APPUNTI DI TRASFORMATE DI FOURIER DISCRETE

Nota Bene: Questi brevi appunti raccolgono gli argomenti del modulo di Trasformate di Fourier discrete e non intendono in alcun modo essere considerati un libro di testo o una dispensa. Si suppone che lo studente abbia dimestichezza con gli argomenti trattati nei corsi di Analisi del primo anno, di Algebra Lineare e di Metodi Matematici. Nelle note si fa riferimento ai seguenti

(1) F. Bonsante, F. Bisi, S. Brivio: *Lezioni di Algebra Lineare con applicazioni alla geometria analitica*, ed. La Dotta- Casalecchio di Reno (BO).
(2) G. Savaré: *Analisi dei Segnali Periodici e delle Serie di Fourier*

per gli argomenti di Algebra Lineare e per i dettagli sulle Serie di Fourier, rispettivamente

1. Richiami sui numeri complessi

1.1. **Rappresentare un numero complesso.** Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ viene rappresentato in questi tre modi

(1) Forma algebrica: $z = a + ib$, dove a e b sono numeri reali detti parte reale e parte immaginaria di z, rispettivamente
(2) Forma trigonometrica: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho = |z|$ e θ è l'argomento di z.
(3) Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$, dove ancora $\rho = |z|$ e θ è l'argomento di z.

La forma esponenziale e la forma trigonometrica sono intimamente legate tramite la ben nota formula di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

eq:eulero

Ricordiamo che

$$\rho = |z| := \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1.2}$$

eq:rho

1.2. **Successioni periodiche di numeri complessi.** Sia $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucessione di numeri complessi. Diamo la seguente

Definizione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è periodica di periodo $N \in \mathbb{N}$ se

$$z_{n+N} = z_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

eq:succ_per

Diamo ora qualche esempio di successione periodica.

- Dato $N \in \mathbb{Z}$, sia $z = e^{i\theta}$ con $\theta = \frac{2\pi}{N}$. Consideriamo la successione

  $$z_n := z^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

  Ricordando che, grazie alla formula di Eulero (1.1), $z^N = e^{2\pi i} = 1$, si ha $z_{n+N} = z_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque z_n è periodica di periodo N
- Dati M, N con $N \neq 0$, sia $z = e^{2\pi i \frac{M}{N}}$. La successione definita da

  $$z_n := z^n, \; n \in \mathbb{N}$$

  è periodica di periodo N.

1.3. **Radici dell'unità.** Dato $N \in \mathbb{N}$ ci poniamo il problema di risolvere l'equazione

$$z^N = 1. \tag{1.4}$$ eq:equazione_N

Vale il sequente importante risultato

th:radice_N **Teorema 1.** *Le soluzioni dell'equazioni* (1.4) *sono della forma*

$$z = e^{i\theta}, \quad \textit{con } \theta = k\frac{2\pi}{N}, \quad \textit{con } k \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$ eq:radice_N

Al variare di k si ottengono solo N numeri complessi distinti e dunque si possono scegliere N valori consecutivi di k. Per semplicità sceglieremo $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Il teorema precedente si riscrive dicendo che per l'insieme A delle soluzioni di (1.4) vale

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} : z^N = 1\right\} = \left\{z_k = e^{ik\frac{2\pi}{N}},\ k = 0, 1, \ldots, N-1\right\}. \tag{1.6}$$ eq:radice_Nbis

Di fondamentale importanza per lo studio della trasformata di Fourier discreta è il seguente Lemma

ma:fondamentale **Lemma 1.1.** *Sia $z_k \in A$. Allora*

$$\sum_{m=0}^{N-1} z_k^m = \begin{cases} N & \textit{se } k = 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \tag{1.7}$$

Proof. Visto che

$$\begin{aligned}(z_k - 1)\sum_{m=0}^{N-1} z_k^m &= z_k + z_k^2 + \ldots + z_k^N - (1 + z_k + \ldots, z_k^{N-1}) \\ &= z_k^N - 1 = 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$ eq:fondamentale

dove abbiamo usato il fatto che z_k è una radice N-esima dell'unità. Otteniamo dunque che

$$(z_k - 1)\sum_{m=0}^{N-1} z_k^m = 0$$

da cui segue che o $z_k = 1$, cioè $k = 0$, o $\sum_{m=0}^{N-1} z_k^m = 0$. In particolare, se $k = 0$ si ha $z_k^m = 1$ e dunque $\sum_{m=0}^{N-1} z_k^m = \sum_{m=0}^{N-1} 1 = N$. Concludiamo quindi che

$$\sum_{m=0}^{N-1} z_k^m = \begin{cases} N & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

2. Richiami sulle serie di Fourier

In questa sezione richiamiamo velocemente gli elementi principali della teoria delle serie di Fourier.

Per prima cosa, sottolineiamo che in questa sezione ed in tutte queste note considereremo sempre funzioni $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ che siano sufficientemente regolari affinchè tutti i calcoli che faremo siano completamente giustificati. In particolare, lavoreremo con funzioni per cui valga

$$f(t) = S(t), \quad \text{per ogni } t \in [0, 2\pi], \tag{2.1}$$ eq:convergenza_somma

dove S rappresenta la somma della serie di Fourier (2.8). Faremo riferimento alle note del corso di Metodi Matematici per una presentazione completa delle Serie di Fourier e per i relativi risultati sula convergenza, sia in energia sia puntuale.

Data $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, eventualmente estesa in maniera periodica tramite l'estensione periodica (di periodo 2π) $\tilde{f}$, il coefficiente di Fourier (di posto n) è il numero complesso

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

eq:coeff_fourier

Usando la formula di Eulero (1.1), possiamo riscrivere c_n in termini di seni e di coseni. Più precisamente abbiamo

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t \\ &=: a_n - i b_n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

eq:c_n_trigo

ovverosia

$$a_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t, \tag{2.4}$$

eq:an

$$b_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

eq:bn

Si noti che nelle note si utilizza la seguente, equivalente, notazione

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}. \tag{2.6}$$

eq:notazione_equi

A partire dai coefficienti di Fourier $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ costruiamo il seguente polinomio trigonometrico, che prende il nome di serie di Fourier troncata

$$S_k(t) := \sum_{n=-k}^{n=k} c_n e^{int} = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt). \tag{2.7}$$

eq:serie_troncata

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$, chiamiamo Serie di Fourier il limite (se esiste finito)

$$S(t) = \lim_{k \nearrow +\infty} S_k(t) \tag{2.8}$$

eq:serie_di_fourier

Elenchiamo ora alcune importanti proprietà dei coefficienti di Fourier.

* *Linearità*: Date f, g funzioni definite su $[0, 2\pi]$ e $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, se ad f corrispondono i coefficienti di Fourier $c_n(f)$ ed a g corrispondono i coefficienti di Fourier $c_n(g)$, allora alla funzione $\lambda f + \eta g$ corrispondono i coefficienti di Fourier $c_n(\lambda f + \eta g) = \lambda c_n(f) + \eta c_n(g)$,

* *Segnali Reali:* Si ha $c_{-n} = \bar{c}_n$

* *Parità e Disparità:* Sia $\tilde{f}$ l'estensione periodica di f. Si ha:
  Se $\tilde{f}$ è pari allora $b_n \equiv 0 \ \forall n \in N$
  Se $\tilde{f}$ è dispari allora $a_n \equiv 0 \ \forall n \in N$

* *Shift (Traslazione)*: Sia $\tilde{f}$ l'estensione periodica di f. Allora se $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sono i coefficienti di Fourier di f, i coefficienti del segnale traslato $f_\tau(t) := \tilde{f}(t - \tau), \tau \in \mathbb{R}$ sono $\tilde{c}_n = e^{-in\tau} c_n$.

3. Trasformata di Fourier Discreta

La trasformata di Fourier discreta è una particolare operazione che converte una sequenza finita di campionamenti di una certa funzione definita (per semplicità) sull'intervallo $[0, 2\pi]$ in una stringa di coefficienti (complessi) di una combinazione lineare di esponenziali complessi. Più precisamente, data una funzione
$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},$$
fissiamo $N \in \mathbb{N}$ e poniamo $\Delta t := \frac{2\pi}{N}$. Valutiamo f nei punti $t_k = k\Delta t$, con $k = 0, \dots, N-1$, cioè consideriamo il vettore reale $y = (y_0, \dots, y_{N-1})$ definito da $y_k := f(t_k), k = 0, \dots, N-1$. Gli istanti di tempo t_k sono detti punti di campionamento. Sia ora $\omega := e^{i\Delta t}$. Si noti che ω è una radice N-esima dell'unità. A partire da ω, costruiamo la matrice quadrata complessa $\mathbb{F}$ le cui entrate sono date da
$$\mathbb{F}_{nk} := \omega^{-nk} \quad \text{con} \quad n, k = 0, \dots, N-1. \tag{3.1}$$
`eq:matrice_F`

La trasformata di Fourier discreta è l'operatore lineare
$$\mathfrak{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}^N, \quad \text{t.c.} \quad y \mapsto Y, \;\; Y = \frac{1}{N}\mathbb{F}y, \tag{3.2}$$
`eq:trans_discr_op`

ovverosia l'operatore lineare rappresentato dalla matrice $\mathbb{F}$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^N$ e di $\mathbb{C}^N$, rispettivamente. Abbiamo la seguente

Definizione Data $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ e fissato $N \in \mathbb{N}$, si considerino i punti di campionamento $f(t_k)$ con $k = 0, \dots, N-1$. Sia $y \in \mathbb{R}^N$ con $y_k = f(t_k)$ per $k = 0, \dots, N-1$. Il vettore $Y \in \mathbb{C}^N$ le cui componenti sono date da
$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \tag{3.3}$$
`eq:trasf_discr`

con $n = 0, \dots, N-1$ è detto vettore dei coefficienti di Fourier discreti di f.

Studiamo ora più in dettaglio alcune proprietà importanti della matrice $\mathbb{F}$. Al tal proposito è utile ricordare la seguente definizione

Definizione Una matrice quadrata complessa $\mathbb{U}$ è detta unitaria se soddisfa la seguente
$$\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathrm{Id}, \tag{3.4}$$
`eq:def_unitaria`

dove $\mathbb{U}^\dagger$ è la matrice trasposta coniugata di $\mathbb{U}$, cioè la matrice
$$\mathbb{U}^\dagger = \overline{\mathbb{U}}^t = \overline{\mathbb{U}^t}.$$

Vale la seguente

Proposizione 3.1. *Si ha*
$$\mathbb{F} \quad \textit{è simmetrica} \tag{3.5}$$
`eq:simmetrica`
$$\mathbb{U} := \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{F} \quad \textit{è unitaria} \tag{3.6}$$
`eq:unitaria`

Proof. Visto che $\omega^{-nk} = \omega^{-kn}$, dalla definizione di $\mathbb{F}$ segue subito che $\mathbb{F}_{nk} = \mathbb{F}_{kn}$, cioè la matrice $\mathbb{F}$ è simmetrica. Ora, essendo $\mathbb{F}$ simmetrica anche $\mathbb{U} := \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{F}$ risulta essere simmetrica. Dunque, per dimostrare che $\mathbb{U}$ è unitaria ci basta mostrare che
$$\mathbb{U}\bar{\mathbb{U}} = Id, \tag{3.7}$$
`eq:unitaria_def`

dove $\bar{\mathbb{U}}$ è la matrice le cui entrate sono le coniugate di quelle di $\mathbb{U}$ ed Id è la matrice identità. Svolgendo il prodotto matrice-matrice, abbiamo che
$$\left(\mathbb{U}\bar{\mathbb{U}}\right)_{nk} = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbb{U}_{nm}\overline{\mathbb{U}}_{mk}.$$

D'altro canto,

$$\overline{\mathbb{U}}_{mk} = \frac{1}{\sqrt{N}}\overline{\mathbb{F}}_{mk} = \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{mk},$$

dove abbiamo usato che

$$\overline{w^{-nk}} = \omega^{nk}. \tag{3.8}$$

eq:con_omega

Otteniamo quindi, utilizzando il Lemma 1.1,

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{U}\overline{\mathbb{U}}\right)_{nk} &= \sum_{m=0}^{N-1} \mathbb{U}_{nm}\overline{\mathbb{U}}_{mk} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-nm}\omega^{mk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \left(\omega^{k-n}\right)^m = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.9}$$

cioè la tesi. □

La proposizione precedente ha importanti conseguenze. Prima di tutto, visto che $\overline{\det A} = \det\overline{A}$, si ha che

$$1 = \det\left(\mathbb{U}\bar{\mathbb{U}}\right) = (\det\mathbb{U})(\overline{\det\mathbb{U}}),$$

da cui segue che

$$|\det\mathbb{U}| = 1,$$

cioè il determinante di $\mathbb{U}$ è un numero complesso di norma 1. In particolare,

$$\det\mathbb{U} \neq 0 \tag{3.10}$$

eq:det

e dunque che $\mathbb{U}$, e di conseguenza $\mathbb{F}$, è una matrice invertibile. Segue quindi che $\mathfrak{F}$ è iniettiva e dunque, per il teorema delle dimensioni, abbiamo che $\dim(Im(\mathfrak{F})) = N$, dove $\dim(Im(\mathfrak{F}))$ è la dimensione reale dello spazio immagine di $\mathfrak{F}$. In particolare, ciò garantisce che $\mathfrak{F}$ è invertibile sull'immagine. Inoltre, da (3.7) segue che

$$\mathbb{U}^{-1} = \overline{\mathbb{U}},$$

da cui otteniamo che

$$\mathbb{F}^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathbb{F}} \tag{3.11}$$

eq:matrice_inversa

Dunque, possiamo considerare la seguente applicazione da $\mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{nk} Y_k, \quad \text{per } k = 0, \ldots, N-1. \tag{3.12}$$

eq:inversa

Si noti che per ogni $n, k = 0, \ldots, N-1$ si ha che $\omega^{nk} = \overline{\mathbb{F}}_{nk} = (\mathbb{F}^{-1})_{nk}$ (si ricordi (3.8)). Dunque, un semplice calcolo mostra che (3.12) è la trasformata di Fourier (discreta) inversa.

Presentiamo ora alcune proprietà fondamentali della trasformata di Fourier discreta.

- Uguaglianza di Parseval Discreta. Vale la seguente

prop:parseval

Proposizione 3.2. *Sia $Y \in \mathbb{C}^N$ dato da $Y = \frac{1}{N}\mathbb{F}y$ dove $y \in \mathbb{R}^N$. Allora si ha*

$$\|Y\|^2 = \frac{1}{N}\|y\|^2. \tag{3.13}$$

eq:parseval

Proof. Per prima cosa ricordiamo che la norma di un vettore in $\mathbb{C}^N$ è data da

$$\|Y\|^2 = (Y, \bar{Y}) := \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \bar{Y}_n.$$

Dunque si ha (ricordando che $\bar{Y}_n = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} y_l \omega^{nl}$)

$$\|Y\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \bar{Y}_n = \sum_{n=0}^{N-1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} y_m \omega^{-nm}\Big)\Big(\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} y_l \omega^{nl}\Big)$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} y_m y_l \sum_{n=0}^{N-1}(\omega^{l-m})^n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} y_m^2 = \frac{1}{N}\|y\|^2, \tag{3.14}$$

dove abbiamo usato il Lemma 1.1 nella penultima uguaglianza. A tal proposito, si ricordi che $\omega := e^{i\Delta t} = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ (in particolare, ω è una radice N-esima dell'unità) e dunque $\omega^{l-m} = e^{i(l-m)\frac{2\pi}{N}}$. Si applica quindi il Lemma 1.1 con la scelta $k = l - m$. □

- Traslazione (Shift discreto)
  Data una funzione $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, consideriamo la sua traslata
  $$f_M(t) = \tilde{f}(t - M\frac{2\pi}{N}),$$
  dove $\tilde{f}$ indica l'estensione periodica di f ed $M, N \in \mathbb{N}$. Vale la seguente

  p:shift_discreto **Proposizione 3.3.** *Indicato con $t_k := k\Delta t$, ($k = 0, \ldots, N-1$) i punti di campionamento, posto*
  $$y_k := f(t_k) \quad e \quad x_k = f_M(t_k),$$
  siano $Y = \frac{1}{N}\mathbb{F}y$ e $X = \frac{1}{N}\mathbb{F}x$ le trasformate di Fourier discrete di f e di f_M, rispettivamente. Allora si ha
  $$X_n = Y_n \omega^{-nM}, \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{3.15}$$ eq:shift_discreto

- Interpolazione
  Per ogni $\bar{k} = 0, \ldots, N-1$ consideriamo il seguente polinomio trigonometrico
  $$Q_{\bar{k}}(t) = \sum_{k=0}^{\bar{k}} Y_k e^{ikt}, \ \ t \in [0, 2\pi]$$
  dove $Y = (Y_0, \ldots, Y_{N-1})$ sono i coefficienti di Fourier discreti di $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$. Un semplice calcolo basato sulla definizione di Y e sul Lemma 1.1 mostra che
  $$Q_{N-1}(t_m) = f(t_m), \ \forall m = 0, \ldots, N-1, \quad t_m = m\frac{2\pi}{N}.$$

Abbiamo visto che la trasformata di Fourier discreta $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}^N$ definita in (3.2) è iniettiva e dunque la sua immagine, per il teorema delle dimensioni, ha dimensione N. Vogliamo studiare più dettagliatamente la struttura dello spazio immagine. Per prima cosa, vale il seguente importante Lemma

lemma:struttura **Lemma 3.1.** *Sia $Y = \frac{1}{N}\mathbb{F}y$, allora si ha*
$$Y_{N-n} = \overline{Y}_n, \quad per\ n = 1, \ldots, N. \tag{3.16}$$ eq:struttura1

Proof. La dimostrazione è immediata e consiste nel valutare Y_{N-n}. Per ogni $n = 1, \ldots, N$ vale infatti

$$Y_{N-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-(N-n)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{nk}\omega^{-Nk}$$
$$= \overline{Y}_n, \tag{3.17}$$

essendo $\omega^{-Nk} = 1\ \forall k$ e ricordando che $\overline{\omega^{-nk}} = \omega^{nk}$. □

La struttura dell'immagine della trasformata di Fourier discreta è descritta nella seguente ruttura_immagine **Proposizione 3.4.** *L'immagine della trasformata di Fourier discreta*

$$\mathfrak{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}^N$$

è un sottospazio vettoriale reale di dimensione N in $\mathbb{C}^N$ descritto dalle seguenti equazioni:

(1) *Se N è pari*

$$Im(Y_0) = 0 \tag{3.18}$$

eq:Y0real_pari

$$Im(Y_{N/2}) = 0 \tag{3.19}$$

eq:YN2real

$$Re(Y_{N-n}) = Re(Y_n), \quad Im(Y_{N-n}) = -Im(Y_n) \ \ \forall n = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \tag{3.20}$$

eq:coniugati_pari

(2) *Se N è dispari*

$$Im(Y_0) = 0 \tag{3.21}$$

eq:Y0real_dispari

$$Re(Y_{N-n}) = Re(Y_n), \quad Im(Y_{N-n}) = -Im(Y_n) \ \ \forall n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}, \tag{3.22}$$

eq:coniugati_dispari

Proof. Diamo un cenno di dimostrazione. Per prima cosa, sia che N sia pari sia che sia dispari, abbiamo che Y_0 è un numero reale. Segue quindi che $Im(Y_0) = 0$, cioè le (3.18) e (3.21). Se N è pari da (3.16) discende che per $n = \frac{N}{2}$ si ha

$$Y_{N/2} = \overline{Y}_{N/2},$$

che implica che $Y_{N/2}$ è reale e dunque la sua parte immaginaria è uguale a zero, cioè (3.19). I rimanenti casi sono descritti dalle equazioni (3.20) e (3.22) che discendono direttamente dal lemma 3.1. □

3.1. **Proprietà di approssimazione: legami con i coefficienti di Fourier c_n.** Discutiamo ora le proprietà di approssimazione dei coefficienti di Fourier discreti, cioè siamo interessati a vedere se $Y_n \approx c_n$ per N abbastanza grande.

Per semplicità, consideriamo N pari (se N è dispari si ragiona in modo simile). Vediamo che la trasformata di Fourier discreta appare naturalmente quando ci poniamo il problema di calcolare in maniera approssimata i coefficienti di Fourier di un segnale f definiti in (2.2). Nella sezione precedente, data una funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ abbiamo introdotto i suoi coefficienti di Fourier $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ come

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.23}$$

eq:coeff_fourier_sez

Siamo ora interessati a costruire un'approssimazione di tali coefficienti. Questa approssimazione passa attraverso il cosiddetto "metodo dei rettangoli" che è un particolare metodo di integrazione numerica per approssimare un'integrale definito. Nel nostro caso, l'integrale che vogliamo approssimare è l'integrale a secondo membro di (3.23).

Notiamo fin da subito che saremo interessati a costruire un approssimazione dei c_n per $n = 0, \dots, N/2 - 1$. Infatti, ricordiamo che il Lemma 3.1 fornisce che i coefficienti discreti con indice maggiore di $N/2$ sono i coniugati, secondo la relazione (3.16), dei coefficienti con indice minore di $N/2$.

Per implementare il "metodo dei rettangoli" dividiamo l'intervallo $[0, 2\pi]$ in N subintervalli di ampiezza $\Delta t := \frac{2\pi}{N}$. I nodi di quesa partizione, ovvero i punti $t_k := k\Delta t$ ($k = 0, \dots, N-1$) sono i punti di campionamento introdotti precedentemente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, il metodo dei rettangoli consiste nell'approssimare l'integrale a secondo membro di (3.23) con la somma delle aerei dei rettangoli di base Δt ed altezza $f(t_k)e^{int_k}$, cioè

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{int_k}\Delta t. \tag{3.24}$$

eq:metodo_rett

Ricordando le notazioni introdotte sopra, abbiamo dunque

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\omega^{-nk} = Y_n \quad \text{per } n = 0,\dots,N/2. \tag{3.25}$$ eq:metoto_rett_bis

E per approssimare i coefficienti c_{-n}? Per rispondere a questa naturale domanda, ricordiamo che $c_{-n} = \overline{c}_n$. Dunque, ancora ricordando il Lemma 3.1, concludiamo con la seguente

$$Y_n \approx c_n \quad \text{per } n = 0,\dots,N/2 \tag{3.26}$$ eq:approx1

$$Y_{N-n} \approx \overline{c}_n \quad \text{per } n = 1,\dots,N/2-1. \tag{3.27}$$ eq:approx2

Ci aspettiamo che se scegliamo N grande, le approssimazioni (3.26) e (3.27) migliorino. In particolare, vale la seguente stima dell'errore

$$|c_n - Y_n| \leq C\Delta t \sup_{t\in[0,2\pi]} |f'(t)|, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{N}. \tag{3.28}$$ eq:stima_errore

4. Trasformata di Fourier Discreta con Matlab

L'ambiente di calcolo Matlab implementa la funzione fft che, dato un segnale f, calcola usando l'algoritmo Fast Fourier Transform nella versione di Cooley e Tukey i coefficienti di Fourier discreti.

L'algoritmo Fast Fourier Transform (nella versione di Cooley e Tukey) è stato introdotto da J. W Cooley e J. Tukey nel 1965 reinventando un algoritmo proposto e mai pubblicato da Gauss nel 1805 per lo studio delle orbite degli asteroidi Giunone e Pallade.

Non entriamo nei dettagli dell'algoritmo ma ricordiamo che, nella versione più semplice richiede che la lunghezza del vettore y, ovvero sia il numero di campionamenti del segnale f, sia una potenza di 2. Più precisamente si richiede che

$$N = 2^k,$$

per un certo $k \in \mathbb{N}$. In tali condizioni si ottiene che il numero di operazioni che l'algoritmo compie per calcolare il vettore dei coefficienti di Fourier Y è dell'ordine di $N \log N$. Si noti che per calcolare direttamente il vettore Y da (3.3) è richiesto un numero di operazioni dell'ordine di N^2.

Ricordiamo che Matlab utilizza indici che partono da 1. Indicato con $Y(n)$ la componente n-esima del vettore Matlab dei coefficienti di Fourier Discreti, abbiamo dunque la seguente relazione

$$Y(n) = Y_{n-1}, \ \ \forall n \geq 1. \tag{4.1}$$ eq:vett_matlab