PRODI - TANI . SCOPRIRE LA MATEMATICA
Introduzione all'algebra
GHISETTI e CORV. 2003

CAPITOLO 4

LE SCATOLE CINESI

Questo capitolo presenta alcune nozioni che esigono una riflessione abbastanza lunga per essere ben capite ed assimilate. Occorrerà rileggerlo con cura, à distanza di tempo.

OBIETTIVI

- Introdurre la nozione di valore approssimato ed eseguire calcoli approssimati.
- Rappresentare i numeri razionali come numeri decimali e costruire scatole cinesi che li racchiudono.
- Dimostrare l'esistenza di grandezze incommensurabili.
- Presentare le scatole cinesi come numeri e delineare la struttura algebrica e la struttura di ordine nell'insieme delle scatole cinesi.
- Introdurre la nozione di equivalenza di scatole cinesi ed il principio di completezza della retta reale.

4.1 Valori approssimati

In molti casi concreti capita di non conoscere esattamente un numero, ma di poterne dare solo delle valutazioni approssimate. Ad esempio supponiamo di sapere che un certo numero x soddisfa alle disuguaglianza: $0,24 \leq x \leq 0,25$; in altre parole sappiamo solamente che x appartiene all'intervallo che ha come estremi 0,24 e 0,25; il numero 0,24 si dice *valore approssimato per difetto*, il numero 0,25 si dice *valore approssimato per eccesso*. L'intervallo si dice *intervallo di approssimazione* e, naturalmente, l'approssimazione è tanto migliore quanto piú è piccolo questo intervallo.

Le misure di grandezze fisiche (come lunghezze, temperature, tempi, ...) non sono mai ottenibili esattamente: disponendo di apparecchi perfezionati, esse possono essere ottenute con notevole precisione, ma c'è comunque un limite alla precisione raggiungibile. Del resto, per le esigenze pratiche sono sempre i valori approssimati (piú o meno, secondo i casi) quelli che servono.

Supponiamo di avere due sbarrette di acciaio, una di lunghezza x (espressa in cm) compresa fra 30,25 e 30,26, l'altra di lunghezza y compresa fra 40,36 e 40,37:

$$30,25 \leq x \leq 30,26$$
$$40,36 \leq y \leq 40,37$$

Se le congiungiamo assieme nel senso della lunghezza, otteniamo una sbarra lunga $x+y$, e si avrà:

$$70,61 \leq x+y \leq 70,63$$

Infatti, come si intuisce subito, e come si può dimostrare in base alle proprietà delle relazioni di ordine, sommando i due valori per difetto si ottiene un valore per difetto di $x+y$, sommando i valori per eccesso si ottiene un valore per eccesso.

4.2 Achille e la tartaruga: una interpretazione

In molti problemi matematici accade che il calcolo di un numero si possa spingere ad una precisione elevata quanto si vuole: in altre parole, si può ottenere che l'intervallo di approssimazione sia piú piccolo di una quantità piccolissima stabilita (ad esempio: 1 millesimo, 1 decimillesimo, ...). Utilizziamo, per il nostro scopo, il classico esempio di *Achille e la tartaruga*, introdotto dal filosofo Zenone.

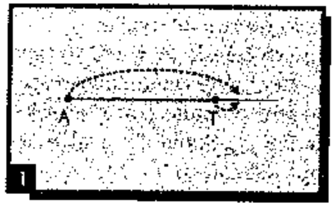
Zenone di Elea, vissuto nel V secolo a.C., fu un celebre filosofo dell'antichità. Con le sue argomentazioni egli cercò di dimostrare che il moto è impossibile e che, perciò, la percezione del moto degli oggetti è illusoria. Col nostro senso pratico di oggi, ragionamenti come quello su Achille e la tartaruga appaiono ridicoli. Eppure i Greci ebbero lo straordinario merito di prendere sul serio problemi come questi affermando il primato dell'intelligenza e della ragione. Senza i Greci, non ci sarebbe la scienza di oggi e non ci sarebbero neppure quelle applicazioni pratiche della scienza di cui siamo tanto orgogliosi.

Achille (il "piè veloce") insegue la tartaruga, che ha inizialmente un vantaggio di 1 metro; la velocità di Achille è di 10 metri al secondo, quella della tartaruga è di 1 metro al secondo; ci domandiamo quando Achille raggiungerà la tartaruga. Indichiamo con t (espresso in secondi) il tempo necessario: lo spazio percorso da Achille è dato da 10 t, e deve risultare uguale alla somma del vantaggio iniziale della tartaruga con lo spazio che essa percorre. Si ottiene così l'equazione:

$$10t = 1 + t$$

che sappiamo risolvere senza difficoltà:

$$10t - t = 1$$



1

$$9t = 1$$

e infine:

$$t = \frac{1}{9}$$

Ma vediamo la versione dei fatti che ci viene fornita da Zenone.

In $\frac{1}{10}$ di secondo Achille raggiunge il punto in cui si trovava inizialmente la tartaruga: ma intanto la tartaruga si è mossa ed ha percorso uno spazio uguale ad $\frac{1}{10}$ (in metri). Per raggiungere la nuova posizione della tartaruga, Achille dovrà impiegare un altro tempo, uguale a $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,01$, quindi, in tutto, avrà impiegato un tempo $t_2 : \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 0,11$ (in secondi).

Ma Achille non ha ancora raggiunto la tartaruga, perché, nel tempuscolo di $\frac{1}{10}$ di secondo essa ha percorso $\frac{1}{100}$ di metro. Achille arriverà a questa nuova posizione, ma impiegherà $\frac{1}{1000}$ di secondo, e quindi un tempo complessivo $t_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = 0,111$, e così via. Zenone credeva di poter dimostrare che Achille non avrebbe mai raggiunto la tartaruga, dal momento che, per raggiungerla, egli avrebbe dovuto compiere infinite operazioni. Noi pensiamo invece che Achille può raggiungere benissimo la tartaruga e che gli infiniti valori trovati:

$$0,1 \quad 0,11 \quad 0,111 \quad 0,1111 \quad 0,11111 \quad \ldots \tag{4.1}$$

sono semplicemente valori approssimati per difetto del valore esatto $\frac{1}{9}$ che abbiamo trovato risolvendo l'equazione: lo dimostreremo tra poco. In altre parole: il tempo di $\frac{1}{9}$ necessario ad Achille per raggiungere la tartaruga può essere idealmente diviso in infiniti tempuscoli, ma è pur sempre un tempo finito.

Del resto, nel tempo 0,2 (doppio del primo tempuscolo) Achille ha percorso 2 metri ed ha perciò superato abbondantemente la tartaruga, che ha percorso solo 0,2 metri ed è quindi arrivata solo a metri 1,2 dal punto iniziale di Achille. Dunque 0,2 è un valore approssimato per eccesso del tempo cercato. Si vede subito che tutti i seguenti valori sono approssimati per eccesso:

$$0,2 \quad 0,12 \quad 0,112 \quad 0,1112 \quad 0,11112 \quad \ldots \tag{4.2}$$

Infatti, basta riconoscere che raddoppiando l'ultimo tempuscolo, Achille supera certamente la tartaruga.

4.3 La rappresentazione decimale dei razionali: le scatole cinesi

Fin dalle scuole elementari abbiamo imparato la divisione con resto di un intero (*dividendo*) per un altro intero (*divisore*). Possiamo esprimere in modo preciso il significato di questa operazione per mezzo del seguente enunciato:

Dati due interi a, b ($b > 0$) esiste un'unica coppia di interi q, r (detti quoziente e resto, rispettivamente) tali che si abbia $a = bq + r$ essendo $0 \leq r < b$.

L'enunciato è intuitivamente chiaro, se si pensa che q esprime il massimo numero di volte in cui b è contenuto in a; perciò il resto è inferiore a b. Il resto r è nullo quando e solo quando a è multiplo di b (cioè: b è un divisore di a).

La divisione con resto si applica spesso al problema di approssimare una qualsiasi frazione con un numero decimale. Anzi, nell'insegnamento elementare la divisione con resto si applica quasi esclusivamente in questa circostanza.

I numeri decimali, come sappiamo bene, sono frazioni aventi per denominatore una potenza di 10; ad esempio:

$$\frac{15}{100} = 0,15; \ \frac{375}{1000} = 0,375; \ \frac{-243}{10} = -(24,3); \ \ldots$$

Dunque un numero decimale è un numero del tipo $\frac{a}{10^m}$, dove a è un intero relativo ed m è un intero positivo. Una frazione ridotta ai minimi termini si può trasformare in numero decimale solo quando moltiplicando il denominatore per un intero lo si può trasformare in una potenza di 10; questo accade, evidentemente quando il denominatore contiene solo i fattori primi 2 e 5. Quando vi sia anche un solo fattore diverso da 2 e 5, la cosa non è piú possibile.

Quando una frazione $\frac{p}{q}$ non è trasformabile in numero decimale, è possibile approssimarla mediante un numero decimale, a meno di un decimo, di un centesimo, di un millesimo, ...

Vogliamo, ad esempio, approssimare la frazione $\frac{3}{7}$ a meno di $\frac{1}{10}$. Scriviamo:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{10} \cdot \frac{30}{7} = \frac{1}{10} \cdot \frac{7 \cdot 4 + 2}{7} = \frac{1}{10}\left(4 + \frac{2}{7}\right) = 0,4 + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{7}$$

In sostanza abbiamo trasformato le tre unità in 30 decimi (come se avessimo assunto il decimo come nuova unità) e abbiamo eseguito la divisione di 30 per 7: il quoziente è 4 ed il resto è 2.

Adesso, per avere l'approssimazione a meno di $\frac{1}{100}$ basta compiere un'analoga operazione sulla frazione $\frac{2}{7}$.

$$\frac{3}{7} = 0,4 + \frac{1}{100} \cdot \frac{20}{7} = 0,4 + \frac{1}{100}\left(\frac{7 \cdot 2 + 6}{7}\right) = 0,4 + \frac{1}{100}\left(2 + \frac{6}{7}\right) = 0,42 + \frac{1}{100}\frac{6}{7}$$

A queste operazioni si dà solitamente il ben noto assetto grafico:

```
30      | 7
 20     |0,4285714
  60
   40
    50
     10
      30
```

2

Nelle divisioni con resto che noi eseguiamo via via, i resti possibili sono i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6: infatti i resti sono sempre minori del divisore, che è 7, e non possono essere 0 perché la frazione non è equivalente ad un numero decimale. Quindi, ci possono essere al piú 6 resti diversi (e ci sono effettivamente nel nostro caso); proseguendo, ci deve essere un resto che si ripete e, da quel punto in poi, tutti i resti si devono ripetere ciclicamente. Questa constatazione ha carattere generale:

Se $\frac{p}{q}$ è la frazione che si vuole approssimare, vi saranno, al piú, $q-1$ resti diversi e quindi, ad un certo punto, si dovranno avere delle ripetizioni.

Gli allineamenti decimali che forniscono la migliore approssimazione per difetto di un numero razionale a meno di $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ sono dunque, da un certo punto in poi, periodici, cioè constano di un gruppo di cifre che si ripete ciclicamente. Questo fatto era certamente noto a tutti fin dalla scuola elementare: qui abbiamo cercato di capirne il perché.

Tornando al nostro esempio, il numero $\frac{3}{7}$ è sicuramente compreso tra 0 e 1 e i numeri 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285; ... sono i valori decimali con una, due, tre, ... cifre dopo la virgola, che meglio approssimano per difetto il numero razionale $\frac{3}{7}$. Si deduce allora che i valori 0,5; 0,43; 0,429; 0,4286; ... sono i numeri decimali, con una, due, tre, ... cifre dopo la virgola, che meglio approssimano per eccesso il numero razionale $\frac{3}{7}$. Abbiamo dunque la successione di intervalli:

$$[0;1] \quad [0,4;0,5] \quad [0,42;0,43] \quad [0,428;0,429] \quad [0,4285;0,4286] \quad \ldots$$

di ampiezza $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$ Essi hanno queste proprietà:

1 ciascuno è contenuto nel precedente;

2 le ampiezze degli intervalli diventano piccole quanto si vuole.

Chiameremo scatola cinese una successione di intervalli che godono dele proprietà 1 e 2.

Approssimiamo ora con numeri decimali la frazione $\frac{1}{9}$, che abbiamo trovato nel paragrafo precedente a proposito di Achille e la tartaruga. Si ha:

```
10     | 9
 10    | 0,111
  10
   1
```

3

I numeri 0; 0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; ... ci forniscono valori approssimati per difetto a meno di 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... Se aumentiamo di un'unità l'ultima cifra, siamo sicuri di ottenere i corrispondenti valori approssimati per eccesso: 1; 0,2; 0,12; 0,112; 0,1112; ...

Queste sono appunto le successioni **4.1** e **4.2** che avevamo trovato nel paragrafo precedente. Gli intervalli:

$$[0;1] \quad [0,1;0,2] \quad [0,11;0,12] \quad [0,111;0,112] \quad [0,1111;0,1112] \quad \ldots$$

forniscono dunque una scatola cinese che racchiude il numero $\frac{1}{9}$. Questa scatola cinese ci permette di individuare perfettamente il numero, che avevamo trovato all'inizio del paragrafo 4.2 risolvendo l'equazione. Così la successione dei tempi corrispondenti alle varie posizioni di Achille ha avuto una interpretazione interessante: il paradosso di Zenone ci è stato utile per presentare la soluzione del nostro problema in una nuova forma.

Fino ad ora abbiamo considerato soltanto scatole cinesi costruite mediante intervalli con estremi decimali. D'ora in poi accetteremo anche scatole cinesi:

- in cui gli intervalli hanno per estremi numeri razionali qualsiasi;
- costruite con intervalli degeneri (ricordiamo che abbiamo convenuto di chiamare degeneri gli intervalli che si riducono ad un punto solo).

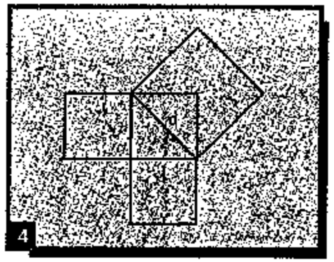
4.4 L'incommensurabilità della diagonale del quadrato con il lato

A questo punto dobbiamo presentare un fatto piuttosto sconcertante. Sappiamo che cosa significa che un segmento è una certa frazione di un altro: dire che T è i $\frac{3}{7}$ di U significa che la settima parte del segmento U sta esattamente 3 volte in T. Si dice allora che T ha misura $\frac{3}{7}$ assumendo U come unità di misura.

Ed ecco il fatto sconcertante:

Non sempre la misura di un segmento rispetto ad un altro si può esprimere mediante un numero razionale!

Faremo vedere che la misura della diagonale di un quadrato rispetto al lato non si può esprimere mediante un numero razionale (si dice anche che la diagonale è *incommensurabile* con il lato).



Sia dunque 1 la misura del lato e d quella della diagonale. Il teorema di Pitagora (che abbiamo appreso nella scuola media, e che ritroveremo piú avanti) ci dice che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa (la figura rende evidente questo risultato nel caso che ci interessa). Allora si ha:

$$1 + 1 = 2 = d^2$$

Dimostriamo che questa relazione non può essere vera se d è un numero razionale. Infatti, supponiamo che sia $d = \frac{p}{q}$ essendo p e q interi ($q \neq 0$), che possiamo pensare primi fra loro. Sostituendo in luogo di d nella uguaglianza scritta, ricaviamo:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per q^2, otteniamo:

$$2q^2 = p^2$$

Si tratta di dimostrare che questa relazione è assurda. Infatti essa ci dice che p^2 è un numero pari: ma allora anche p è pari perché se p fosse dispari il suo quadrato sarebbe dispari (lo abbiamo dimostrato nel paragrafo 2.4). Possiamo allora porre $p = 2m$. Perciò:

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

Ma questa relazione, ragionando come prima, ci dice che anche q deve essere pari. Siamo arrivati ad un assurdo perché p e q, essendo primi fra loro, non possono essere entrambi pari!

Vi è un altro modo piú rapido per rendersi conto che la relazione $2q^2 = p^2$ (con p, q interi, $q \neq 0$) non può essere vera. Scomponendo p^2 e q^2 in fattori primi, si vede subito che ogni fattore compare un numero pari di volte in entrambi i numeri (attenzione: se un fattore primo non compare, cioè compare 0 volte, l'affermazione è ancora vera perché 0 è un numero pari).

Seguiamo ora le vicende del fattore 2: in $2q^2$ compare un numero dispari di volte, in p^2 compare un numero pari di volte; allora l'uguaglianza è assurda! Questa dimostrazione è piú intuitiva: abbiamo però avuto bisogno del seguente risultato anche esso intuitivo, ma un po' complicato da dimostrarsi:

Ogni intero si scompone in modo unico in fattori primi (a parte, s'intende, l'ordine dei fattori: ad esempio: $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3$*).*

La scoperta della incommensurabilità della diagonale di un quadrato con il lato fu fatta dalla scuola di Pitagora nel VI secolo a.C., ed ebbe un'enorme importanza nello sviluppo della matematica greca.

4.5 Le scatole cinesi per rappresentare il numero $\sqrt{2}$

Se non si può trovare alcun numero razionale il cui quadrato sia esattamente 2, possiamo però trovare dei numeri razionali (anzi, dei numeri decimali) il cui quadrato è molto vicino a 2. Questi numeri consentiranno di costruire una scatola cinese che potremo chiamare *radice di 2* e indicare con il simbolo consueto $\sqrt{2}$. Consideriamo gli intervalli $[a; b]$ in cui $a^2 < 2$ e $b^2 > 2$; diremo allora, anche con un po' di forzatura, che a è un'approssimazione per difetto e b una approssimazione per eccesso di $\sqrt{2}$. Vediamo ad esempio come si può costruire una opportuna scatola cinese che ci consenta di arrivare alla $\sqrt{2}$. 1 è certamente un valore approssimato per difetto, 2 un valore approssimato per eccesso; per avere un'approssimazione migliore dividiamo l'intervallo $[1; 2]$ in dieci intervalli uguali:

Tabella 1

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61
	< 2	< 2	< 2	< 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2

Osserviamo questa tabella: nel passaggio da 1,4 ad 1,5 il quadrato passa da un numero minore di 2 ad un numero maggiore di 2: l'intervallo $[1,4; 1,5]$ è il nuovo intervallo di approssimazione.

Possiamo suddividere anche questo in 10 parti uguali. Troviamo:

$$1,41^2 = 1,9881 < 2 \qquad 1,42^2 = 2,0164 > 2$$

Quindi abbiamo un intervallo di approssimazione $[1,41; 1,42]$ contenuto nel precedente, di ampiezza $\frac{1}{100}$. Così possiamo continuare: abbiamo la seguente tabella di valori approssimati.

Tabella 2

PER DIFETTO	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...
PER ECCESSO	2	1,5	1,42	1,415	1,4143	...

4.3

Ecco la scatola cinese che abbiamo costruito:

$$[1; 2] \;\; [1,4; 1,5] \;\; [1,41; 1,42] \;\; [1,414; 1,415] \;\; \ldots$$

Il procedimento che abbiamo descritto ci permette di proseguire indefinitamente determinando le cifre decimali una dopo l'altra, anche se non c'è una legge semplice (come era quella della periodicità) che consenta di scriverle subito.

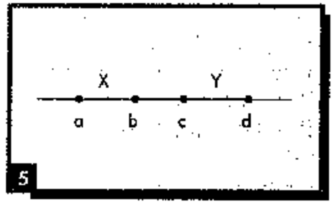
Abbiamo così costruito una scatola cinese: ma, a differenza di quello che accadeva prima (nel paragrafo 4.3 abbiamo costruito una scatola cinese che conteneva il numero $\frac{3}{7}$), ora nella nostra scatola cinese non c'è dentro ... nulla (cioè non c'è dentro nessun numero razionale: infatti, se ci fosse, il suo quadrato dovrebbe essere esattamente 2 mentre abbiamo visto che questo non può accadere).

4.6 I numeri reali e le loro proprietà algebriche

Eccoci finalmente alla conclusione del nostro discorso. Vogliamo far vedere che le scatole cinesi si comportano come veri e propri numeri, nel senso che:

È possibile definire per esse delle operazioni di addizione e moltiplicazione che hanno tutte le proprietà considerate nel capitolo 1 di questo modulo; è possibile definire una relazione d'ordine che gode di tutte le proprietà messe in evidenza nel capitolo 3 (paragrafo 3.2).

Ci accontenteremo di dare un'idea intuitiva di tutto ciò. Cominciamo dalla relazione d'ordine. Per capire come si può procedere, cominciamo proponendoci di voler confrontare fra loro due numeri x, y che non sono noti esattamente, ma solo attraverso loro valori approssimati per difetto e per eccesso. Sappiamo, ad esempio, che $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.



5

Se i due intervalli $[a; b]$ e $[c; d]$ sono disgiunti (cioè non hanno alcun punto in comune) i due numeri x ed y sono certamente diversi: qual è il piú grande? Supponiamo che sia $b < c$, cioè che il valore approssimato per eccesso di x sia minore di un valore approssimato per difetto di y. Non c'è dubbio allora che deve essere $x < y$.

Un discorso analogo vale per le scatole cinesi, le quali appunto non sono altro che una successione di intervalli di approssimazione. Consideriamo, ad esempio, le due scatole cinesi formate dai valori decimali approssimati di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, rispettivamente. Ricordiamo che per $\sqrt{2}$ si hanno i valori approssimati delle successioni di Tab. 2, mentre per $\sqrt{3}$ si hanno i seguenti valori:

Tabella 3

PER DIFETTO	1	1,7	1,73	1,732	1,7320	...
PER ECCESSO	2	1,8	1,74	1,733	1,7321	...

4.4

Se prendiamo valori interi come valori approssimati, troviamo che 1 è valore approssimato per difetto e 2 valore approssimato per eccesso, per entrambi. Quindi l'intervallo $[1; 2]$ appartiene ad entrambe le scatole cinesi, ma basta prendere le approssimazioni a meno di $\frac{1}{10}$ per trovare intervalli disgiunti. Infatti il secondo intervallo della scatola cinese che rappresenta $\sqrt{2}$ è $[1,4; 1,5]$, mentre il secondo intervallo della scatola cinese che rappresenta $\sqrt{3}$ è $[1,7; 1,8]$. Essendo $1,5 < 1,7$, è chiaro che si deve scrivere $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ (qui ormai i simboli $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ stanno appunto ad indicare le relative scatole cinesi).

Ma può accadere che due scatole cinesi, al contrario di quanto abbiamo fatto su $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, non si possano separare. Ad esempio, consideriamo le due scatole cinesi:

Tabella 4

PER DIFETTO	0	0,9	0,99	0,999	...
PER ECCESSO	2	1,1	1,01	1,001	...
PER DIFETTO	0	0,8	0,98	0,998	...
PER ECCESSO	2	1,2	1,02	1,002	...

Entrambe racchiudono il numero 1; notiamo che: ciascun valore per difetto della prima non supera ciascun valore per eccesso della seconda, mentre ciascun valore per difetto della seconda non supera ciascun valore per eccesso della prima. Dunque, non è possibile trovare un intervallo della prima scatola cinese ed uno della seconda che siano disgiunti.

La relazione che abbiamo descritto è una relazione di equivalenza tra scatole cinesi; non sarebbe difficile verificare che essa gode delle proprietà *riflessiva, simmetrica e transitiva* (rivedere a questo proposito il paragrafo 3.1).

Possiamo allora dare la seguente definizione:

Chiameremo numero reale una classe di equivalenza di scatole cinesi.

In parole povere: una scatola cinese individua un numero reale, ma può essere anche che infinite scatole cinesi, fra loro equivalenti, definiscano lo stesso numero reale.

Questa definizione può sembrare complicata, ma ha precedenti importanti: siamo già abituati, ad esempio, a dire che le due frazioni (diverse ma equivalenti fra loro) rappresentano lo stesso numero razionale.

Vediamo ora come i numeri reali si possono sommare e moltiplicare fra loro. Anche in questo caso l'idea buona ci viene suggerita dal calcolo approssimato. Supponiamo ancora che x ed y siano numeri di cui si conoscono solo valori approssimati per difetto e per eccesso. Sia $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Allora, come abbiamo già notato nel paragrafo 4.1, si ha $a + c \leq x + y \leq b + d$, cioè $a + c$ (somma dei valori approssimati per difetto) è un valore approssimato per difetto di $x + y$, mentre $b + d$ (somma dei valori approssimati per eccesso) è un valore approssimato per eccesso di $x + y$. Ad esempio, vogliamo sommare il numero reale $\sqrt{2}$ con il numero reale $\sqrt{3}$. Possiamo rappresentare i numeri con le scatole cinesi considerate prima: uno degli intervalli che definiscono $\sqrt{2}$ è [1,41; 1,42]; uno degli intervalli che definiscono $\sqrt{3}$ è [1,73; 1,74]. Allora, uno degli intervalli della scatola cinese che rappresenta $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sarà [3,14; 3,16]. L'ampiezza degli intervalli originari era $\frac{1}{100}$; l'ampiezza dell'intervallo ottenuto è $\frac{2}{100}$. È chiaro che se avessimo preso per $\sqrt{2}$ e per $\sqrt{3}$ intervalli di approssimazione di ampiezza $\frac{1}{1000}$ avremmo ottenuto un intervallo di ampiezza $\frac{2}{1000}$. Si intuisce dunque che, con questo procedimento, si ottiene una nuova scatola cinese.

E se avessimo utilizzato altre scatole cinesi per rappresentare $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$? Il risultato sarebbe stato diverso, ma si sarebbe trattato di una scatola cinese equivalente a quella ottenuta prima. Sarebbe un po' noioso fare la dimostrazione completa di questo fatto, ma si intuisce che l'affermazione è vera.

Per il prodotto si potrà fare in modo analogo. Consideriamo due numeri positivi (cioè, maggiori di 0). Possiamo rappresentarli con due scatole cinesi costruite rispettivamente con intervalli di approssimazione tutti positivi: moltiplicando fra loro i valori approssimati per difetto si ottiene un valore minore di quello che si ottiene moltiplicando i valori approssimati per eccesso. Ad esempio, il numero $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ sarà rappresentato da una scatola cinese che ha fra i suoi intervalli l'intervallo $[1,41 \cdot 1,73; 1,42 \cdot 1,74] = [2,4393; 2,4708]$. Si intuisce che se in ciascuna delle due scatole cinesi si prendono intervalli di ampiezza molto piccola, moltiplicando fra loro gli estremi (cioè il valore per difetto per il valore per difetto e il valore per eccesso per il valore per eccesso) si otterrà un intervallo di ampiezza molto piccola. Anche in questo caso si può dimostrare che cambiando le scatole cinesi che rappresentano i due numeri reali, si ottiene una scatola cinese equivalente alla precedente. Dunque, anche il prodotto fra numeri reali risulta perfettamente definito.

Nel prossimi anni, proseguendo negli studi di matematica, avremo occasione di ritornare con maggiore precisione e profondità sulle nozioni ora presentate.

Se dentro ad una scatola cinese c'è un numero razionale (nel senso che questo numero è contenuto in tutti gli intervalli), allora la scatola cinese si identificherà con questo numero (ricordiamo l'esempio della frazione $\frac{1}{9}$ e della scatola cinese di numeri decimali che abbiamo costruito). Se la scatola cinese non contiene alcun numero razionale (ricordiamo il caso di $\sqrt{2}$), allora si dice che essa rappresenta un *numero irrazionale*.

L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$ (e lo si chiama anche *retta reale* perché, per la relazione di ordinamento, i numeri reali possono essere rappresentati su una retta, come vedremo più ampiamente nel modulo della geometria).

Così l'insieme $\mathbb{Z}$ (degli interi relativi) è contenuto nell'insieme $\mathbb{Q}$ (dei razionali) e questo, a sua volta, è contenuto nell'insieme $\mathbb{R}$ (del numeri reali).

Quest'ultimo è dunque l'insieme numerico più ampio che consideriamo, almeno per ora. D'ora in poi, quando diremo numero senza altra specificazione, intenderemo sempre numero reale.

4.7 La completezza della retta reale

La retta reale (come ormai possiamo chiamare l'insieme dei numeri reali) ha ancora una proprietà molto importante. Cominciamo ad osservare che siamo in grado di costruire scatole cinesi di numeri reali. La definizione è del tutto analoga.

Una scatola cinese nel campo relae è una successione di intervalli, con estremi reali ciascuno contenuto nel precedente, le cui ampiezze diventano piccole quanto si vuole.

Occorre soltanto tener presente che ora si tratta di intervalli di numeri reali, con estremi che sono numeri reali.

Ebbene, vale la seguente proprietà:

Proprietà di completezza: ogni scatola cinese di numeri reali racchiude uno ed un solo numero reale.

Per apprezzare la novità di questa affermazione, occorre ricordare che la proprietà di completezza non vale nell'ambito dei numeri razionali: una scatola cinese di numeri razionali può non racchiudere alcun numero razionale, come abbiamo constatato a proposito della incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato. Anzi, le scatole cinesi di numeri razionali ci sono servite proprio per definire nuovi numeri. Niente di simile accade partendo dai numeri reali: le scatole cinesi di numeri reali racchiudono sempre numeri reali, e non numeri di un nuovo tipo.

Ecco perché la nostra proprietà si dice *di completezza*.

Come si dimostra la proprietà di completezza? Ne daremo un'idea sostanziale, senza entrare nei dettagli dell'esposizione. Sia $[\alpha_n; \beta_n]$ una scatola cinese di numeri reali. Se teniamo presente che α_n e β_n, come numeri reali, sono rappresentati ciascuno da scatole cinesi di numeri razionali, possiamo immaginare α_n e β_n, approssimati per eccesso e per difetto da nugoli di numeri razionali. Ebbene, possiamo prendere un numero razionale a_n che approssima per difetto α_n molto da vicino, ed un numero razionale b_n che approssima per eccesso β_n molto da vicino. Se la scelta di a_n e b_n è fatta con giudizio, si ottiene una scatola cinese $[a_n, b_n]$ di intervalli razionali. Questa definisce un numero reale γ: si intuisce che è proprio γ ad essere racchiuso nella scatola cinese $[\alpha_n; \beta_n]$.

Nel proseguimento del nostri studi di matematica avremo occasione di vedere importantissime conseguenze di questa proprietà di completezza.

A conclusione di questo capitolo, vogliamo esporre alcune nozioni relative alla radice quadrata, di cui ci serviremo immediatamente.

È facile dimostrare, nello stesso modo con cui abbiamo proceduto per definire $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ che, dato un numero reale $a \geq 0$, esiste uno ed un solo numero reale $x \geq 0$ tale che $x^2 = a$. Questo numero si indica col simbolo $\sqrt{a}$.

Insistiamo sul fatto che il simbolo $\sqrt{a}$ indica il numero reale non negativo x tale che $x^2 = a$. È errato, ad esempio, scrivere $\sqrt{4} = -2$, almeno se si intende che sia anche $\sqrt{4} = 2$; infatti per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, ne deriverebbe che $2 = -2$.

Analogamente, per ogni numero intero positivo n, si ha che, dato un numero reale $a \geq 0$, esiste uno ed un solo numero reale $x \geq 0$ tale che $x^n = a$; tale numero si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$ e si legge radice n-esima di a; (a si chiama radicando e n indice della radice). Osserviamo che per $n = 1$ la radice coincide con il radicando: $\sqrt[1]{a} = a$

Ed ecco, infine, alcune proprietà importanti che lasciamo da dimostrare al lettore:

1 Se $x \geq 0, y \geq 0$: $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$.

2 Se $0 < x < y$, allora $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

VOCABOLI E SIMBOLI

- valore approssimato (per difetto, per eccesso)
- intervallo di approssimazione
- dividendo, divisore
- quoziente, resto
- scatola cinese = numero reale
- segmenti incommensurabili tra loro
- numeri irrazionali
- $\mathbb{R}$: retta reale (insieme dei numeri reali)
- $\sqrt{x}$: radice quadrata di x ($x \geq 0$)
- $\sqrt[n]{x}$: radice n-esima di x ($x \geq 0$)