Complementi di Analisi Matematica e Statistica - 18/09/17 - Tempo a disposizione: 2h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. [8 punti]
Sia Σ la superficie laterale del cilindro

$$C := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 2], y^2 + z^2 \leq 2\right\}.$$

Disegnare $\partial^+\Sigma$, la frontiera orientata positivamente rispetto alla normale esterna. Dato il campo

$$F(x, y, z) = (x, \frac{-z}{y^2 + z^2}, \frac{y}{y^2 + z^2})$$

e detto τ il versore tangente a $\partial^+\Sigma$, calcolare, specificando i passaggi salienti,

$$\oint_{\partial^+\Sigma} F \cdot \tau \mathrm{d}s$$

A2. [8 punti] Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{e^{-2n} + n}(x - 2)^n.$$

Determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza S

A3. [8 punti] Sia $F : D(F) \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$F(x, y, z) = (x^2, \sqrt{y} - \frac{1}{y}, z^3).$$

Determinare il dominio di F .

Calcolare il lavoro di F lungo il segmento giacente interamente nel piano $z = 0$ e che parte dal punto $(1, 1, 0)$ ed arriva nel punto $(1, 2, 0)$. .

A4. [8 punti] Dato $\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{25} \leq 2\right\}$, sia $\Sigma = \mathrm{graf}(g)$, dove $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è definita da $g(x, y) = 1 + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{y^2}{5}$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = z - (\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{y^2}{5}),$$

calcolare $\int_\Sigma f \mathrm{d}S$.

B1. [8 punti totali] Dati $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$ e $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 1\right\}$.
Disegnare $\Omega \cup B$ **[2 punti]** (nello spazio a fondo pagina) e determinare

La parte interna di Ω $\boxed{}$ **[2 punti]**

La frontiera di Ω $\boxed{}$ **[2 punti]**

La chiusura di Ω $\boxed{}$ **[2 punti]**

B2. [8 punti] Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e limitato, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Allora,

$\boxed{\text{A}}$ Se f è anche di classe C^2 e $\bar{x}$ è un punto stazionario in cui la matrice Hessiana di f è definita negativa, allora $\bar{x}$ è un punto di minimo locale $\boxed{\text{B}}$ Esistono x_m e x_M in $\overline{\Omega}$ (la chiusura di Ω) punti di minimo e di massimo, rispettivamente $\boxed{\text{C}}$ Se f è anche di classe C^1 e $\nabla f(\bar{x}) = 0$ ($\bar{x} \in \Omega$) si ha che $\bar{x}$ è un punto di massimo o di minimo locale $\boxed{\text{D}}$ Se f è anche di classe C^2 e la matrice Hessiana di f è definita positiva in $\bar{x}$, si ha che $\bar{x}$ è punto di minimo locale.

B3. [8 punti] Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con $x \in I$ ($I=$ insieme di convergenza). Allora:

$\boxed{\text{A}}$ La serie converge solo se $I = (0,1)$ $\boxed{\text{B}}$ La serie converge solo se $I = [-1,1]$ $\boxed{\text{C}}$ Per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ la serie converge in intervalli del tipo $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\boxed{\text{D}}$ Detta S la (funzione) somma della serie, si ha che $S(1/2) = 3$.

B4. [8 punti] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto ed $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ Se F è conservativo e γ è una curva regolare, semplice e tutta contenuta in Ω, si ha che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}s = 0$ $\boxed{\text{B}}$ Se $\mathrm{rot}F = 0$ si ha che F è conservativo $\boxed{\text{C}}$ Se $\mathrm{rot}F = 0$ si ha che per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno sferico centrato in x e contenuto in Ω in cui F è conservativo $\boxed{\text{D}}$ Se $\mathrm{rot}F = 0$ e γ è una curva chiusa, regolare, semplice e tutta contenuta in Ω, si ha che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}s = 0$.