Analisi Matematica III Appello Cognome: ____________________
2/9/2015 Nome: ____________________

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma: ____________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.
Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 3 + 4\,i$. Allora $|z|\,\mathrm{Im}\left[\dfrac{z + 2\,\overline{z}}{4}\right] =$ ____ -5 ____ (il risultato è un numero intero) — 2 pt.

2. Sia
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1\,-\,\cos x}{2\,x^2} + 6 - \frac{\sin x}{\ln(1+x)}\right].$$
Allora $l/3 =$ ____ 2 ____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

3. Sia $f(x) = (x^4+1)\,e^x + \operatorname{arctg}(1+x^2)$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$. Allora $(t(-2) - \pi/4) =$ ____ -1 ____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

4. Sia dato l'integrale improprio
$$I = \int_0^{+\infty}\left[2\,\pi\,x\,e^{-x^2} + \frac{14}{1+x^2}\right]\,dx.$$
Allora $I/(2\,\pi) =$ ____ 4 ____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

5. Sia $f(x) = x^5 + 2\,x\,+\,e^{x-1}$, e sia $g(y)$ la funzione inversa.
Allora $32\,g'(4) =$ ____ 4 ____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 18x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$
Allora $5(y'(1) + 3e^2)$ ____ 15 ____ (il risultato è un numero intero). — 2 pt.

7. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Sia $f(x,y) = 2\,x\,y\,+\,y\,+\,1\,,\,\forall\,(x,y)\in T$. Sia M il **valore** massimo assoluto e sia m il **valore** minimo assoluto assunti dalla funzione f. Allora $8(M+m) =$ ____ 25 ____ (il risultato è un numero intero) — 2 pt.

8. Sia $z = g(x,y)\,,\,(x,y)\in\mathbf{R^2}$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione $z = y\,\log\left(x^2+1\right)\,+\,2\,y\,(x+1)\,,\,(x,y)\in\mathbf{R^2}$, nel punto $(x_0,y_0,z_0) = (0,\,1,\,2)$ di S.
Allora $g(2,1) =$ ____ 6 ____ (il risultato è un numero intero) — 2 pt.

9. Sia $D\,=\,\left\{\,(x,y)\in\mathbf{R^2}\,:\,x^2+y^2\leq 4\,;\,y>0\,\right\}$ ed $I = \displaystyle\iint_D\left(x\,e^{y+5} + \frac{3}{2}\,y\right)\,dxdy.$
Allora $I =$ ____ 8 ____ (il risultato è un numero intero) — 2 pt.

10. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^2} : x^2+y^2 \leq 1 ;\ 0 \leq z \leq 3\}$.
Sia $J = \iiint_\Omega (3x^3 + 2z^2 + y)\, dx\, dy\, dz$.
Allora $\frac{J}{\pi} =$ ____18____ (il risultato è un numero intero)

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \dfrac{\sin x + 8}{e^{|x|}}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: ____**A C D**____

3 pt.

12. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto x_0 del dominio.
Soluzione: `https://it.wikipedia.org/wiki/Derivata`

3 pt.

13. Siano $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Allora vale necessariamente:

(a) l'integrale $\int_0^1 (f(x) + g(x))\mathrm{d}x$ esiste finito
(b) la funzione $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) := e^{f(x)} g(x)$ è limitata
(c) ✔ la funzione $f/(g^2+1)$ è derivabile in $(0,1)$
(d) la funzione $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) := e^{f(x)} g(x)$ è illimitata
(e) la funzione $4(f\,g)$ è pari
(f) la funzione $f\,/g$ esiste per $x = 1/3$

4 pt.

14. In quale caso (tra quelli indicati sotto) si ha che

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = 0$$

per ogni funzione $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ continua e tale che $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = -f(x,-y,z)$?

(a) Se $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
(b) Se $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$
(c) Se $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
(d) ✔ Se $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
(e) Se $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
(f) Se $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq y\}$

4 pt.