Ingegneria Civile-Ambientale
3/9/2020

Analisi Matematica

Cognome: ____________________
Nome: ____________________

Appello online. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Sia $z = 4 - 3i$, e sia $C = \frac{5}{z} + z\bar{z}$.
Allora $5\,(\mathrm{Im}\, C) =$ ____3____ .

3 pt.

Sol.: $z\bar{z} = |z|^2$, quindi $Im(z\bar{z}) = 0$.

$$\frac{5}{z} = \frac{5(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = 5\frac{4+3i}{25}$$

Quindi $Im(C) = \frac{3}{5}$.

2. Sia

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{6^{-1/x} + x^3 + 6|x|}{\log^{48}(|x|) + 2 + 4^x}.$$

3 pt.

Allora $I =$ ____0____ .

Sol.:

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x + x^3 + 1}{4^x + \log^{48}(x) + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4^x} = 0.$$

3. Sia dato l'integrale definito

$$I = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^x\cos(x) + \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3}{8\pi^2}x\right) + \sin(x)\,dx.$$

3 pt.

Allora $2e^{-2\pi}I =$ ____1____ .

Sol.: Per simmetria si ha,

$$I = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^x\cos(x) + \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3}{8\pi^2}x\right) dx$$

Inoltre

$$2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3}{8\pi^2}x\right) = \frac{1}{2}$$

e

$$2\int_0^{2\pi} e^x\cos(x)dx = 2\int_0^{2\pi} e^x\sin(x)dx + 2[\cos(x)e^x]|_0^{2\pi} = -2\int_0^{2\pi} e^x\cos(x)dx + 2[(\cos(x)+\sin(x))e^x]|_0^{2\pi}.$$

Da cui $2\int_0^{2\pi} e^x\cos(x)dx = e^{2\pi} - 1$ e quindi $I = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

4. Sia $f(x) = \frac{\sin x + 2}{x^2+1} + 2x + 1$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.
Allora $t(1) =$ ____6____ .
Sol.:

3 pt.

$$f(0) = 3, \quad f'(x) = \frac{\cos(x)(x^2+1) - 2x(\sin(x)+2)}{(x^2+1)^2} + 2,$$

$$f'(0) = 1 + 2 = 3,\ t(x) = 3(x-0) + 3,\ t(1) = 6$$

5. Considera le equazioni differenziali

3 pt.

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0 \tag{1}$$

e

$$y'' - (\alpha + 1)y' + \alpha y = 0 \tag{2}$$

Determina l'unico valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui le due equazioni differenziali (1) e (2) hanno almeno una soluzione non nulla in comune.

Formulazione equivalente: Sia S lo spazio delle soluzioni dell'equazione (1) e sia S_α lo spazio delle soluzioni dell'equazione (2). Determina l'unico valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui $S \cap S_\alpha \neq \{0\}$.

Soluzione: $\alpha = -1$. L'equazione differenziale (1) ha polinomio caratteristico $(x+1)^3$, che ha radice -1 con molteplicit 3. Quindi una base di S $\{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\}$.

L'equazione differenziale (2) ha polinomio caratteristico $(x-1)(x-\alpha)$. Abbiamo bisogno che questo polinomio abbia radice -1 con molteplicit 1, quindi $\alpha = -1$.

6. Siano (A, B) le coordinate dell'unico punto di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3+3x^2+xy^2$. Allora $A + B =$

3 pt.

Soluzione: 0.

f di classe C^1, quindi possiamo cercare i punti di sella tra i punti critici. Inoltre f anche di classe C^2, quindi possiamo classificare i punti critici con il criterio della matrice Hessiana.

$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 6x + y^2, 2xy)$. Affinch $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, dalla seconda equazione si ha $y = 0$ o $x = 0$. Se $y = 0$, dalla prima equazione si ha $x = 0$ o $x = -2$. Se $x = 0$, allora dalla prima equazione si ha anche $y = 0$. Quindi i punti critici di f sono $(-2, 0)$ e $(0, 0)$.

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. Quindi $Hf(-2, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, che definita negativa, quindi $(-2, 0)$ un punto di massimo relativo.

Di conseguenza, l'altro punto critico di sella, siccome l'esercizio indica esplicitamente che f ha esattamente un punto di sella.

7. Calcola il lavoro L compiuto dal campo $F(x, y, z) = (x, x, y)$ lungo la curva parametrizzata da $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (|t|, |t|, t)$.

3 pt.

Soluzione: Il campo non conservativo, la curva regolare a tratti (non regolare per $t = 0$).

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{0} F(f(t)) \cdot f'(t)dt + \int_{0}^{1} F(f(t)) \cdot f'(t)dt \\ &= \int_{-1}^{0} (-t, -t, -t) \cdot (-1, -1, 1)dt + \int_{0}^{1} (t, t, t) \cdot (1, 1, 1)dt \\ &= \int_{-1}^{0} tdt + \int_{0}^{1} 3tdt \\ &= 1. \end{aligned}$$

8. Sia $f(x) = \log\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) è definita su tutto R, B) derivabile, C) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in dom(f)$ D) inf. limitata, E) monotona, F) ha due asintoti verticali, G) ha asintoto orizzontale, H) dispari. La risposta è: **BCFG**

4 pt.

Sol.: Abbiamo: $dom(f) = (-\infty, -4) \cup (3 + \infty)$, quindi f non e' definita su tutto R. $lim x \to \pm\infty f(x) = 0$, quinndi f ha asintoto oriozzontale $y = 0$. $lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$, quindi f ha due asintoti verticali. f non e' monotona perche' $f(-6) < f(-5)$, ma $f(-5) > f(4)$. $f'(x) = \frac{7}{(x-3)(x+4)} > 0$ sul dominio di f.

9. ICosa dice il Teorema di Lagrange? (La risposta corretta è una sola).

3 pt.

A) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione derivabile in (a, b) allora esiste un punto $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

B) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione derivabile in (a, b), allora $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(a)$.

C) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione derivabile in (a, b) allora esiste un punto $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f'(\bar{x}) = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$.

La risposta è: **A**

10. La serie $\sum_{n \geq 429} x^{n!}$

3 pt.

1. converge se e solo se $|x| < 1$;
2. converge se e solo se $x \leq 0$;
3. converge se e solo se $-1 < x \leq 0$;

Soluzione: (1).