Complementi di Analisi Matematica e Statistica - 8/02/18 - Tempo a disposizione: 2h

Matricola **Cognome e Nome**

A1. **[8 punti]** Si consideri il campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x, y, z) = (x^2, y, 3x).$$

Detta Σ la sfera di raggio 2 e centro $(0, 0, 0)$ si calcoli

$$\Phi_\Sigma(F) := \int_\Sigma F \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S,$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale uscente a Σ.

A2. **[8 punti]** Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 + 5}{n^4 + 1} e^{-\frac{1}{2}n} (x - 1)^n.$$

determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza S.

A3. **[8 punti]** Dato il campo

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

determinare un potenziale per F e calcolare il lavoro di F lungo il segmento con primo estremo il punto $P = (\sqrt{\pi/2}, 0)$ e secondo estremo il punto $Q = (0, 1)$.

A4. **[8 punti]** Si consideri la superficie cartesiana $\Sigma = \mathrm{graf}(g)$, dove

$$g(x, y) = x^2 - y^2, \quad \text{con } (x, y) \in B_2(0) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \right\}$$

Data $f(x, y, z) := 5 \dfrac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$, calcolare $\displaystyle\int_\Sigma f \mathrm{d}S$.

B1. [8 punti] Per $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si consideri il campo vettoriale

$$F(x) = \frac{ax}{|x|}.$$

Allora, la divergenza di F vale:

[A] 0 [B] ax [C] $\frac{a}{|x|^2}$ [D] $\frac{a}{|x|}$.

B2. [6 punti] Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, v versore di $\mathbb{R}^2$ e $P_0 = (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$ è definita come [A] $\lim_{v \to 0} \frac{f(v) - f(P_0)}{v}$ [B] $\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(P_0)}{t}$ [C] $\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(v)}{t}$ [D] $\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(P_0)}{tv}$.

B3. [6 punti] Date $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(2,1) = (3,2)$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenziabile tale che $\gamma(0) = (2,1)$ e $\gamma'(0) = (a,b)$, si ponga

$$g(t) = f(\gamma(t)).$$

Allora, $g'(0)$ vale [A] $3a + 2b$ [B] $2a + b$ [C] $(3,2)$ [D] nessuna delle risposte è corretta.

B4. [6 punti]

Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Si definisce

$$\Delta f := \mathrm{div} \nabla f = \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial f^2}{\partial x_3^2}.$$

Allora, posto $f(x) = |x|$, con $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, Δf vale

[A] 0 [B] $\frac{2}{|x|}$ [C] $|x|$ [D] 1.

B5. [6 punti] Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ si denoti con R il suo raggio di convergenza.

Si assuma che $R \in (0, +\infty]$ e si denoti con $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ la somma di tale serie, allora

[A] la serie converge per ogni x tale che $|x - x_0| \geq R$ [B] si ha che f è continua su $[x_0 - R, x_0 + R]$ [C] si ha che f è differenziabile in $(x_0 - R, x_0 + R)$ [D] nessuna delle risposte è corretta.