Ingegneria Civile-Ambientale
17/9/2020

Analisi Matematica

Cognome: ______________________
Nome: ______________________

Appello online. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Sia $z = 2 + 4i$ e $C = \mathrm{Im}\left(\frac{2z}{z-2} + \mathrm{Re}(z) + z\bar{z} + z - \bar{z}\right)$. Allora $C =$ ___7___ .

3 pt.

Sol.: $\mathrm{Im}(\mathrm{Re}(z)) = 0$, $z\bar{z} = |z|^2$ e quindi $\mathrm{Im}(z\bar{z}) = 0$, $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z) = 8i$ e quindi $\mathrm{Im}(z - \bar{z}) = 8$, $\frac{2z}{z-2} = \frac{2(2+4i)i}{4ii} = \frac{4i-8}{-4}$ e quindi $\mathrm{Im}\left(\frac{2z}{z-2}\right) = -1$.

2. Sia

$$I = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x^2) - 1}{x^2 + 1} + \frac{1 - \cos x + \mathrm{e}^x - 1 - x}{\sin(x^2)}\right).$$

3 pt.

Allora $I =$ ___1___ .

Sol.: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$, $\frac{1-\cos x + \mathrm{e}^x - 1 - x}{\sin(x^2)} \sim \frac{x^2/2 + x + x^2/2 - x}{x^2}$ per $x \to 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - \cos x + \mathrm{e}^x - 1 - x}{\sin(x^2)}\right) = 1.$$

3. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-1}^{0}\left(4x^3\mathrm{e}^{x^4} - x\mathrm{e}^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right)dx.$$

3 pt.

Allora $I + \mathrm{e} =$ ___2___ .

Sol.: Per simmetria si ha, $\int_{-1}^{0}\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 0$. Per sostituzione si ha $\int_{-1}^{0}\left(4x^3\mathrm{e}^{x^4}\right)dx = \mathrm{e}^{x^4}|_{-1}^{0} = 1 - \mathrm{e}$. Integrando, infine, per parti, si ha $\int_{-1}^{0}(-x\mathrm{e}^{-x})dx = -\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}dx + (x\mathrm{e}^{-x})|_{-1}^{0} = \mathrm{e}^{-x}|_{-1}^{0} - \mathrm{e} = 1 - \mathrm{e} + \mathrm{e} = 1$.

4. Sia $f(x) = \frac{x^2 + 2\arctan x}{x^3 + 1} + x + 1$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.
Allora $t(2) =$ ___4___ .

3 pt.

Sol.: $f'(x) = \frac{\left(2x + \frac{2}{x^2+1}\right)(x^3+1) + 3x^2(x^2 + 2\arctan x)}{(x^3+1)^2} + 1$. Da cui $f'(0) = 3$, $f(0) = 1$. Da cui $t(x) = 3x + 1$ e $t(2) = 7$.

5. Calcola il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{\cos(n^{-1})5^n}.$$

3 pt.

Soluzione: 5.
Per il criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}.$$

Per il criterio del confronto,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} = \frac{n+1}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n} = \frac{1}{5}.$$

6. Sia $P(x,y)$ il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione $f(x,y) = \cos(xy + x)$ centrato in $(0,0)$. Allora $P(3\sqrt{2}, \pi^2) =$ 3 pt.

Soluzione: -8.

$P(x,y) = 1 - \frac{x^2}{2}$, quindi $P(3\sqrt{2}, \pi^2) = 1 - 9 = -8$.

7. Calcola $\iiint_B y\ dxdydz$, dove $B = \{(x,y) : y \in [-1,1], y-1 \le x \le y^2 \text{ e } z \in [0,3]\}$. 3 pt.

Soluzione: -2.

Infatti

$$\begin{aligned}\iiint_B y\ dxdydz &= \int_0^3 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{y-1}^{y^2} y\ dx \right) dy \right) dz \\ &= 3\int_{-1}^1 y^3 - y^2 + y\ dy \\ &= 3\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1 \\ &= 3 \cdot -\frac{2}{3} = -2.\end{aligned}$$

8. Sia $f(x) = e^{-x}\sin(4x) + 1$, $x \in [0, +\infty)$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona crescente, F) convessa, G) pari, H) periodica. 4 pt.

La risposta è: **ABCD**

9. Indica quali delle seguenti condizioni sono equivalenti a 4 pt.

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3 \ \text{ conservativo.}$$

sotto l'ipotesi che F sia di classe C^1.

1. $\nabla \times F = (0,0,0)$;
2. $\nabla \cdot F = 0$;
3. $\oint_C F ds = 0$ per ogni curva $C \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$;
4. $\oint_C F ds = 0$ per ogni curva chiusa $C \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Soluzione: siccome $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ semplicemente connesso, le risposte corrette sono (1) e (4).

10. Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere per una curva regolare parametrizzata da $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. 3 pt.

1. per ogni $t_0 \in (0,1)$, $f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + \mathbf{o}((t - t_0))$;
2. per ogni $t \in [0,1]$ per cui il versore normale ben definito, $T(t) \cdot N(t) = 0$;
3. f pu non essere rettificabile.

Soluzione: 1, 2.