Complementi di Analisi Matematica e Statistica, 17-06-2016: Soluzioni

I Teoremi indicati sono quelli del libro di testo

Analisi Matematica 2, Marco Bramanti, Carlo Pagani, Sandro Salsa.

- Parte A

1. Dato il campo

$$F(x,y) = \Big(\frac{x^3}{x^4+y^4}, \frac{y^3}{x^4+y^4}\Big)$$

determinarne il dominio e calcolarne il lavoro lungo la curva

$$\gamma(t) = (\alpha \cos t, \sin t), \;\; t \in [\beta, \delta\pi]$$

Soluzione: Il dominio di F è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. F è conservativo. Un potenziale è $U(x,y) := \frac{1}{4}\log(x^4+y^4)$. Il lavoro di F lungo γ è dunque dato da (Lemma 6.1)

$$L = \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma = U(\gamma(\delta\pi)) - U(\gamma(\beta)) = \frac{1}{4}\log\Big(\frac{\alpha^4\cos^4(\delta\pi)+\sin^4(\delta\pi)}{\alpha^4\cos^4(\beta)+\sin^4(\beta)}\Big).$$

2. Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{3n}(x-7)^n.$$

determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza S.
Soluzione: Per prima cosa, osserviamo che

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ \pm 1 \text{ se } n \text{dispari.} \end{cases}$$

Dunque, la serie si riscrive come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{3n}(x-7)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{3(2k+1)}(x-7)^{2k+1}$$

Inoltre, poichè $\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2}) = (-1)^k$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{3n}(x-7)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3(2k+1)}(x-7)^{2k+1}.$$

si ponga $a_k := \frac{(-1)^k}{3(2k+1)}$. Dunque

$$L := \lim_{n \nearrow +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1.$$

Quindi, il Teorema 7.4 fornisce che

$$R = \frac{1}{L}$$

è il raggio di convergenza cercato. Per lo stesso Teorema, la serie data converge almeno nell'intervallo aperto $(6, 8)$. Per concludere, dobbiamo studiare il comportamento della serie negli estremi. In $x = 8$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3(2k+1)}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Nel punto $x = 6$, la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3(2k+1)} (-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{3k+1}}{3(2k+1)}$$

che converge ancora per il criterio di Leibniz.

3. Dato il campo $F(x, y, z) := (xe^y, y, -ze^y + \alpha)$, si consideri la superficie

$$\Sigma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ \text{con } (x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$

Calcolare $\Phi(F, \Sigma)$, cioè il flusso di F attraverso Σ.

Soluzione Posto $B_R := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$, sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il dominio di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B,\ 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Si ha che $\partial V = \Sigma \cap B$. Dunque, il Teorema della Divergenza (Teorema 6.8) fornisce

$$\int\int\int_V \operatorname{div} F(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_{\partial V} \langle F, \nu \rangle \mathrm{d}S =: \Phi(F, \partial V),$$

dove ν è la normale esterna (i.e. uscente) a ∂V. Si ha dunque

$$\int\int\int_V \operatorname{div} F(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \Phi(F, \Sigma) + \Phi(F, B_R),$$

dove $\Phi(F, B_R)$ indica il flusso di F attraverso B_R. Ora, poichè $\operatorname{div} F(x, y, z) = 1$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, abbiamo che

$$\Phi(F, \Sigma) = \text{Volume}(V) - \Phi(F, B_R) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 - \Phi(F, B_R).$$

Calcolo ora $\Phi(F, B_R)$. Per prima cosa, osservo che B_R è una superficie interamente contenuta nel piano dato da $z = 0$. La rappresentazione parametrica di B_R è data dalla funzione $\phi(u, v) = (u, v, 0)$ con $(u, v) \in B_R$. Poi, visto che la normale esterna a B_R è $-e_3$ (terzo versore della base canonica), si ha che

$$\langle F, -e_3 \rangle = -F_3 (\text{terza componente di } F \text{ nella base canonica}).$$

Inoltre, $F_3(\phi(u, v)) = \alpha$ e $|\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}| = 1$. Dunque, si ha

$$\Phi(F, B_R) = \int_{B_R} -F_3 \mathrm{d}S \overset{Pag.325}{=} - \int_{B_R} F_3(\phi(u, v)) \mathrm{d}u \mathrm{d}v = -\alpha Area(B_R) = -\alpha R^2 \pi.$$

Concludiamo quindi che

$$\Phi(F, \Sigma) = \text{Volume}(V) - \Phi(F, B_R) = \frac{2}{3} \pi R^3 + \alpha R^2 \pi.$$

4. Stabilire per quali valori di α, β, γ e δ in $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \alpha x - \beta y + \gamma x^2 - \delta y^2 + y^4 - x^3$$

ha un punto di minimo relativo in $(0,0)$
<u>Soluzione</u>: Per prima cosa dev'essere che (Teorema di Fermat 3.17)

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Visto che $\nabla f(0,0) = (\alpha, -\beta)$ una prima condizione è che $\alpha = \beta = 0$. Un semplice calcolo mostra che la matrice Hessiana di f in $(0,0)$ è

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Dunque, affichè si abbia che $(0,0)$ è punto di minimo di deve avere che

$$\alpha = \beta = 0, \;\; \gamma > 0, \;\; \delta < 0.$$

- Parte B

1. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big),$$

Allora: F è irrotazionale.
<u>Soluzione:</u> Per prima cosa osservare che il dominio di F è $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Poi,

(a) Strategia 1: Ricordare che $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 sul suo dominio è detto irrotazionale se rot $F = 0$. Nel nostro caso abbiamo $\mathrm{rot}F(x,y) = \Big(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Big)e_3$, dove e_3 è il terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dunque, $\mathrm{rot}F(x,y) = \Big(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)e_3 = 0$.

(b) Strategia 2: F è conservativo se e solo se l'integrale di F lungo ogni curva chiusa semplice e regolare vale 0 (Teorema 6.2). Inoltre, se F è conservativo, allora F è irrotazionale (Proposizione 6.2). Dunque, visto che dev'esserci una sola risposta corretta, concludiamo che l'unica risposta esatta è F è irrotazionale.

2. Date $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ differenziabili, si indichi con $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,3}$ la matrice Jacobiana di $\Phi := g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si denoti con $g = (g_1, g_2, g_3)$ le componenti di g e si denoti con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e con t le variabili in $\mathbb{R}^3$ ed in $\mathbb{R}$, rispettivamente. Allora si ha che

$$a_{13} = \frac{dg_1(f(x))}{dt}\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}$$

<u>Soluzione:</u> Segue velocemente dal Teorema di differenziabilità della funzione composta (Teorema 4.2).

3. Dati $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -|x|\big\}$ e $B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\big\}$, allora

$$\Omega \text{ è semplicemente connesso.}$$

<u>Soluzione</u>: Evidente. Basta rappresentare Ω, B e $\Omega \cap B$ su un piano cartesiano.

4. Data $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenziabile, sia $\hat{\mathbf{v}}$ un versore di $\mathbb{R}^d$. Allora, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda \hat{\mathbf{v}})} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}.$$

<u>Soluzione:</u>

(a) Strategia 1: dalla definizione di derivata direzionale, posto $\mathbf{w} := \lambda \hat{\mathbf{v}}$ e ricordando che se $t \to 0$ allora (λ è fissato) si ha che $t\lambda \to 0$ per $t \to 0$, abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\mathbf{w}) - f(x)}{t} = \lim_{t\lambda \to 0} \lambda \frac{f(x + t\lambda \hat{\mathbf{v}}) - f(x)}{t\lambda} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(x)$$

(b) Strategia 2: Se f è differenziabile, il Teorema 3.9 mostra che ($\mathbf{w} := \lambda \hat{\mathbf{v}}$)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(x) = \langle \nabla f(x), \mathbf{w} \rangle = \langle \nabla f(x), \lambda \hat{\mathbf{v}} \rangle = \lambda \langle \nabla f(x), \hat{\mathbf{v}} \rangle = \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(x)$$