

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 2 + i$ e $C = \left| \left(\frac{z}{z-2} + 2\text{Im}(z) + \text{Re}z - z\bar{z} \right) \right|^2$. Allora $C =$ 4 .

3 pt.

2. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1 + x + 3^x}{(\log^2(|x|) + 2 + 2e^x)^2}$$

3 pt.

Allora $\ell =$ 1/4 .

3. Sia $f(x) = 1 - e^{-3x}$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.

Allora $t(2) =$ 6 .

3 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{1+x^2} \right) dx.$$

3 pt.

Allora $I =$ 1/2 log 2 + 1 .

5. Sia, per $x \geq 2$, $f(x) = (x^2 - 1)^3(2 - x)$ e sia g la funzione inversa di f . Allora $g'(0) =$ -1/27 .

3 pt.

6. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{1/n} - \cos(1/n)}{\sqrt[3]{1 + 1/n} - 1 + 1/n} \right).$$

3 pt.

Allora $\ell =$ 3/4 .

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = \log(2x) - \arctan(2x - 2)$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) è definita su tutto \mathbf{R} , B) derivabile, C) superiormente limitata, D) inferiormente limitata, E) monotona, F) ha un asintoto verticale, G) ha minimo relativo in $x = 5/4$, H) convessa, . La risposta è: **BF**

4 pt.

8. Enunciare il teorema del valor medio di Lagrange.

Soluzione:

3 pt.

9. Dato l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

- (a) L'integrale diverge a $+\infty$
- (b) L'integrale diverge a $-\infty$
- (c) L'integrale converge a $\pi^2/8$
- (d) L'integrale converge a $\pi/4$
- (e) L'integrale converge a $\pi/2$