Ingegneria Civile-Ambientale
24/1/2020

Analisi Matematica 1

Cognome: ______________________
Nome: ______________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 3 + i$ e $C = \mathrm{Re}\left(-\dfrac{4z}{z-3} - \mathrm{Im}(z) + z\bar{z}\right) + |z|^2$. Allora $C =$ ___15___ . (2 pt.)

2. Sia

$$\ell = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}{x^2+1} + \frac{\log(x) + \cos(x-1) - e^{x-1}}{(x-1)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}\right).$$

Allora $\ell =$ ___-1___ . (2 pt.)

3. Sia $f(x) = \arctan(\sin(x)) + 2x + 2$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.
Allora $t(1) =$ ___5___ . (2 pt.)

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-3}^{-1}\left(\frac{-16}{\pi(4 + (x+1)^2)} + x\log(-x)\right)dx.$$

Allora $2I =$ ___$-9\log 3$___ . (2 pt.)

5. Sia

$$l := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\cos n + \sin(1/n)}{n^3} + \frac{\sin(n) + \log(6n^5) + 3n^2 + n}{-n^2 + 3\log(5n^6)}\right).$$

Allora $l =$ ___-3___ . (2 pt.)

6. Calcola la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2ty = t \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

___$y(t) = e^{t^2} - \frac{1}{2}$___ . (2 pt.)

7. Considera $f(x, y) = \arctan(x^2y^2)$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x| \leq |y|, 0 \geq y \geq -1\}$. Sia M il valore massimo assunto da f su K e sia m il valore minimo assunto da f su K.
Allora $M + m =$ ___$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$___ . (2 pt.)

8. Sia $I = \iiint_G 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$.
Allora $I =$ ___81π___ . (2 pt.)

9. Sia D il determinante dell'Hessiana della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2y - \sin(y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, \pi)$.
Allora D= -4 .

2 pt.

10. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2ye^z$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo $F(x, y, z) = (e^z, x, \sin(y))$. Calcola $\nabla \cdot (\nabla f + \nabla \times F)$. (*La divergenza della somma tra il gradiente di f e il rotore di F*)
$ye^z(2 + x^2)$.

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = |3e^{-|x|} - 1|$, $x \in R$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) concava, H) pari, I) assume massimo assoluto in $x = 0$.
La risposta è: **ACDHI**

4 pt.

12. Enunciare il Teorema di Weierstrass.
Soluzione:

3 pt.

13. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \int_2^{+\infty} \frac{e^{(-\alpha^2+1)x}}{x+2} \mathrm{d}x$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

3 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
(b) L'integrale converge solo per $\alpha^2 = 1$
(c) L'integrale converge solo per $\alpha^2 = 2$
(✔) L'integrale converge solo per $\alpha^2 > 1$
(e) L'integrale converge solo per $\alpha^2 < 1$

14. Considera la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 12n(3 - x)^n$$

4 pt.

definita nell'insieme in cui converge la serie di potenze al secondo membro.

1. Determina l'insieme in cui definita f $(2, 4)$.
2. Scrivi la serie di potenze corrispondente a f' $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 12n(3 - x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 12(n + 1)(3 - x)^n$
3. Determina il raggio di convergenza della serie calcolata al punto (2) 1 .