D'altra parte, applicando la proprietà distributiva, deve essere:

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = 0$$

Ma questa relazione ci dice che $3 \cdot (-2)$ è uguale all'opposto di $3 \cdot 2$; infatti, se due numeri hanno per somma 0, ciascuno di essi è l'opposto dell'altro, per la proprietà **F4**. Dunque deve essere:

$$3 \cdot (-2) = -(3 \cdot 2) = -6$$

Siamo dunque indotti a fissare questa regola:

**Il prodotto di un numero positivo per uno negativo è un numero negativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti.**



Vogliamo ora definire il prodotto di due numeri negativi; ad esempio: $(-3) \cdot (-2)$.

Si procede come prima; dalla relazione $2 + (-2) = 0$, moltiplicando membro a membro per $-3$, si ha:

$$-3 \cdot [2 + (-2)] = 0$$

e, applicando la proprietà distributiva:

$$(-3) \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) = 0$$

Questa relazione ci dice che $(-3) \cdot (-2)$ deve essere l'opposto di $(-3) \cdot 2$, il quale, come abbiamo visto, deve essere l'opposto di $3 \cdot 2$. Ma l'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso: perciò si deve porre:

$$(-3) \cdot (-2) = 3 \cdot 2 = 6$$

Dunque, siamo obbligati a porre la seguente regola:

**Il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo uguale al prodotto dei valori assoluti.**

Questa regola può sembrare paradossale, ma diventa ben comprensibile se si riflette sulla proprietà dell'operazione *opposto* a cui abbiamo fatto ricorso. Comunque, per capirla meglio, riprendiamo l'esempio della via Aurelia, fatto all'inizio. Risulta naturale esprimere anche le velocità con numeri relativi: una velocità positiva indicherà un moto verso Nord, una velocità negativa un moto verso Sud. Supponiamo che un'automobile si trovi al tempo 0 esattamente a Pisa e si muova con la velocità costante di 80 km/h. Tra mezz'ora si troverà a 40 km verso Nord, cioè nel punto che abbiamo contrassegnato col numero 40, fra un'ora nel punto 80, ecc.

Domandiamoci: quale è il punto corrispondente al tempo $-1$? Il tempo $-1$ ha un significato preciso: un'ora fa. Evidentemente, la posizione corrispondente dell'automobile è contrassegnata da $-80$ (cioè 80 km a Sud): $(-1) \cdot 80 = -80$.

Supponiamo di invertire la velocità, cioè di considerare un'automobile che si muove con la velocità di $-80$ km/h (80 km/h verso Sud). Domandiamoci: ammesso che al tempo 0 l'automobile si trovi a Pisa, dove si trovava al tempo $-1$, cioè un'ora fa? Evidentemente, a 80 km da Pisa, in direzione Nord. E tutto torna bene con la nostra regola: $(-80) \cdot (-1) = 80$. Dunque, le regole che abbiamo dato per la moltiplicazione permettono di verificare in ogni caso la *legge del moto uniforme*: $s = vt$ ($s$: spazio percorso, $v$: velocità, $t$: tempo).

Abbiamo definito la moltiplicazione fra numeri relativi in modo da verificare ancora le proprietà **F5**, **F6**, **F7**, **F8**, **F9**. Occorrerebbe accertare che lo scopo è stato effettivamente raggiunto. La verifica non è difficile ma un po' noiosa, e noi la tralasceremo.

L'operazione di *opposto* può essere vista come operazione di moltiplicazione per $-1$. È, ancora una volta, la proprietà distributiva che ce lo dice. Infatti, partiamo dalla relazione:

$$1 + (-1) = 0$$

Moltiplicando membro a membro per $a$ ed usando la proprietà distributiva, si ha:

$$a + (-1) \cdot a = 0$$

questa relazione: ci dice che $(-1) \cdot a$ è proprio l'opposto di $a$, cioè $-a$.

**NOTA** È interessante confrontare le proprietà F1, F2, F3, F4 relative all'addizione e all'operazione di *opposto* con le proprietà F5, F6, F7, F8 relative alla moltiplicazione e all'operazione di *reciproco*. C'è una perfetta analogia: soltanto, per l'esistenza del reciproco di un elemento $a$ c'è una condizione: deve essere $a \neq 0$, mentre per l'esistenza dell'opposto non c'è nessuna condizione. Effettivamente, la condizione $a \neq 0$ è indispensabile per l'esistenza del reciproco; infatti, essendo $0 \cdot x = 0$ per ogni numero $x$, non può esserci un numero $x$ tale che $0 \cdot x = 1$; e ciò significa che il numero 0 non ha reciproco. Questo è un punto importante, che occorre sempre tener presente.

Notiamo che il reciproco del prodotto di due numeri diversi da zero è il prodotto dei reciproci, cioè:

$$(a \cdot b)^* = a^* \cdot b^*$$

infatti si ha:

$$(a^* \cdot b^*) \cdot (a \cdot b) = b^* \cdot (a^* \cdot a) \cdot b = b^* \cdot b = 1$$

pertanto, per l'unicità del reciproco, $(a^* \cdot b^*)$ è il reciproco di $a \cdot b$.

Consideriamo ora l'equazione:

$$a \cdot x = b \qquad \textbf{1.2}$$

dove $a$ e $b$ sono numeri razionali assegnati. Se $a \neq 0$, possiamo moltiplicare entrambi i membri per il reciproco di $a$:

$$a^* \cdot a \cdot x = a^* \cdot b$$

e poiché $a^* \cdot a = 1$, si ha necessariamente:

$$x = a^* \cdot b$$

Sostituendo $a^* \cdot b$ al posto di $x$ nella **1.2** si ha:

$$a \cdot (a^* \cdot b) = (a \cdot a^*) \cdot b = b$$

dunque $a^* \cdot b$ è l'unica soluzione dell'equazione **1.2**. Nell'insieme degli interi naturali, l'operazione che risolve la **1.2** è la divisione, che si può eseguire soltanto se $b$ (dividendo) è multiplo di $a$ (divisore); nell'insieme dei numeri razionali invece, questa operazione si può eseguire per ogni valore di $a \neq 0$ e il risultato si indica di solito con le notazioni:

$$\frac{b}{a}$$

oppure

$$b/a$$

Per evitare una inutile proliferazione di notazioni, il reciproco di $a$ si indica di solito con queste stesse notazioni, in cui si prende $b = 1$. Pertanto, come avevamo anticipato, il reciproco di $a$ si indica più comunemente con $\frac{1}{a}$ oppure con $1/a$. Ritorneremo tra poco su queste notazioni. Consideriamo di nuovo l'equazione **1.2**: abbiamo visto che se il numero $a$ è diverso da zero, la soluzione dell'equazione è $b/a$, ma che cosa succede se $a = 0$? Dobbiamo distinguere due casi a seconda del valore di $b$: se anche $b = 0$, l'equazione diventa $0 \cdot x = 0$ e sappiamo che un qualunque numero razionale verifica questa uguaglianza, se invece $b \neq 0$ l'equazione non ha soluzione.

Abbiamo dimostrato che, se uno dei fattori di un prodotto è uguale a 0, il prodotto è uguale a 0; vediamo che vale anche la proprietà inversa, ovvero: se $a \cdot b = 0$, allora almeno uno dei due fattori $a$ o $b$ deve essere uguale a zero. Supponiamo che $a$ sia diverso da 0, allora, moltiplicando entrambi i membri della relazione $a \cdot b = 0$ per il reciproco di $a$ abbiamo: $a^* \cdot a \cdot b = a^* \cdot 0$ e poiché $a^* \cdot a = 1$ e $a^* \cdot 0 = 0$, si ha: $1 \cdot b = 0$, ovvero: $b = 0$. Questa importante proprietà si chiama *legge di annullamento del prodotto*.



## VOCABOLI E SIMBOLI

- Intero relativo
- Insieme degli interi relativi: $\mathbb{Z}$
- Valore assoluto, $|a|$ è il valore assoluto di $a$
- Addizione: si indica con +
- Elemento neutro per l'addizione: 0 (zero)
- Opposto di $a = -a$
- Numeri: positivi, negativi, razionali (assoluti e relativi)
- Insieme dei numeri razionali relativi: $\mathbb{Q}$
- Moltiplicazione: si indica con
- Elemento neutro per la moltiplicazione: 1 (uno)
- Reciproco di $a$: si indica con $\frac{1}{a}$
- Proprietà associativa (dell'addizione e della moltiplicazione)
- Proprietà commutativa (dell'addizione e della moltiplicazione)
- Proprietà distributiva (della moltiplicazione rispetto all'addizione)
- Legge di annullamento del prodotto