

Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: \_\_\_\_\_

In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta  $\geq 18$  e se il punteggio della prima parte  $\geq 12$ . Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

**PRIMA PARTE**

1. Sia  $z = 3 + 4i$ . Allora  $|z| \operatorname{Im} \left[ \frac{z + 2\bar{z}}{5} \right] =$  -4 (il risultato è un numero intero)

2 pt.

2. Sia

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - \cos x}{2x^2} + 6 - \frac{\sin x}{\ln(1+x)} \right].$$

2 pt.

Allora  $l/2 =$  3 (il risultato è un numero intero).

3. Sia  $f(x) = (x^4 + 1)e^x + \operatorname{arctg}(1 + x^2)$ , e sia  $t(x)$  la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, f(0))$ . Allora  $(t(2) - \pi/4) =$  3 (il risultato è un numero intero).

2 pt.

4. Sia dato l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \left[ 2\pi x e^{-x^2} + \frac{10}{1+x^2} \right] dx.$$

2 pt.

Allora  $I/(3\pi) =$  2 (il risultato è un numero intero).

5. Sia  $f(x) = x^5 + 2x + e^{x-1}$ , e sia  $g(y)$  la funzione inversa.

Allora  $16g'(4) =$  2 (il risultato è un numero intero).

2 pt.

6. Sia  $y(x)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 18x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2 pt.

Allora  $3(y'(1) + 3e^2) =$  9 (il risultato è un numero intero).

7. Sia  $T$  il triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(0,1)$ . Sia  $f(x,y) = 2xy + y - 1, \forall (x,y) \in T$ . Sia  $M$  il **valore** massimo assoluto e sia  $m$  il **valore** minimo assoluto assunti dalla funzione  $f$ . Allora  $8(M+m) =$  -7 (il risultato è un numero intero)

2 pt.

8. Sia  $z = g(x,y), (x,y) \in \mathbf{R}^2$ , l'equazione del piano tangente alla superficie  $S$  di equazione  $z = y \log(x^2 + 1) + 3y(x+1)$ ,  $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ , nel punto  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 3)$  di  $S$ .

Allora  $g(2,1) =$  9 (il risultato è un numero intero)

2 pt.

9. Sia  $D = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4; y > 0 \}$  ed  $I = \iint_D \left( x e^{y+5} + \frac{3}{4} y \right) dx dy$ .

Allora  $I =$  4 (il risultato è un numero intero)

2 pt.

10. Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 ; 0 \leq z \leq 3\}$ .

Sia  $J = \iiint_{\Omega} (x^3 + z^2 + y) \, dx \, dy \, dz$ .

Allora  $\frac{J}{\pi} =$  \_\_\_\_\_ **9** \_\_\_\_\_ (il risultato è un numero intero)

2 pt.

**SECONDA PARTE**

11. Sia  $f(x) = \frac{\cos x + 3}{e^{|x|}}$ , definita  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Quali delle seguenti proprietà ha  $f$  in tutto il suo dominio?

A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **A C D G**

3 pt.

12. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto  $x_0$  del dominio.

Soluzione: <https://it.wikipedia.org/wiki/Derivata>

3 pt.

13. Siano  $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili. Allora vale necessariamente:

- (a) la funzione  $f^2g$  è derivabile in  $(0, 1)$
- (b) l'integrale  $\int_0^1 (f(x) + g(x))dx$  esiste finito
- (c) la funzione  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $h(x) := e^{f(x)}g(x)$  è limitata
- (d) la funzione  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $h(x) := e^{f(x)}g(x)$  è illimitata
- (e) la funzione  $3(fg)$  è dispari
- (f) la funzione  $f/g$  esiste per  $x = 1/2$

4 pt.

14. In quale caso (tra quelli indicati sotto) si ha che

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 0$$

per ogni funzione  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  continua e tale che  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = -f(x, -y, z)$  ?

- (a) Se  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
- (b) Se  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$
- (c) Se  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
- (d) Se  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- (e) Se  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- (f) Se  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y\}$

4 pt.