Calcolare l'integrale GENERALE (cioè tutte le soluzioni) dell'equazione differenziale $x \cdot y' = y^2$.

Svolgimento: cerco le soluzioni nell'intervallo $I = (0, +\infty)$.

dunque $x \cdot y' = y^2 \iff y' = \frac{y^2}{x}$.

Una soluzione è $y(x) = 0$, $\forall x > 0$ (ovvio controllare)

Cerco ora le soluzioni tali che $y(x) \neq 0$ $\forall x > 0$.
(si osservi infatti che se $y(\bar{x}) = 0$, per qualche $\bar{x} > 0$, allora $y(x) = 0$ per ogni $x > 0$!). Posso dividere per y^2 e trovare

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{1}{x}, \text{ dunque } \int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx;$$

nell'integrale di sinistra posso fare il cambio di variabile $x \longmapsto y(x)$, dunque

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int \frac{dy}{y^2}\Big|_{y=y(x)} = \frac{y^{-1}}{-1}\Big|_{y=y(x)} = -\frac{1}{y(x)} + C$$

Inoltre

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C.$$

In conclusione, dall'eq. diff. si ottiene

$$-\frac{1}{y(x)} = \ln x + C \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{\ln x + C} = \frac{1}{C - \ln x}, \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

passaggio errato a lezione:

$$\int \frac{dy}{y^2}\Big|_{y=y(x)} = \frac{y^{-3}}{-3}\Big|_{y=y(x)}$$