Ingegneria Edile-Architettura
3/9/2020

Analisi Matematica 1

Cognome: ______________________
Nome: ______________________

Appello online. Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Sia $z = 4 - 3i$, e sia $C = \frac{5}{z} + z\bar{z}$.
Allora $5\,(\operatorname{Im} C) =$ ____3____ . | 3 pt.

Sol.: $z\bar{z} = |z|^2$, quindi $Im(z\bar{z}) = 0$.

$$\frac{5}{z} = \frac{5(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = 5\frac{4+3i}{25}$$

Quindi $Im(C) = \frac{3}{5}$.

2. Sia | 3 pt.

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{6^{-1/x} + x^3 + 6|x|}{\log^{48}(|x|) + 2 + 4^x}.$$

Allora $I =$____0____ .

Sol.:

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x + x^3 + 1}{4^x + \log^{48}(x) + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4^x} = 0.$$

3. Sia $f(x) = \frac{\sin x + 2}{x^2+1} + 2x + 1$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.
Allora $t(1) =$____6____ . | 3 pt.
Sol.:

$$f(0) = 3, \quad f'(x) = \frac{\cos(x)(x^2+1) - 2x(\sin(x)+2)}{(x^2+1)^2} + 2,$$

$$f'(0) = 1 + 2 = 3,\ t(x) = 3(x-0) + 3,\ t(1) = 6$$

4. Sia dato l'integrale definito | 3 pt.

$$I = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^x\cos(x) + \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3}{8\pi^2}x\right) + \sin(x)\,dx.$$

Allora $2e^{-2\pi}I =$____1____ .

Sol.: Per simmetria si ha,

$$I = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^x\cos(x) + \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3}{8\pi^2}x\right)dx$$

Inoltre

$$2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3}{8\pi^2}x\right) = \frac{1}{2}$$

e

$$2\int_0^{2\pi} e^x\cos(x)dx = 2\int_0^{2\pi} e^x\sin(x)dx + 2[\cos(x)e^x]|_0^{2\pi} = -2\int_0^{2\pi} e^x\cos(x)dx + 2[(\cos(x)+\sin(x))e^x]|_0^{2\pi}.$$

Da cui $2\int_0^{2\pi} e^x\cos(x)dx = e^{2\pi} - 1$ e quindi $I = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

5. Sia

$$l := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{2n^5 - 3n - \arctan(n)}{n^3 - n^5 - \log(n^3)} \right).$$

3 pt.

Allora $l =$ ____ -2 ____ .

Sol.: $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left(0 + \frac{2n^5}{-n^5}\right) = -2$

6. Sia, per $x > -1$,

$$f(x) = e^{\sin x} + 2\log(1+x) - \frac{3}{x^2+3}$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f. Allora $6g'(0) =$ ____ 2 ____ .
Sol.:

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = e^{\sin x}\cos(x) + \frac{2}{x+1} + 6x(x^2+3)^{-2}, \quad f'(0) = 1 + 2 + 0 = 3$$

7. Sia $f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x+4}\right)$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) è definita su tutto R, B) derivabile, C) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in dom(f)$ D) inf. limitata, E) monotona, F) ha due asintoti verticali, G) ha asintoto orizzontale, H) dispari. La risposta è: ____ **BCFG** ____

3 pt.

Sol.: Abbiamo: $dom(f) = (-\infty, -4) \cup (3 + \infty)$, quindi f non e' definita su tutto R. $limx \to \pm\infty f(x) = 0$, quinndi f ha asintoto oriozzontale $y = 0$. $lim_{x\to-4^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$, quindi f ha due asintoti verticali. f non e' monotona perche' $f(-6) < f(-5)$, ma $f(-5) > f(4)$. $f'(x) = \frac{7}{(x-3)(x+4)} > 0$ sul dominio di f.

8. Cosa dice il Teorema di Lagrange? (La risposta corretta è una sola).

4 pt.

A) Se $f : [a,b] \to R$ è una funzione derivabile in (a,b) allora esiste un punto $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

B) Se $f : [a,b] \to R$ è una funzione derivabile in (a,b), allora $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(a)$.

C) Se $f : [a,b] \to R$ è una funzione derivabile in (a,b) allora esiste un punto $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $f'(\bar{x}) = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$.

La risposta è: ____ **A** ____

9. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} x^3 e^{\alpha x} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
(b) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 0$
(✔) L'integrale converge solo per $\alpha < 0$
(d) 'integrale converge solo per $\alpha > 0$
(e) L'integrale converge solo per $\alpha > 1$