Complementi di Analisi Matematica e Statistica - 16/06/17 - Tempo a disposizione: 2h
Matricola Cognome e Nome

A1. [8 punti] Dati α, β, γ e δ in $\mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f(x,y) = \beta x - \gamma y^2 + \delta y^3 - \alpha x^2.$$

Calcolare il gradiente di f e la matrice Hessiana di f nel punto $(0,0)$ $\boxed{\nabla f(0,0) = (\beta, 0), \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & -2\gamma \end{pmatrix}}$
Stabilire per quali α, β, γ e δ in $\mathbb{R}$, la funzione ha un punto di massimo in $(0,0)$

$\boxed{\beta = 0, \quad \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0}$

A2. [8 punti] Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la seguente serie di potenze:

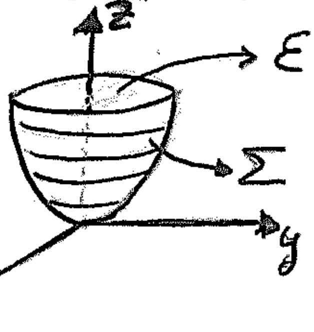
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}} (x-2)^n.$$

Determinare il raggio di convergenza R $\boxed{R = 1}$. Detto S l'insieme di convergenza, stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $S = [2-R, 2+R]$ (cioè trovare α in modo che gli estremi di S siano ENTRAMBI inclusi) $\boxed{\alpha > 1/2}$

A3. [8 punti] Dati $P = (0,0,0)$ e $Q = (2, \sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$, scrivere una parametrizzazione del segmento $\overrightarrow{PQ}$ (percorso da P a Q). Dato poi il campo $F(x,y,z) = \left(2\cos x + y, \sqrt{3}\sin y - x, \frac{\pi}{2} z^3\right)$, con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, calcolarne il lavoro lungo il segmento $\overrightarrow{PQ}$ $\boxed{\gamma(t) = (2t, \sqrt{3}t, \tfrac{\pi}{2}t), \quad t \in [0,1]}$

$$L = 2\sin 2 - \sqrt{3}\cos\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi^5}{128}$$

A4. [8 punti] Dato il campo $F(x,y,z) := (x^2, \sin z - 2xy, 3)$ e la funzione $g(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ per (x,y) tali che $3x^2 + 4y^2 \leq 4$, si consideri la superficie $\Sigma = \text{graf}(g)$. Disegnare la superficie Σ e calcolare il flusso di F attraverso Σ specificando i passaggi



$\boxed{\Phi(F,\Sigma) = -12\pi(\sqrt{12})^{-1} = \frac{-6\pi}{\sqrt{3}}}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3 : \partial\Omega = \Sigma \cup \mathcal{E}$.

Allora $\Phi(F, \partial\Omega) = \Phi(F,\Sigma) + \Phi(F,\mathcal{E})$

$= \iiint \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = 0$

$\Rightarrow \Phi(F,\Sigma) = -\Phi(F,\mathcal{E}) \overset{\Omega}{=} -3 \,\text{Area}(\mathcal{E})$

B1. **[8 punti]** Data $f : D(f) \to \mathbb{R}$ continua, si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, f(z)\Big),$$

Allora: ■ Esiste G campo vettoriale conservativo ed esiste $\tilde{F}$ campo vettoriale irrotazionale tali che $F = G + \tilde{F}$ $\boxed{\text{B}}$ F è conservativo $\boxed{\text{C}}$ l'integrale di F lungo ogni curva regolare γ contenuta in $D(F)$ dipende solo dagli estremi di γ $\boxed{\text{D}}$ il dominio di F è $D(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in D(f)\}$.

B2. **[8 punti]** Sia Σ una superficie regolare con bordo. Detto $\partial^+\Sigma$ il bordo di Σ orientato positivamente si ha: $\boxed{\text{A}}$ Nessuna delle risposte è corretta ■ Sia F un campo vettoriale di classe C^1 ed irrotazionale. Allora $\oint_{\partial^+\Sigma} F \cdot ds = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $\partial^+\Sigma$ è una curva chiusa sempre percorsa in senso antiorario $\boxed{\text{D}}$ se $\Sigma = \text{graf}(g)$ con $g : B_R(0,0) \to \mathbb{R}$ allora $\partial^+\Sigma$ è una circonferenza di raggio R percorsa in senso orario .

B3. **[8 punti]** Data $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenziabile, sia $\hat{v}$ un versore di $\mathbb{R}^d$. Allora, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha $\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\partial f}{\partial(\lambda\hat{v})}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial\hat{v}}(x)$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\partial f}{\partial(\lambda^{-1}\hat{v})}(x) = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial\hat{v}}(x)$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\partial f}{\partial(\lambda\hat{v})}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial\hat{v}}(\lambda x)$ ■ $\dfrac{\partial f}{\partial(\lambda^{-1}\hat{v})}(x) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial\hat{v}}(x)$.

B4. **[8 punti]** Dati $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -|x|\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$, si ha che $\boxed{\text{A}}$ Ω è chiuso $\boxed{\text{B}}$ $\Omega \cap B$ è aperto ■ $(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega) \cap B$ è chiuso $\boxed{\text{D}}$ Ω è limitato.