Ingegneria Edile-Architettura
17/9/2020

Analisi Matematica 1

Cognome: ______________________
Nome: ______________________

Appello online. Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Sia $z = 2 + 4i$ e $C = \mathrm{Im}\left(\dfrac{2z}{z-2} + \mathrm{Re}(z) + z\bar{z} + z - \bar{z}\right)$. Allora $C =$ ____7____ . [ ] 3 pt.

Sol.: $\mathrm{Im}(\mathrm{Re}(z)) = 0$, $z\bar{z} = |z|^2$ e quindi $\mathrm{Im}(z\bar{z}) = 0$, $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z) = 8i$ e quindi $\mathrm{Im}(z - \bar{z}) = 8$, $\frac{2z}{z-2} = \frac{2(2+4i)i}{4ii} = \frac{4i-8}{-4}$ e quindi $\mathrm{Im}\left(\frac{2z}{z-2}\right) = -1$.

2. Sia [ ] 3 pt.

$$I = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x^2) - 1}{x^2+1} + \frac{1 - \cos x + \mathrm{e}^x - 1 - x}{\sin(x^2)}\right).$$

Allora $I =$ ____1____ .

Sol.: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$, $\frac{1-\cos x + \mathrm{e}^x - 1 - x}{\sin(x^2)} \sim \frac{x^2/2 + x + x^2/2 - x}{x^2}$ per $x \to 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - \cos x + \mathrm{e}^x - 1 - x}{\sin(x^2)}\right) = 1.$$

3. Sia $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\arctan x}{x^3+1} + x + 1$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$. [ ] 3 pt.
Allora $t(2) =$ ____4____ .
Sol.: $f'(x) = \frac{\left(2x + \frac{2}{x^2+1}\right)(x^3+1) + 3x^2(x^2 + 2\arctan x)}{(x^3+1)^2} + 1$. Da cui $f'(0) = 3$, $f(0) = 1$. Da cui $t(x) = 3x + 1$ e $t(2) = 7$.

4. Sia dato l'integrale definito [ ] 3 pt.

$$I = \int_{-1}^{0}\left(4x^3\mathrm{e}^{x^4} - x\mathrm{e}^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right)dx.$$

Allora $I + \mathrm{e} =$ ____2____ .

Sol.: Per simmetria si ha, $\int_{-1}^{0}\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 0$. Per sostituzione si ha $\int_{-1}^{0}\left(4x^3\mathrm{e}^{x^4}\right)dx = \mathrm{e}^{x^4}|_{-1}^{0} = 1 - \mathrm{e}$. Integrando, infine, per parti, si ha $\int_{-1}^{0}(-x\mathrm{e}^{-x})dx = -\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}dx + (x\mathrm{e}^{-x})|_{-1}^{0} = \mathrm{e}^{-x}|_{-1}^{0} - \mathrm{e} = 1 - \mathrm{e} + \mathrm{e} = 1$.

5. Sia [ ] 3 pt.

$$l := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n^{-4})}{\log(1 - n^{-4})} + \frac{e^{-n} + \log(1 + n^{-1}) + 1}{2 - \cos(n^{-2}) - n^{-2}}\right).$$

Allora $2l =$ ____0____ .

Sol.: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^{-4})}{\log(1+n^{-4})} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-4}}{-n^{-4}} = -1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n} + \log(1+n^{-1}) + 1}{2 - \cos(n^{-2}) - n^{-2}} = \frac{0+0+1}{2-1-0} = 1$.

6. Sia

$$f(x) = \frac{3\pi + x}{x^2 + 4} - \arctan(e^x)$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f. Allora $g'(\pi/2) =$ -4 .
Sol.:

$$f(0) = \pi/2, \quad f'(x) = \frac{(x^2 + 4) - 2x(3\pi + x)}{(x^2 + 4)^2} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, \quad f'(0) = -\frac{1}{4}$$

7. Sia $f(x) = e^{-x} \sin(4x) + 1$, $x \in [0, +\infty)$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona crescente, F) convessa, G) pari, H) periodica.
La risposta è: **ABCD**

3 pt.

8. Cosa dice il Teorema fondamentale del calcolo integrale? (La risposta corretta è una sola).

4 pt.

A) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione continua e G è una sua primitiva su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

B) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione continua e G è una sua primitiva su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)dx = G(a) - G(b)$.

C) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione derivabile in (a, b) e G è una sua primitiva su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)dx = G'(b) - G'(a)$.

La risposta è: **A**

9. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{(x-3)x^\alpha} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
(b) Per ogni α l'integrale diverge a $-\infty$
(c) L'integrale converge solo per $\alpha > 3$
(d) L'integrale converge solo per $\alpha < 1/3$
(✔) L'integrale converge solo per $\alpha > 1/3$