Analisi Matematica — II Appello — Cognome: ______________________

14/7/2015 — Nome: ______________________

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line — Firma: ______________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = -2 + i$. Allora $|z|^2\,\mathrm{Im}\left[\frac{3}{z} + \overline{z}\right] =$ ____-8____ (il risultato è un numero intero) — 2 pt.

2. Sia

$$l = \lim_{x\to 0}\left[2\,\frac{\mathrm{tg}(3\,x^2)}{1\,-\,\cos x} + 2 - \frac{\ln(1+x)}{\sin x}\right].$$

Allora $l =$____13____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

3. Sia $f(x) = \cos^2(\ln(1+x^2)) - (2x^3+2)\,e^{-5\,x} + \sin^2(\ln(1+x^2))$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$. Allora $t(1) =$____9____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

4. Sia dato l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty}\left[2\,x^2\,e^{-3\,x^3} + \frac{4}{1+(\pi\,x)^2}\right]\,dx.$$

Allora $9\,I =$____20____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

5. Sia $f(x) = \mathrm{arctg}(x+3) + 7\,x\,+\,\ln\left(1\,+\,(x+3)^2\right)$, e sia $g(y)$ la funzione inversa. Allora $24\,g'(-21) =$ ____3____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y'' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3\,. \end{cases}$$

Si determini $\left(y(\frac{2\pi}{3}) - \frac{1}{2}\right)^2$____27____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

7. Sia $Q = \{\,(x,y) \in \mathbf{R^2}\ :\ -1 \leq x \leq 1 - \frac{y^2}{2}\,\}$. Sia $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1)\,,\ \forall\,(x,y) \in Q$. Sia M il **valore** massimo assoluto e sia m il **valore** minimo assoluto assunti dalla funzione f. Allora $\frac{e^{m+M}}{2} =$ ____3____ (il risultato è un numero intero) — 2 pt.

8. Sia $z = g(x,y)\,,\ (x,y) \in \mathbf{R^2}$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione $z = y\,\log\left(x^2+1\right)\,+\,3\,y\,(x+1)\ ,\ (x,y) \in \mathbf{R^2}$, nel punto $(x_0, y_0, z_0) = (0,\,1,\,3)$ di S. Allora $g(2,1) =$ ____9____ (il risultato è un numero intero) — 2 pt.

9. Sia $T = \{ (x,y) \in \mathbf{R^2} \,:\, y \le x+1 \,;\, y \le -x+1 \,;\, y \ge 0 \}$ ed $I = \iint_D \big(x \arctan(y) + 3\,x^2 + 4 \big)\, dxdy$.
Allora $\frac{2\,I}{3} =$ ___3___ (il risultato è un numero intero)

2 pt.

10. Sia $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R^3} \,:\, x^2+y^2 \le (2-z)^2 \,;\, 0 \le z \le 2-\sqrt{2} \right\}$.
Sia $J = \iiint_\Omega \left(x \arctan(y) + y \arctan(x) + \frac{3}{\pi} \right) dx\,dy\,dz$.
Allora $J + 2\sqrt{2} =$ ___8___ (il risultato è un numero intero)

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \dfrac{\sin(\,|x|\,e^{|x|}\,) + 3}{x^2+5}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **A C D G**

3 pt.

12. Data la definizione di campo vettoriale conservativo.
Soluzione: `https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_vettoriale_conservativo`

3 pt.

13. Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Allora vale necessariamente:

(a) la funzione $f + g$ è derivabile in $(0,1)$
(b) la funzione $2(f + g)$ è pari
(c) la funzione $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) := e^{f(x)} g(x)$ è limitata
(d) la funzione $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) := e^{f(x)} g(x)$ è illimitata
(e) la funzione $2(f\,g)$ è dispari
(f) la funzione $f\,g$ è derivabile per $x = 1/2$

4 pt.

14. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Indicare quale è l'unica affermazione vera tra le seguenti:

(a) non esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
(b) $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$, per $(x,y) \to (0,0)$
(c) f è continua in tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$
(d) f è differenziabile in tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$
(e) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
(f) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,y) = -f(x,-y)$
(g) l'integrale di linea di prima specie $\int_C f\,ds$ dipende solo dagli estremi della curva C

4 pt.