Complementi di Analisi Matematica e Statistica 19/07/2016 **- Testo e Soluzioni**

- Parte A

1. **Esercizio A1:** Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{n!}{(n+1)!}(x-\beta)^n.$$

determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza S.
<u>Soluzione:</u> Per prima cosa poniamo $a_n := 2^n \frac{n!}{(n+1)!}$ (osservare che $a_n > 0\ \forall n\ \in \mathbb{N}$). Si osservi che $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ e che quindi $a_n = 2^n \frac{1}{n+1}$. Dunque, si ha

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

Quindi, il Teorema 7.4 fornisce che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$ e che la serie converge nell'intervallo

$$I := (\beta - \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}).$$

e che la serie non converge per $|x-\beta| > \frac{1}{2}$. Per caratterizzare l'insieme di convergenza S dobbiamo dunque studiare il comportamento della serie negli estremi dell'intervallo I. Nel secondo estremo $\bar{x} = \beta + \frac{1}{2}$, si ha che la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

che diverge (serie armonica). Di contro, nel primo estremo $\underline{x} = \beta - \frac{1}{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

che converge per il Criterio di Leibniz. Con ragionamenti analoghi si conclude che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!}(x-\beta)^n$$

ha raggio di convergenza $R = 1$ ed insieme di convergenza $S = (\beta - 1, \beta + 1]$.

2. **Esercizio A2:** Siano $A := \{(x,y) \in [0,+\infty)^2 : y \le x\}$ e $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Si calcoli

$$\int\int_{A\cap B} xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

<u>Soluzione:</u> Per prima cosa è fondamentale comprendere come sia fatto l'insieme $A \cap B$. Si tratta del settore circolare (di raggio R) ed angolo (contato in senso antiorario a partire da 0) di $\frac{\pi}{4}$. Conviene dunque rappresentare $A \cap B$ in coordinate polari. Posto

$$\Phi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \quad \rho \in [0,R], \;\; \theta \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

si ha che $A \cap B = \Phi([0,R] \times [0, \frac{\pi}{4}])$. Dunque, il Teorema di cambiamento di variabile (Teorema 5.10) fornisce

$$\int\int_{A\cap B} xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{[0,R]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho.$$

Quindi, usando il Teorema di riduzione (Teorema 5.9) ed un semplice calcolo abbiamo che

$$\int\int_{[0,R]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \int_0^R \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{16}$$

3. **Esercizio A3:** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2 + z^2),$$

e si consideri la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \beta t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare

$$\int_\gamma f \mathrm{d}s$$

Soluzione: Si ricordi che l'integrale di una funzione scalare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lungo una curva regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è definito come

$$\int_\gamma f \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

Nel nostro caso, abbiamo che $[a, b] = [0, 2\pi]$, che $f(\gamma(t)) = \alpha(1 + \beta^2 t^2)$ e che $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + \beta^2}$. Si ha quindi

$$\int_\gamma f \mathrm{d}s = \alpha\sqrt{1+\beta^2} \int_0^{2\pi} (1 + \beta^2 t^2)\mathrm{d}t = 2\pi\alpha\sqrt{1+\beta^2}(1 + \beta^2 \frac{4\pi^2}{3})$$

4. **Esercizio A4:** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}, x, y, \in \mathbb{R}^2.$$

Determinare i suoi punti stazionari. Notato che $P_0 = (0, 0)$ è un punto stazionario, calcolare la matrice Hessiana di f in in P_0 e determinare di che punto stazionario si tratta. Soluzione: I punti stazionari di f sono quei punti che annullano il gradiente. Cerchiamo dunque $x, y \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1 - (x^2 - y^2)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)}(-1 - (x^2 - y^2)) \end{cases}$$

Si vede subito che $P_0 = (0, 0)$ è un punto stazionario. Cerchiamo ora punti stazionari della forma $P_a = (a, 0)$ con $a \neq 0$. Affinchè P_a sia punto stazionario dev' essere

$$2ae^{-a^2}(1 - a^2) = 0,$$

da cui segue che $a = \pm 1$. Abbiamo dunque che i punti $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$ sono stazionari per f. Cerchiamo ora punti stazionari della forma $P_b = (0, b)$ con $b \neq 0$. Ragionando come sopra, dev' essere

$$2be^{-b^2}(b^2 - 1) = 0,$$

da cui segue che $P_3 = (0, 1)$ e $P_4 = (0, -1)$ sono punti stazionari. Infine, verifichiamo che non ci sono punti stazionari della forma $P_{\alpha,\beta} = (\alpha, \beta)$ con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Se tali punti esistessero, si dovrebbe avere

$$\begin{cases} 1 - (\alpha^2 - \beta^2) = 0 \\ -1 - (\alpha^2 - \beta^2) = 0, \end{cases}$$

da cui, prendendo la differenza tra la prima equazione e la seconda, seguirebbe $2 = 0$, chiaramente assurdo. Riassumendo, i punti stazionari di f sono

$$(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1).$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f in P_0. Un semplice conto fornisce

$$Hf(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, il punto P_0 è un punto sella.

- Parte B

1. **Esercizio B1:** Date $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 si definisce

   $$\Delta f := \operatorname{div} \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^y}$$

   Allora, $\Delta(f\,g) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$.
   Soluzione: Basta fare il calcolo.

2. **Esercizio B2:** Indicata con $x = (x_1, x_2)$ la variabile di $\mathbb{R}^2$, si consideri la funzione

   $$f(x) = |x|^\alpha, \ \ \alpha > 1$$

   Allora (per $x \neq (0,)$)

   $$\nabla f = \alpha |x|^{\alpha - 2} x$$

   Soluzione: Usando il Teorema di differenziabiltà della funzione composta si ha

   $$\nabla f = \alpha |x|^{\alpha - 1} \frac{x}{|x|},$$

   da cui il risultato

3. **Esercizio B3:** Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ si denoti con R il suo raggio di convergenza. Si assuma che $R \in (0, +\infty)$ e si denoti con $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ la somma di tale serie. Allora

   $$f \text{ è continua in } (x_0 - R, x_0 + R).$$

   Soluzione: La soluzione segue dal Teorema 7.6.

4. **Esercizio B4:** Date $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(2,1) = (3,2)$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenziabile tale che $\gamma(0) = (2,1)$ e $\gamma'(0) = (3,1)$, si ponga

$$g(t) = f(\gamma(t)).$$

Allora, $g'(0)$ vale 11. Soluzione: Il Teorema di differenziazione della funzione composta fornisce

$$g'(t) = (\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)).$$

Dunque,

$$g'(0) = (\nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0))$$

e quindi $g'(0) = 11$.

5. **Esercizio B5:**
Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, v versore di $\mathbb{R}^2$ e $P_0 = (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$ è definita come

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(P_0)}{t}$$

Soluzione: Evidente. Ricordare la definizione di derivata direzionale.