Analisi Matematica
3/6/2015

Appello di esercitazione

Cognome: ____________________
Nome: ____________________

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: ____________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

♢ ♢ ♢

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta maggiore o uguale a 18 e se il punteggio della prima parte è maggiore o uguale a 12.

Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

♢ ♢ ♢

PRIMA PARTE

1. Sia $z = \sqrt{21} + 2\,i$. Allora $|\,z\,| +$ Re $(z^2) =$ 22 (il risultato è un numero intero) 2 pt.

2. Sia

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{4x \sin x}{\sin\left(\pi \cos x\right)}$$

allora $\pi l =$ 8 (il risultato è un numero intero). 2 pt.

3. Sia $f(x) = 2^{(3^x)}$, allora $f'(x) =$ $\log 2 \cdot \log 3 \cdot 3^x \cdot 2^{3^x}$ (suggerimento: $a^x = e^{x \log a}$) 2 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-1}^{0} 2xe^{-x}\, dx$$

allora $I =$ -2 (il risultato è un numero intero) 2 pt.

5. Calcolare, per $x \in \mathbb{R}$ l'integrale indefinito 2 pt.

$$I(x) = \int \frac{-3}{e^x + 3 + 2e^{-x}}\, dx.$$

Riportare nello spazio sottostante i passaggi fondamentali e il risultato finale.

Soluzione: $I(x) = 3 \log\left(\dfrac{e^x + 2}{e^x + 1}\right) + C$

6. Sia y la soluzione del problema di Cauchy

2 pt.

$$\begin{cases} 4y''(x) + y(x) = 1 \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3. \end{cases}$$

Allora $y(\pi) =$ 7 (il risultato è un numero intero)

7. Sia $Q = \{ (x,y) \in \mathbf{R^2} \; : \; |\,x\,| \leq 4 \; ; \; -3 \leq y \leq 4 - |\,x\,| \; ; \; x^2 + y^2 \geq 4 \}$.

2 pt.

Sia $f(x,y) = 9 + \sqrt{x^2+y^2}\,, \forall\,(x,y) \in \mathbf{R^2}$. Siano: M il **valore** massimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione f a Q ; m il **valore** minimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione f a Q. Allora $3\,M - m =$ 31 (il risultato è un numero intero)

8. Sia $z = g(x,y)\,,\ (x,y) \in \mathbf{R^2}$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione $z = x^2 \sin(5\,y) + 5\,x\,e^{-2\,y}\,,\ (x,y) \in \mathbf{R^2}$, nel punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1,\ 0,\ -5)$ di S.

2 pt.

Allora $g(2\,,\,1) =$ 25 (il risultato è un numero intero)

9. Sia $D = \{ (x,y) \in \mathbf{R^2} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \,;\, y \geq 0 \}$. Sia $I = \iint_D (\, y \sin(4\,x) + x^2 + y^2 - 4 \,)\, dx\, dy$. Allora $(4\,I)/\pi =$ -9 (il risultato è un numero intero)

2 pt.

10. Sia $D = \{ (x,y) \in \mathbf{R^2} \; : \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt[3]{4} \; ; \; x \leq 0 \}$. Sia C la curva-bordo di D; sia $\vec{\mathbf{n}}(x,y)$ il versore normale **esterno** a C nel generico punto $(x,y) \in C$. Sia inoltre $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = y^3 \sin(8\,x)\,\vec{\mathbf{i}} + 8\,x\,y\,\vec{\mathbf{j}}\,, \forall\,(x,y) \in \mathbf{R^2}$. Si consideri infine l'integrale curvilineo **di seconda specie** $I = \int_C \vec{\mathbf{F}}(x,y) \cdot \vec{\mathbf{n}}(x,y)\, ds$. Allora $3\,I =$ -16 (il risultato è un numero intero; suggerimento: usare il teorema di Gauss)

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \log(x^2+1)$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **A B D G** | 3 pt.

12. Dare la definizione di derivata di f in x_0 | 3 pt.

Soluzione: ...

13. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro. L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^{2\alpha}} dx$ è convergente per: | 4 pt.

(a) $\alpha > 1$

(b) nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) ✔ $\alpha > 1/2$

(d) $\alpha < \pi/2$

(e) tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$

(f) $\alpha < 1$

14. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Valga inoltre, per $(x, y) \to (0, 0)$: | 4 pt.

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{2}(x,y)M(x,y)^T + o(x^2+y^2)$$

dove M è una matrice 2×2 simmetrica i cui autovalori sono $\{1, 2\}$. Allora:

(a) f ammette in $(0,0)$ un punto di sella

(b) le derivate parziali di f sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

(c) f ammette in $(0,0)$ un massimo relativo

(d) f è limitata

(e) f è di pari rispetto a x.

(f) ✔ f ammette in $(0,0)$ un minimo relativo