Equazione del calore non stazionario.

La variazione della temperatura nel tempo dipende dal flusso di calore: indicando con $u(x,t)$ la temperatura al tempo t e nel punto $x \in \Omega$, ragionando come nel caso stazionario si arriva a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \qquad \forall x \in \Omega, \ \forall t \in [0,T] \qquad \text{eq. del calore}$$

$$u(x,t) = g \qquad \forall x \in \Gamma_D, \ \forall t \in [0,T] \qquad \text{condizione al bordo di Dirichlet}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0 \qquad \forall x \in \Gamma_N, \ \forall t \in [0,T] \qquad \text{e di Neumann}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in \Omega \qquad \text{condizione iniziale}$$

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$$

Approssimazione in spazio mediante elementi finiti e in tempo mediante θ-scheme

Moltiplico per $v:\Omega\to\mathbb{R}$ (notare che v non dipende da t) e integro su Ω, quindi integro per parti ottenendo la formulazione variazionale : Cerco $u:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$: u verifica le condizioni al bordo e tali che

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\cdot v\, d\underline{x} + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\underline{x} = \int_\Omega f v\, dx \,, \quad \forall\, v\in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$$

(andrebbe specificata l'appartenenza di u a opportuni spazi di Sobolev in tempo e spazio ...)

La discretizzazione in spazio avviene come nel caso stazionario...

cerco u_h : $u_h(\cdot,t) \in V_h$ + condizioni al bordo di Dirichlet

quindi $$u_h(\underline{x},t) = \sum_J \underbrace{u_J(t)}_{\text{coeffic. funzioni del tempo}} \underbrace{\varphi_J(\underline{x})}_{\text{funzioni di base elem. fin.}}$$

Si ottiene la formulazione variazionale: Cerco $[u_1(t); \dots ; u_N(t)]$ t.c.

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial t} \cdot \varphi_i + \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i = \int_\Omega f \varphi_i \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

espandendo u_h si ottiene un sistema di EDO

$$\underline{\underline{M}} \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{\underline{A}} \, \underline{u} = \underline{F}$$

dove

$$M_{ij} = \int_\Omega \varphi_j \varphi_i$$

usare formula p.to medio dei lati, che è esatta per integrandi quadratici

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i$$

$$F_i = \int_\Omega f \varphi_i$$

esplicitando la derivata in tempo si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u}(t) = - \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{u}(t) + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{F}$$

ma non è conveniente calcolare l'inversa di M

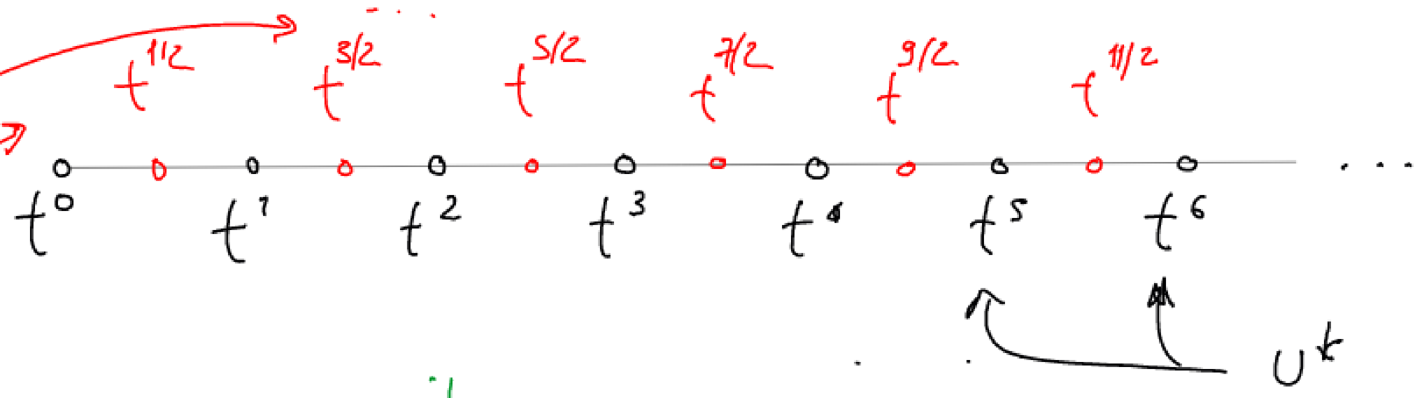
Crank-Nicolson

per discretizzare "in tempo" usiamo un metodo di C.N.

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\left(t^{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\underline{u}^{k+1} - \underline{u}^{k}}{\Delta t}, \quad \underline{u}\left(t^{k+1/2}\right) = \frac{\underline{u}^{k+1} + \underline{u}^{k}}{2}$$

quindi $\underline{u}^k \approx \underline{u}(t^k)$ con $t^k = k \cdot \Delta t$

ma l'equazione differenziale viene discretizzata agli istanti $t^{k+1/2} = (k+1/2)\,\Delta t = \dfrac{t^k + t^{k+1}}{2}$



incognita

$$\underline{\underline{M}}\,\frac{\underline{u}^{k+1} - \underline{u}^k}{\Delta t} + \underline{\underline{A}}\left(\frac{\underline{u}^{k+1} + \underline{u}^k}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(F^{k+1} + F^k\right) = F$$

indipendente dal tempo

- implementare lo schema con u_0, f data, con condizioni di Dirichlet omogenee e disegnare il grafico di u_h^k $\quad k = 1, \dots$