

## UNO SCHEMA NUMERICO AD ELEMENTI FINITI PER LEGGI DI CONSERVAZIONE SCALARI

GIANCARLO SANGALLI (\*)

Nota presentata dal m. e. Franco Brezzi  
(Adunanza del 17 dicembre 1998)

---

ABSTRACT. — This paper concerns a numerical method for one-dimensional scalar conservation laws. An algorithm is proposed in order to solve numerically a suitable hyperbolic system with a linear convection and a nonlinear source term, approaching the conservation law; the decoupling between the source term and the convection term is obtained by a splitting technique and for the convection term a discontinuous in time Galerkin method is used.

Theoretical considerations and numerical tests show that the proposed scheme is stable and efficient.

### 1. Introduction

Con il termine *legge di conservazione* si indicano sistemi di equazioni alle derivate parziali dipendenti dal tempo, generalmente non lineari, iperbolici del primo ordine ed omogenei. Dunque, nella loro massima generalità, sono equazioni del tipo:

---

(\*) Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata, 1 - 27100 Pavia.

$$(1) \quad \partial_t u + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} F_i(u) = 0$$

con  $u : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}^m$  e  $F_i : \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$ ; si suppone che le  $F_i$  siano sufficientemente regolari e verifichino la condizione di stretta iperbolicità:

$$\forall u \in \mathbf{R}^m, \forall \xi \in \mathbf{R}^d, \sum_{i=1}^d \xi_i \cdot \partial_u F_i(u)$$

ammette autovalori reali e distinti; ad (1) va aggiunta la condizione iniziale (dato di Cauchy).

Non pochi fenomeni sono modellizzati da leggi di conservazione; la applicazione principale riguarda forse il campo della gas-dinamica con le equazioni di Eulero che descrivono, in certe condizioni, il moto di un gas. Più in generale tali equazioni modellizzano fenomeni di trasporto che prevedono la conservazione delle grandezze fisiche di cui interessa conoscere l'evoluzione temporale.

Dal punto di vista dell'analisi come è noto il problema (1) ha esistenza della soluzione solo se si intendono le derivate in senso distribuzionale (cioè se si riformula in senso debole) poiché anche per dati iniziali regolari si ha la formazione di discontinuità dette *shock*, mentre il problema dell'unicità, ben più complesso, rimane ancora aperto nel caso più generale; per molti sistemi particolari (di fatto per tutti i modelli di interesse fisico) si ottiene unicità della soluzione aggiungendo richieste ulteriori, generalmente dette condizioni di *entropia*: si tratta infatti nel caso delle equazioni della gasdinamica di formulazioni del principio dell'entropia e caratterizzano la soluzione fisicamente significativa. Un buon metodo numerico deve riuscire a trattare quanto sopra descritto: deve essere cioè in grado di risolvere gli shock, quando presenti, e deve convergere verso la soluzione verificante le condizioni di entropia (numericamente ciò è legato a proprietà di stabilità del metodo). Queste richieste sembrano nella pratica essere antagoniste e comunque solo in casi relativamente semplici è possibile sviluppare una soddisfacente teoria numerica.

Per molti anni gli sforzi degli analisti numerici si sono concentrati sullo sviluppo di schemi alle differenze finite. Molto più recenti sono gli

studi di metodi numerici ad elementi finiti; come è noto tali metodi, che sono nati e funzionano ottimamente nel contesto dei problemi ellittici, presentano rispetto ai precedenti, al prezzo di una maggiore 'spesa' computazionale, indubbi vantaggi riguardo alla possibilità di trattare domini con geometrie generiche e condizioni di bordo non banali (come è il caso della (1) quando il dominio spaziale è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^d$ ).

In questo articolo si presenta un nuovo schema numerico agli elementi finiti per il problema (1); per ragioni di semplicità si tratterà esclusivamente il caso scalare unidimensionale, anche se in linea di principio il metodo è estendibile al caso generale. La tecnica proposta si fonda su analisi teoriche svolte da T.P. Liu (si veda ad esempio [L]) e già utilizzate con successo nell'ambito degli schemi alle differenze finite da S. Jin e Z. Xin in [JX]: l'idea consiste nell'approssimare la legge di conservazione per mezzo di un sistema iperbolico lineare con un termine di sorgente non lineare dipendente da un parametro di rilassamento  $\varepsilon$ . La soluzione della legge di conservazione scalare unidimensionale:

$$(2) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

sarà approssimata dalla prima componente della soluzione (cioè dall'incognita  $u$ ) del sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} u_t + v_x = 0 \\ v_t + a \cdot u_x = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot (v - f(u)) \end{cases}$$

in condizione di *rilassamento*, ovvero quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ; nel sistema (3) si pone per l'incognita ausiliaria  $v$  la condizione iniziale di *equilibrio locale*  $v|_{t=0} = f(u)|_{t=0}$ , mentre il parametro  $a$  deve essere scelto opportunamente affinché si abbia la convergenza verso il problema che si è interessati a risolvere:

$$(4) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ v = f(u) \end{cases}$$

Derivando la seconda equazione di (3) rispetto alla variabile  $x$  e sostituendo nella prima si può eliminare la  $v$  ottenendo:

$$(5) \quad \varepsilon \left( a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \right) = \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u);$$

dunque il sistema (3) introduce una perturbazione nella legge di conservazione originaria (2) di tipo iperbolico del secondo ordine. La riformulazione (5) non offre indicazioni riguardo alle condizioni necessarie alla convergenza a cui si è interessati; si supponga, procedendo in modo puramente formale, di approssimare (3) al primo ordine in  $\varepsilon$  rispetto alla condizione (4), ponendo  $v = f(u) + \varepsilon v_1 + O(\varepsilon^2)$  nel sistema (3):

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + \varepsilon v_{1,x} + O(\varepsilon^2) = 0 \\ f(u)_t + \varepsilon v_{1,t} + O(\varepsilon^2) + a \cdot u_x = -(v_1 + O(\varepsilon)), \end{cases}$$

e dunque:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + \varepsilon v_{1,x} + O(\varepsilon^2) = 0 \\ f'(u) u_t + a \cdot u_x = -(v_1 + O(\varepsilon)), \end{cases}$$

sostituendo dalla prima equazione nella seconda:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + \varepsilon v_{1,x} + O(\varepsilon^2) = 0 \\ -f'(u)^2 u_x + a \cdot u_x + O(\varepsilon) = -v_1, \end{cases}$$

e sostituendo ancora nella prima equazione:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \varepsilon \left( (a - f'(u)^2) \cdot u_x \right)_x + O(\varepsilon^2) \\ -f'(u)^2 u_x + a \cdot u_x + O(\varepsilon) = -v_1, \end{cases}$$

in conclusione si ottiene l'approssimazione formale:

$$(6) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = \varepsilon \left( (a - f'(u)^2) \cdot u_x \right)_x + O(\varepsilon^2) \\ v = f(u) - \varepsilon (a - f'(u)^2) u_x + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

che fornisce un'indicazione per la scelta del parametro  $a$ ; infatti dalla prima equazione di (9) si vede che l'incognita  $u$  verifica, trascurando i contributi di ordine superiore al primo rispetto ad  $\varepsilon$ , un'equazione differenziale che è ben posta se il secondo membro è dissipativo, cioè se

$$(a - f'(u)^2) \geq 0$$

o, in modo equivalente:

$$(7) \quad -\sqrt{a} \leq f'(u) \leq \sqrt{a}.$$

La (10) è detta *condizione delle sottocaratteristiche* di Liu (introdotta in [L]), poiché, essendo  $\pm\sqrt{a}$  gli autovalori della matrice di trasporto del sistema iperbolico (3), la condizione (7) equivale alla richiesta che le caratteristiche di (2) siano contenute tra la coppia di caratteristiche di (3). La condizione (7), che qui è stata ottenuta formalmente, garantisce che il problema (3) sia ben posto e convergente verso (4) quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Il lettore interessato potrà trovare una analisi espressamente rivolta al caso in esame nei recenti articoli di Natalini e dei suoi collaboratori, in particolare [N1] e [AN].

I sistemi di leggi di conservazione con termine di sorgente e il loro rilassamento sono studiati da tempo perché la loro importanza va oltre la tecnica di approssimazione qui proposta; in particolare la teoria sviluppata da T. P. Liu riguarda casi molto generali che comprendono, per citare un esempio rilevante, i modelli cinetici della gasdinamica.

Jin e Xin propongono per (3) uno schema numerico alle differenze finite che si avvantaggia della struttura lineare del termine convettivo e tratta separatamente e in modo implicito (con una tecnica di *splitting*) il termine sorgente, senza risolvere equazioni non lineari. Tale schema risulta dunque concettualmente più semplice rispetto ad altre tecniche che offrono prestazioni analoghe, quali ad esempio i metodi di Godunov con Riemann solver.

In questo articolo si propone una nuova discretizzazione del sistema (3) basata su elementi finiti, utilizzando la strategia di Johnson (si veda [JS]) di scomporre il dominio spazio-temporale in opportuni sottoinsiemi denominati *slabs*; l'algoritmo introdotto prevede al tempo  $t$  la risoluzione analitica del contributo di sorgente per un passo temporale di ampiezza  $k$  e quindi la risoluzione del termine di trasporto con elementi finiti nella *slab* di dimensione temporale  $k$  (definita nel caso unidimensionale come  $\mathbf{R} \times [t, t + k[$ ). La soluzione ottenuta al tempo  $t + k$  diventa il dato iniziale per la successiva iterazione. Lo schema così ottenuto ha buone proprietà di stabilità anche senza introdurre in modo esplicito termini stabilizzanti; inoltre la linearità del termine di trasporto consente di ottenere un algoritmo molto efficiente in termini di complessità computazionale.

Nel seguito sarà descritta ed analizzata tale procedura numerica: nel paragrafo 2 si introdurrà lo schema per (2), nel paragrafo 3 si svolgeranno considerazioni riguardo stabilità e consistenza dello schema ed infine, nel paragrafo 4, si presenteranno alcune prove numeriche e si confronteranno per un particolare problema modello le soluzioni ottenute con il metodo qui presentato e con il metodo alle differenze finite proposto da Jin e Xin.

## 2. Schema numerico

L'algoritmo presentato risolve il sistema (3) utilizzando una tecnica di *splitting* dell'operatore differenziale nelle due parti di trasporto e di sorgente: il contributo di sorgente è risolto esattamente per un passo temporale di ampiezza  $k$  considerando di fatto il risultato limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , mentre il termine di trasporto è discretizzato con elementi finiti secondo la tecnica proposta da Johnson (in [J1]) in una *slab* di dimensione temporale  $k$ . La soluzione ottenuta al tempo  $t + k$  diventa il dato iniziale per la successiva iterazione. La descrizione dello schema suppone, come si è fatto fin qui, che il dominio spaziale sia l'intera retta reale e che l'asse dei tempi sia l'intera semiretta reale, evitando così di considerare possibili condizioni di bordo, anche se questo non sarà ovviamente il contesto delle successive sperimentazioni numeriche.

Per quanto riguarda il termine sorgente va osservato che il problema (in cui non compare più la dipendenza dallo spazio):

$$(8) \quad \begin{cases} u_t = 0 \\ v_t = -\frac{1}{\varepsilon}(v - f(u)) \\ u(\bar{t}) = u_0 \\ v(\bar{t}) = v_0 \end{cases}$$

si risolve esattamente nonostante sia non lineare: infatti si ha facilmente dalla prima equazione che  $u \equiv u_0$  e dunque, sostituendo nella seconda equazione che è lineare nella  $v$ , si ottiene:

$$(9) \quad \begin{cases} u(t) = u_0 \\ v(t) = (v_0 - f(u_0)) e^{-\frac{t-\bar{t}}{\varepsilon}} + f(u_0) \end{cases}$$

quindi, quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la soluzione di (9) converge per  $t \geq \bar{t}$  a:

$$(10) \quad \begin{cases} u(t) = u_0 \\ v(t) = f(u_0) \end{cases}$$

Il primo passo di *splitting* consiste allora nel porre  $v = f(u)$  come dato iniziale per la soluzione successiva della parte di trasporto.

La parte di trasporto è discretizzata con elementi finiti. Si definisce la *slab*  $n$ -esima come l'insieme  $S_n = \mathbf{R} \times [(n-1)k, nk[$ , dove  $k$  è l'intervallo di discretizzazione temporale che si suppone per semplicità uniforme e si introduce uno spazio di elementi finiti su  $S_n$ ; nel seguito si considerate tre diverse possibilità:

1) elementi di tipo triangolare uniformi di base  $h$  ed altezza  $k$  come è rappresentato in Figura 1 con funzioni lineari a tratti e continue su  $S_n$ ; detta  $T_h$  la *triangolazione* di  $S_n$  lo spazio di funzioni approssimanti (definite su  $S_n$ ) si descrive utilizzando le usuali notazioni come:

$$(11) \quad \Xi_{h,n} = \{ \xi \in H^1(S_n) : \xi|_E \in P^1(E), \forall E \in T_h \};$$

2) elementi rettangolari (di dimensioni  $h$  e  $k$ ) e funzioni bilineari a tratti e continue su  $S_n$ ; in questo caso si definisce

$$(12) \quad \Xi_{h,n} = \{ \xi \in H^1(S_n) : \xi|_E \in Q^1(E), \forall E \in T_h \};$$

3) sempre elementi rettangolari come i precedenti ma con funzioni che sono in ciascun elemento lineari nella variabile spaziale e costanti rispetto alla variabile temporale, cioè:

$$(13) \quad \Xi_{h,n} = \{ \xi \in H^1(S_n) : \xi|_E \in P_x^1 \otimes P_t^0(E), \forall E \in T_h \}.$$

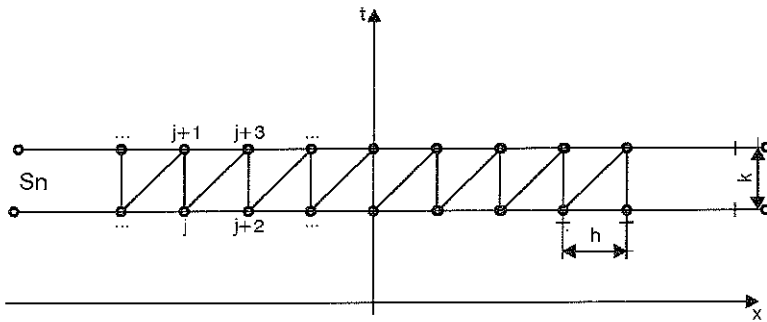


Fig. 1. - Triangolazione della *slab* secondo la scelta indicata al punto 1.

Nelle notazioni qui sopra introdotte non si è mai indicata la dipendenza dal passo di discretizzazione temporale  $k$ , che però interviene nella definizione della triangolazione  $T_h$  e ancor prima nella scomposizione del dominio in *slabs*; è sottinteso infatti in tutte le considerazioni seguenti il legame di diretta proporzionalità tra  $h$  e  $k$ .

Globalmente le funzioni approssimanti su tutto il dominio  $\Omega = \mathbf{R} \times (0, +\infty)$  saranno ottenute *giustapponendo* le funzioni approssimanti definite sulle singole *slabs* e dunque apparterranno allo spazio

$\Xi_h = \prod_{n \geq 1} \Xi_{n,h}$ ; si noti che le funzioni di  $\Xi_h$  risultano discontinue sul confine tra una *slab* e la successiva.

Lo schema che discretizza l'operatore di trasporto considerando il passo iniziale (10) (cioè lo schema per il sistema (3)) è il seguente schema di Galerkin standard: si cercano  $U, V \in \Xi_h$  tali che valga,  $\forall \varphi \in \psi \in \Xi_h$  e  $\forall n \geq 1$

$$(14) \quad \int_{S_n} \left( \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_n \\ aU_n \end{bmatrix}_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} dxdt + \int_{\mathbf{R}} \left( \begin{bmatrix} U_n^- \\ V_n^- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{n-1}^+ \\ f U_{n-1}^+ \end{bmatrix}_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_n^- \\ \psi_n^- \end{bmatrix} dx = 0$$

oppure equivalentemente, svolgendo i prodotti scalari e separando le due componenti:

$$(15) \quad \begin{cases} \int_{S_n} (U_{n,t} + V_{n,x}) \cdot \varphi_n dxdt + \int_{\mathbf{R}} (U_n^- - U_{n-1}^+) \cdot \varphi_n^- dx = 0 \\ \int_{S_n} (V_{n,t} + aU_{n,x}) \cdot \psi_n dxdt + \int_{\mathbf{R}} (V_n^- - f(U_{n-1}^+)) \cdot \psi_n^- dx = 0 \end{cases}$$

dove sono state utilizzate le notazioni seguenti: per la generica funzione  $\xi \in \Xi_h$  si è indicata con  $\xi_n$  la restrizione a  $S_n$  e con  $\xi_n^+$  e  $\xi_n^-$  la traccia di  $\xi_n$  sulla base superiore o, rispettivamente, inferiore della *slab*  $S_n$ ,  $\xi_{n,x}$  oppure  $\xi_{n,t}$  indicano in modo compatto la derivata spaziale o temporale ed infine con  $U_0^+$  si è indicato il dato iniziale  $u_0$ . Il primo integrale in (14) descrive l'operatore di trasporto del sistema (3), il secondo integrale *forza* la continuità della soluzione tra una slab e la precedente per la  $U$  ed inoltre *forza* la condizione di equilibrio locale  $V_n^- = f(U_{n-1}^+)$ .

### 3. Analisi dello schema numerico

Per lo schema (14) vale un risultato di consistenza della forma dei teoremi di Lax-Wendroff: ogni famiglia di soluzioni numeriche convergente quando gli intervalli di discretizzazione  $h$  e  $k$  tendono a zero ammette come limite una soluzione debole di (4). Va osservato

che questo fatto non è ovvio a priori, poiché esistono metodi stabili e che sembrano una sensata discretizzazione dell'operatore differenziale di trasporto ma convergenti verso un limite che non è soluzione dell'equazione considerata; peraltro il risultato di consistenza è facilmente dimostrabile utilizzando tecniche standard ed il lettore interessato può consultare [LV] per una presentazione generale oppure [S] per una analisi dettagliata dello schema (14).

Come si osserva in [P] per un'ampia classe di problemi che interessano il campo della fluidodinamica le difficoltà che si incontrano nell'analisi teorica dei metodi numerici riguardano le proprietà di stabilità. Per lo schema (14) non si darà qui una rigorosa giustificazione matematica del suo comportamento stabile, che appare nelle prove numeriche effettuate e riportate nel paragrafo successivo, ma saranno svolte alcune considerazioni per cercare di individuare e descrivere la ragione della stabilità dello schema. In effetti stupisce, ad una prima osservazione, che (14) utilizzi una discretizzazione di Galerkin standard senza l'introduzione di alcun termine stabilizzante; le tecniche di discretizzazione per leggi di conservazione scalari proposte da Johnson ed altri (descritte e studiate in [JS], [JSH], [JJS] ed infine in [JR]) devono la loro stabilità anche all'uso di funzioni approssimanti discontinue nel tempo (cioè discontinue sul bordo delle *slabs*) ma soprattutto all'introduzione di viscosità artificiali non lineari di tipo SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) e di tipo SC (*Shock Capturing*), le quali naturalmente appesantiscono il carico computazionale dello schema. In (14) non compaiono in modo esplicito termini viscosi rispetto al trasporto nella coordinata spaziale ma è il sistema stesso che introduce un meccanismo di viscosità per l'incognita  $u$ .

Si supponga, per poter meglio precisare questo punto, di utilizzare la famiglia di elementi finiti descritti al punto terzo di pag. 8; tale scelta semplifica lo schema perché scompaiono le derivate temporali e (15) diventa:

$$(16) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1 \text{ si cercano } U_n \text{ e } V_n \text{ tali che } \forall \varphi_n \text{ e } \psi_n : \\ k \int_{\mathbf{R}} V_{n,x} \cdot \varphi_n \, dx + \int_{\mathbf{R}} (U_n - U_{n-1}) \cdot \varphi_n \, dx = 0 \\ ak \int_{\mathbf{R}} U_{n,x} \cdot \psi_n \, dx + \int_{\mathbf{R}} (V_n - f(U_{n-1})) \cdot \psi_n \, dx = 0 . \end{cases}$$

Si supponga di poter scegliere nell'ultima riga di (16)  $\psi_n = -\varphi_{n,x}$ ; integrando per parti si avrebbe

$$(17) \quad \int_{\mathbf{R}} V_{n,x} \cdot \varphi_n \, dx = \int_{\mathbf{R}} f(U_{n-1}) \cdot \varphi_n \, dx + ak \int_{\mathbf{R}} U_{n,x} \cdot \varphi_{n,x} \, dx$$

e dunque sostituendo di nuovo nella prima equazione di (16) si avrebbe

$$(18) \quad \int_{\mathbf{R}} \frac{(U_n - U_{n-1})}{k} \cdot \varphi_n \, dx + \int_{\mathbf{R}} f(U_{n-1}) \cdot \varphi_n \, dx + ak \int_{\mathbf{R}} U_{n,x} \cdot \varphi_{n,x} \, dx = 0;$$

la formulazione variazionale (18) corrisponde ad una discretizzazione di Eulero esplicita nel tempo con aggiunta di diffusione artificiale; gli ultimi passaggi sono da considerare solo una *indicazione* del meccanismo che introduce stabilità nello schema: infatti non è possibile all'interno del nostro spazio di funzioni approssimanti scegliere  $\psi_n = -\varphi_{n,x}$  (è naturalmente un fatto generale che l'insieme delle funzioni test non sia chiuso per derivazione) e dunque si deve ritenere che in (18) il secondo e il terzo integrale siano in qualche modo approssimati.

Una corretta deduzione dello schema numerico che corrisponde a (16) per la sola  $u$  può essere ottenuta utilizzando i valori nodali come incognite. In [S] questa analisi è sviluppata per gli elementi bilineari nello spazio e nel tempo (come indicato al punto 2 di pag 5), mentre ora per maggiore semplicità si procederà con gli elementi costanti nella variabile temporale. Introducendo la base  $\{\Phi_n^i\}_{i \in Z}$  di funzioni di forma su  $S_n$  si ha per  $S_n$  e  $V_n$  la rappresentazione in termini dei valori nodali:

$$U_n(x, t) = \sum_i u_n^i \Phi_n^i(x, t)$$

$$V_n(x, t) = \sum_i v_n^i \Phi_n^i(x, t),$$

e le funzioni di forma sono esprimibili come:

$$(19) \quad \Phi_n^i(x, t) = \phi_i(x)$$

dove  $\phi_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  rappresenta la funzione di forma spaziale che assume valore 1 in  $ih$  e vale 0 nei restanti nodi spaziali  $jk$ , con  $j \neq i$ ; non è limitativo supporre che le funzioni approssimanti abbiano supporto compatto, in modo che ci si possa ridurre a considerare un numero finito di indici.

Si definiscano ora le matrici ad indici in  $\mathbf{Z}$ :

$$M \text{ tale che } m_{ij} = \int_{\mathbf{R}} \phi_i \phi_j dx$$

$$D \text{ tale che } d_{ij} = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j dx ;$$

$M$  e  $D$  possono essere considerati come operatori sullo spazio dei vettori di valori nodali: rappresentano la 'matrice di massa spaziale' e la 'matrice di trasporto spaziale' riferite ad una griglia uniforme sull'intera retta reale.

Indicando con  $u_n = \{u_n^i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  e  $v_n = \{v_n^i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  i vettori di valori nodali, lo schema (16) corrisponde a porre (\*):

$$(20) \quad \begin{cases} kDv_n + Mu_n = Mu_{n-1} \\ akDu_n + Mv_n = Mf(u_{n-1}) ; \end{cases}$$

si supponga di applicare  $M$  alla prima riga del sistema precedente e di applicare  $D$  alla seconda riga

$$(21) \quad \begin{cases} kMDv_n + MMu_n = MMu_{n-1} \\ akDDu_n + DMv_n = DMf(u_{n-1}) ; \end{cases}$$

si può facilmente dimostrare che  $M$  e  $D$  commutano tra loro, come conseguenza della particolare struttura che possiedono (infatti tali

---

(\*) Più precisamente (20) corrisponde a (16) se si utilizza una opportuna formula di quadratura per l'integrale in cui compare il flusso  $f$ .

matrici sono rispettivamente simmetrica e antisimmetrica ed il valore di un elemento dipende solamente dalla sua *distanza* dalla diagonale); sostituendo dalla seconda equazione di (21) nella prima si ottiene lo schema per  $u_n$ :

$$(22) \quad -ak^2 DDu + kDMf(u_{n-1}) + MMu_n = MMu_{n-1};$$

nella precedente equazione alle differenze il primo addendo ha un effetto stabilizzante: infatti moltiplicando scalarmente ambo i membri di (22) per  $u_n$  e si ottiene:

$$\|Mu_n\|^2 = Mu_n \cdot Mu_{n-1} - kDMf(u_{n-1}) \cdot u_{n-1} - ak^2 \|Du_n\|^2,$$

dove si è indicato con  $\|\cdot\|^2$  la norma euclidea per i vettori; utilizzando infine la disuguaglianza di Cauchy-Shwartz e dividendo per  $\|Mu_n\|$ , si può concludere:

$$\|Mu_n\| \leq \|Mu_{n-1}\| - \frac{\overbrace{kDMf(u_{n-1}) \cdot u_{n-1}}^I + \overbrace{ak^2 \|Du_n\|^2}^{II}}{\|Mu_n\|},$$

mettendo così in risalto che per la stabilità nel tempo gioca un ruolo chiave la scelta del coefficiente  $a$ , in modo che il termine positivo  $II$  possa controllare il termine indefinito  $I$ .

Un differente approccio al problema della stabilità dello schema (15), noto col nome di analisi di von Neumann e molto utilizzato nello studio di metodi alle differenze finite, consiste nell'analizzare per il caso di flussi lineari (cioè  $f(u) \propto u$ ) come le singole armoniche dello sviluppo in somme di Fourier della soluzione numerica vengano propagate in una iterazione temporale; questa tecnica, seppur limitatamente al caso di flussi lineari, offre significative informazioni riguardo alla scelta del parametro  $a$  qualunque sia lo spazio di funzioni approssimanti. Si supponga di voler utilizzare gli elementi bilineari descritti al punto 2 di pag. 5; in questo caso la soluzione numerica  $U_n$  (come ogni altra funzione approssimante) è individuata dai valori nodali in corri-

spondenza dei vertici dei rettangoli della suddivisione; si supponga di indicare con  $u_n$  il vettore dei valori nodali di  $U_n$  corrispondenti alla base superiore di  $S_n$  e con  $u_{n-1/2}$  il vettore corrispondente alla base inferiore, come rappresentato in Figura 2.

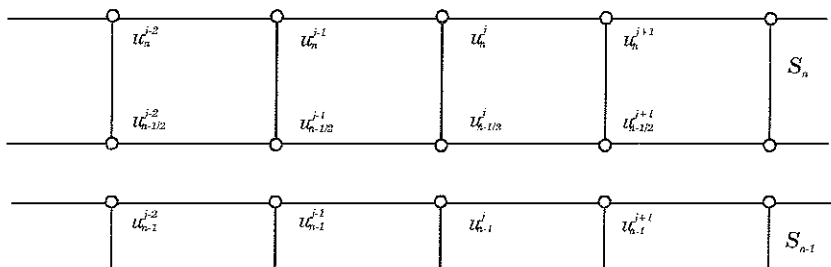


Fig. 2. - Notazioni utilizzate per i valori nodali nell'analisi di von Neumann.

Naturalmente è possibile derivare un sistema di equazioni alle differenze per i vettori di valori nodali procedendo come si è fatto nel caso precedente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (Mu_n - Mu_{n-1/2}) + \frac{k}{6} (2Dv_n + Dv_{n-1/2}) &= 0 \\ \frac{1}{2} (Mu_n - Mu_{n-1/2}) + Mu_{n-1/2} + \frac{k}{6} (Dv_n + 2Dv_{n-1/2}) &= M_{n-1} \\ \frac{1}{2} (Mv_n - Mv_{n-1/2}) + \frac{ak}{6} (2Du_n + Du_{n-1/2}) &= 0 \\ \frac{1}{2} (Mv_n - Mv_{n-1/2}) + Mv_{n-1/2} + \frac{ak}{6} (Du_n + 2Du_{n-1/2}) &= Mf(u_{n-1}) \end{aligned}$$

Ad ogni iterazione l'unica informazione che si trasmette dalla *slab*  $S_{n-1}$  alla  $S_n$  è il vettore  $u_{n-1}$ , perciò risulta interessante misurare come lo schema numerico *amplifica* ogni armonica nella trasformazione

$$(23) \quad u_{n-1} \rightarrow u_n$$

Si supponga dunque di avere  $f(u) = cu$  e di scegliere  $a = c\alpha^2$ , in modo che la condizione delle sottocaratteristiche (7) risulti verificata per valori del parametro  $c$  maggiori di 1; in Figura 3 sono mostrati i risultati ottenuti procedendo numericamente: il coefficiente di amplificazione per (23) è diagrammato in funzione della pulsazione dell'armonica in ingresso (il valore massimo di *pulsazione* corrisponde alla lunghezza d'onda  $h$  che è la più piccola risolta dalla griglia numerica). Si ha stabilità (più precisamente si parla di stabilità lineare) quando per ogni valore della pulsazione il coefficiente di amplificazione risulta inferiore ad 1; in Figura 4 è diagrammata la curva di livello per cui l'amplificazione è unitaria e dunque sembrerebbe che anche per il caso dello schema numerico ora considerato la condizione di stabilità sia la condizione delle sottocaratteristiche (7); è da osservare che ciò non dipende dal passo di discretizzazione oppure dalla velocità di trasporto e che risultati analoghi si ritrovano utilizzando altri tipi di funzioni approssimanti.

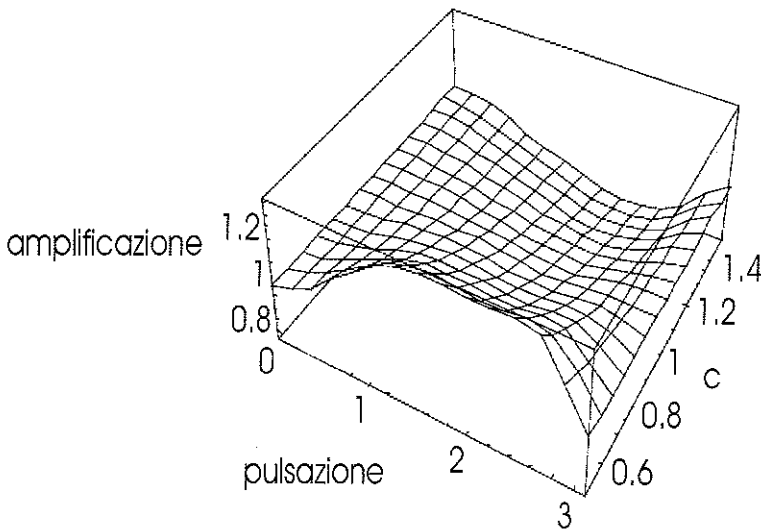


Fig. 3. - Diagramma del coefficiente di amplificazione per (32).

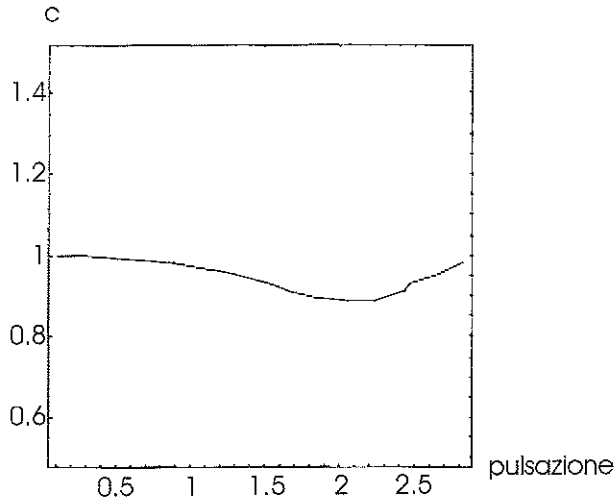


Fig. 4. - Curva di livello per l'amplificazione corrispondente al valore critico unitario.

#### 4. Prove numeriche

Nella prima parte si presenterà la soluzione numerica per un particolare problema modello ottenuta con lo schema ad elementi finiti proposto e si confronterà con la soluzione fornita dagli schemi di Jin e Xin alle differenze finite. Va premesso che i due schemi si equivalgono sul piano della complessità computazionale; infatti, anche se per ogni *slab* nel caso degli elementi finiti si avrebbe da risolvere un sistema lineare, tuttavia la matrice di tale sistema rimane sempre la stessa (di fatto dipende solo dal coefficiente  $a$  che si suppone costante nel tempo) quindi si può inizialmente invertire la matrice oppure fattorizzare LU e per le iterazioni successive si ha di fatto una procedura esplicita nel tempo.

Nel test di confronto si è utilizzato il flusso  $f(u) = u^3$ , cioè si è risolto il problema:

$$(24) \quad u_t + 3u^2 \cdot u_x = 0$$

che è particolarmente significativo: uno shock nel dato iniziale produce contemporaneamente uno shock viaggiante e una onda di rarefazione non lineare, che sono le configurazioni più difficili da trattare numericamente; per il dato iniziale  $u_0(x) = \text{sign}(x)$  la soluzione esatta (verificante le condizioni di entropia) nell'intervallo di tempo  $(0,1)$  è data da:

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & \text{per } \frac{x}{t} < 3/4 \\ \sqrt{\frac{x}{3 \cdot t}} & \text{per } 3/4 < \frac{x}{t} < 3 \\ +1 & \text{per } \frac{x}{t} > 3 \end{cases}$$

Nelle Figure 5, 6 ed 7 si diagrammano la soluzione esatta (in tratto continuo), la soluzione numerica per lo schema ad elementi finiti

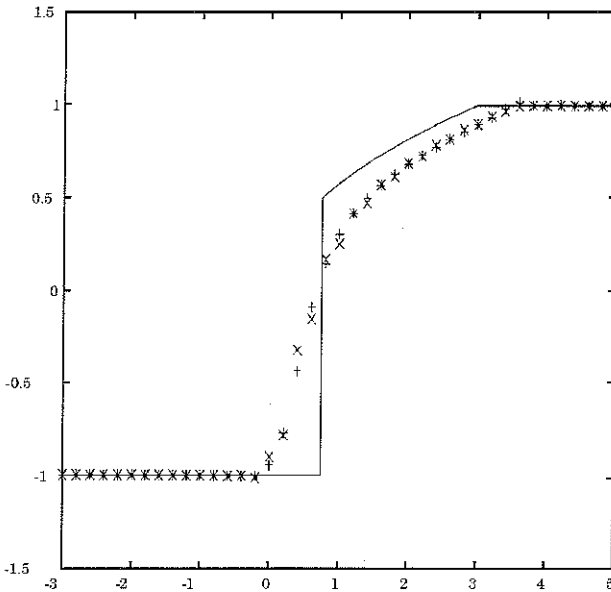


Fig. 5. - Soluzioni con  $h = .2$   $k = 1/16$  (x per Jin-Xin, + per elementi finiti).

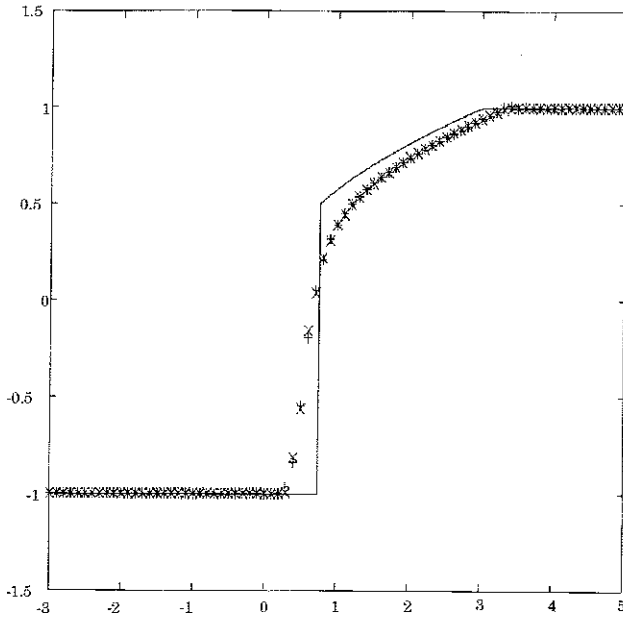


Fig. 6. - Soluzioni con  $h=.1$   $k=1/33$  (x per Jin-Xin, + per elementi finiti).

e per lo schema di Jin e Xin del secondo ordine (descritto in [JX]) al tempo  $T = 1$ ; in tutti i casi si è scelto  $a = 9.9$  e sono stati utilizzati i passi di discretizzazione seguenti:

in Figura 5 :  $h = .2$ ,  $k = \frac{1}{16}$ ,

in Figura 6 :  $h = .1$ ,  $k = \frac{1}{33}$ ,

in Figura 7 :  $h = .02$ ,  $k = \frac{1}{165}$ ;

si può concludere che i due schemi numerici offrono prestazioni equivalenti.

Nei diagrammi successivi, che mostrano l'evoluzione nel tempo delle soluzioni numeriche ottenute con il metodo proposto, si può riconoscere la buona stabilità dello schema.

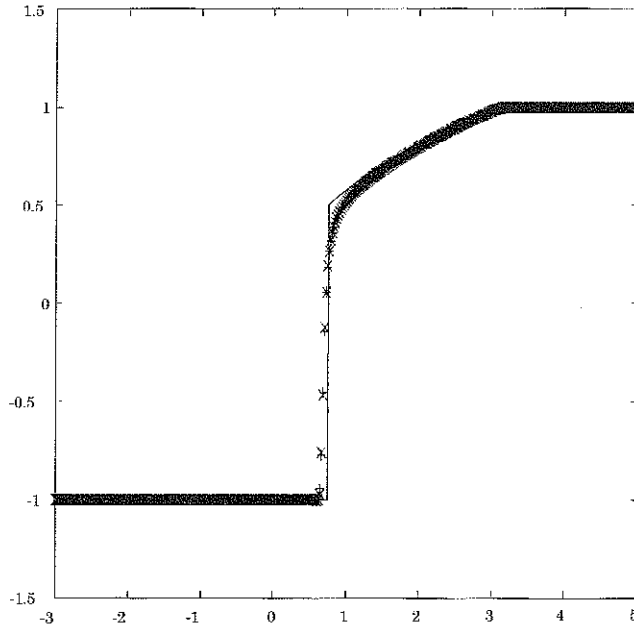


Fig. 7. - Soluzioni con  $h = .02$   $k = 1/165$  (x per Jin-Xin, + per elementi finiti).

In Figura 8 si mostra la soluzione numerica del problema (24) con il medesimo dato di Cauchy del test precedente per  $x \in (-3, 5)$  sull'intervallo temporale  $t \in (1, 0)$ , avendo scelto i passi di discretizzazione  $h = .1$  e  $k = 1/33$ .

In Figura 9 è rappresentata la soluzione numerica della ben nota equazione di Burgers:

$$(25) \quad u_t + u \cdot u_x = 0,$$

che corrisponde alla scelta del flusso  $f(u) = \frac{1}{2} u^2$ ;

per il dato iniziale

$$u_0 = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 2.05 \\ 1 & \text{per } 2.05 < x \leq 5 \\ \frac{(7.9-x)}{2.9} & \text{per } 5 \leq x \leq 7.9 \\ 0 & \text{per } x \geq 7.9 \end{cases}$$

la soluzione esatta sviluppa un'onda di rarefazione centrata in  $x = 2.05$  e forma uno shock al tempo  $t = 2.9$  in  $x = 7.9$ . Si sono scelti  $h = .1$ ,  $k = .1$ , e  $a = 1.1$ .

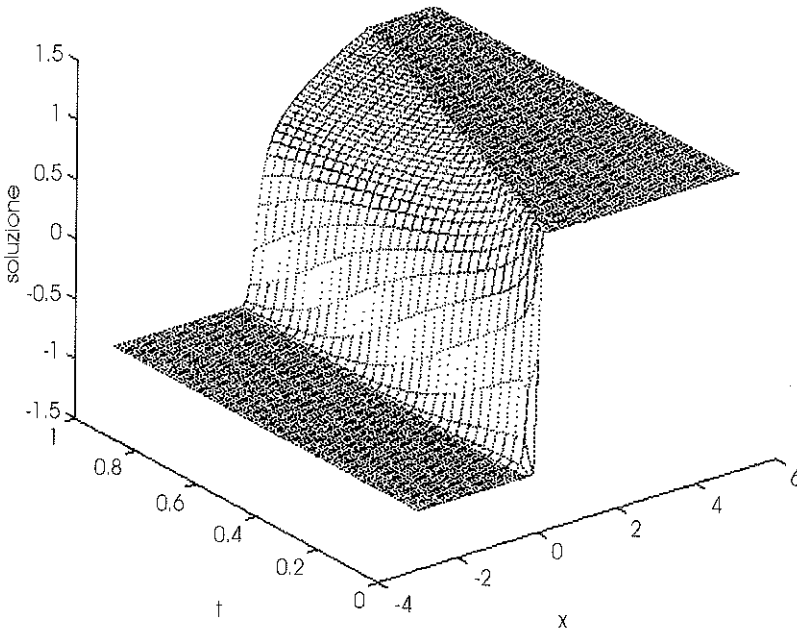


Fig. 8. - Diagramma della soluzione di (24) nel dominio spazio-temporale.

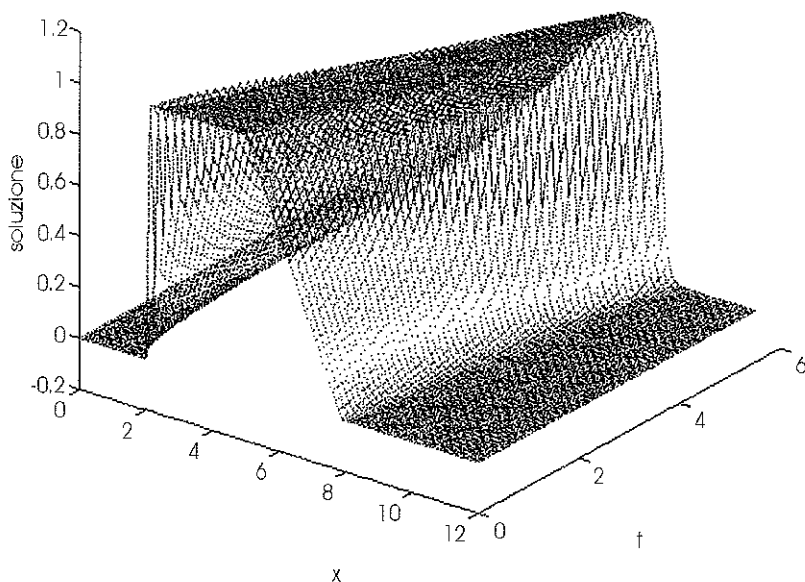


Fig. 9. - Diagramma della soluzione di (25) nel dominio spazio-temporale.

## 5. Conclusioni

Si è presentato un nuovo metodo numerico ad elementi finiti per leggi di conservazione unidimensionali e scalari; la procedura introdotta risolve con uno schema di Galerkin standard ed una tecnica di *splitting* non direttamente la legge di conservazione, bensì un sistema, dipendente da un parametro di *rilassamento*, che converge in determinate condizioni alla legge di conservazione; questo approccio, suggerito da analisi teoriche svolte in particolare da T. P. Liu, è già stato utilizzato con successo nell'ambito dei metodi alle differenze finite da Jin e Xin. La procedura qui proposta consente di ottenere soluzioni numeriche di qualità equivalente ad un costo computazionale concorrenziale, inoltre presenta alcune ulteriori buone proprietà:

- la discretizzazione ad elementi finiti sembra essere in grado di conservare il buon condizionamento del problema continuo ed infatti lo schema risulta stabile anche senza l'aggiunta di termini ad hoc.
- lo schema presenta maggior flessibilità per quanto riguarda la scelta della discretizzazione; la scelta del passo temporale non è vincolata a condizioni di stabilità di tipo C.F.L. e gli elementi finiti sono migliori in caso di griglie non uniformi.

Ci si è limitati a trattare il caso monodimensionale, ma i risultati presentati lasciano ben sperare che si possa ottenere una procedura efficiente anche per problemi più complessi.

#### B I B L I O G R A F I A

- [AN] D. AREGBA-DRIOLLET, R. NATALINI, *Convergence of Relaxation Schemes for Conservation Laws*, preprint.
- [JJS] J. JAFFRÉ, C. JOHNSON, A. SZEPESSY, *Convergence of the Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Hyperbolic Conservation Laws*, preprint 1993, Math. Dept. Chalmers Univ. of Technology.
- [JR] C. JOHNSON, R. RANNACHER, *On Error Control in CFD*, preprint 1994, Math. Dept. Chalmers Univ. of Technology.
- [JS] C. JOHNSON, A. SZEPESSY, *On Convergence of a Finite Element Methods for a Nonlinear Hyperbolic Conservation Law*, Math. Comp., Vol. 49 n° 180, pp. 427-444.
- [JSH] C. JOHNSON, A. SZEPESSY, P. HANSBO, *On Convergence of Shock-Capturing Stream-Line Diffusion Finite Element Methods for Hyperbolic Conservation Laws*, Math. Comp., Vol. 54 n° 189, pp. 107-129.
- [JX] S. JIN, Z. XIN, *The relaxation Schemes for System of Conservation Laws in Arbitrary Space dimension*, Comm. Pure and Appl. Math. Vol. XLVIII, pp.235-276.
- [LV] R.J. LE VEQUE, *Numerical Methods for Conservation Laws*, (1992) Birkhauser Verlag.
- [L] T.P. LIU, *Hyperbolic Conservation Laws with Relaxation*, Comm. Math. Phys., 108 (1987), pp. 153-175.
- [N1] R. NATALINI, *Convergence to Equilibrium for the Relaxation Approximation of Conservation Law*, Comm. Pure and Appl. Math., in press.
- [N2] R. NATALINI, *A Discrete Kinetic Approximation of Entropy Solution to Multidimensional Scalar Conservation Law*, preprint.

- 
- [NH] R. NATALINI, B. HANOZET, *Weakly Coupled System of Quasilinear Hyperbolic Equations*, Preprint.
- [P] O. PIRONNEAU, *Finite Element Methods for Fluids*, John Wiley & Sons ed.
- [S] G. SANGALLI, *Metodi Numerici per Conservation Laws*, Tesi di laurea in Matematica presso l'Università di Pavia (1997).

