

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta  $\geq 18$  e se il punteggio della prima parte  $\geq 12$ . Il tempo a disposizione è 2 ore.

**PRIMA PARTE**

1. Sia  $f(x) = xe^{\frac{1-x}{x}}$  e sia  $t$  la retta tangente ad  $f$  in  $(1, f(1))$ .  
Allora  $t(-3) = \underline{\hspace{2cm} 1 \hspace{2cm}}$ .

3 pt.

2. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^{4/9} \frac{1}{\sqrt{x(4+9x)}} dx.$$

3 pt.

Allora  $12I = \underline{\hspace{2cm} \pi \hspace{2cm}}$ .

3. Sia

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x^2 \left( \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) + \frac{2e^{2x} + 2 + \log(x)}{x^3 + x^2 - e^{2x}} \right).$$

3 pt.

Allora  $l = \underline{\hspace{2cm} -3 \hspace{2cm}}$ .

4. Sia  $z = 2i + 3$  e  $C = \operatorname{Im} \left( \frac{z}{z-i} + |z| + \operatorname{Im}z + z\bar{z} \right)$ . Allora  $10C = \underline{\hspace{2cm} 3 \hspace{2cm}}$ .

3 pt.

5. Sia

$$f(x) = e^{-x} - e^{-3x}, \quad x > 1,$$

3 pt.

e sia  $g$  la funzione inversa di  $f$ . Dopo aver verificato che  $f(\log 3) = 8/27$ , calcolare  $g'(8/27) = \underline{\hspace{2cm} -27/6 \hspace{2cm}}$ .

6. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n^2 \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{\sin(n)}{n} \right).$$

3 pt.

Allora  $\ell = \underline{\hspace{2cm} +\infty \hspace{2cm}}$ .

**SECONDA PARTE**

7. Sia  $f(x) = \frac{x^2}{\log(|x|) - 1}$ . Quali delle seguenti proprietà ha  $f$ ? A) derivabile nel suo dominio, B)  $\text{dom}(f) \equiv \mathbf{R} \setminus \{e\}$ , C) sup. limitata, D) pari, E) monotona, F) ha due asintoti verticali, G) concava, H) assume minimo relativo in  $x = 0$ .  
 La risposta è:     **ADF**

4 pt.

8. Enunciare il Teorema di Fermat.

3 pt.

9. Dato  $a \in \mathbf{R}$  e l'integrale improprio  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(4+9x)} dx$ , stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

- (a) L'integrale diverge a  $+\infty$  per ogni valore di  $a$ .
- (b) L'integrale converge se e solo se  $a < 1$ .
- (c) L'integrale converge se e solo se  $a \in (0, 1)$ .
- (d) L'integrale converge se e solo se  $a > 0$ .
- (e) L'integrale converge se e solo se  $a > -4/9$ .