

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 3 + 2i$ e $C = \overline{z - \bar{z}} + \operatorname{Im} \left(\frac{7z}{z\bar{z} + 1} + \frac{\bar{z} + z}{|z|^2 + 1} \right)$. Allora $C =$ $-4i + 1$.

3 pt.

2. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)} + \frac{x^2 \log(x)}{|x|} + \frac{|x|^x - 1}{x \log|x|} \right).$$

3 pt.

Allora $\ell =$ 3 .

3. Sia $f(x) = \frac{x \log(x) - 1}{x^2}$ e sia t la retta tangente ad f in $(1, f(1))$.

Allora $t(2) =$ 2 .

3 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_1^5 \frac{\log(x)}{x^2} dx.$$

3 pt.

Allora $5I =$ $4 - \log 5$.

5. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n^4 \left(1 - \cos(1/n) + e^{-\frac{1}{2n^2}} - 1 \right) - \frac{\cos(n)}{n^2} \right).$$

3 pt.

Allora $\ell =$ $1/6$.

6. Sia, per $x \in (0, e)$,

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x| - 1}$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f . Allora $g'(-1) =$ $-1/3$.

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) continua nel suo dominio, B) derivabile nel suo dominio, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) ha dominio tutto \mathbf{R} , H) ha asintoto orizzontale $y = 0$.

La risposta è: ABH

4 pt.

8. Enunciare il Teorema di Fermat.

Soluzione:

3 pt.

9. Dato il parametro reale $\alpha \neq 0$ e l'integrale improprio $I = \int_0^1 \frac{\sin^\alpha(x)}{(e^{\alpha x} - 1)} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

- (a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
- (b) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 0$
- (c) L'integrale converge solo per $\alpha > 0$
- (d) L'integrale converge solo per $\alpha < 0$
- (e) L'integrale converge solo per $\alpha < 1$

4 pt.