Complementi di Analisi Matematica e Statistica 19/09/2016
- Soluzioni (parte A)

1. **Esercizio A1:** Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Si consideri la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{13}}{n} \cos(n\pi)(x-6)^n.$$

determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza S.
Soluzione: Per prima cosa poniamo $a_n := \frac{\sqrt{13}}{n}\cos(n\pi)$. Dunque, si ha

$$L := \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \sqrt{13}.$$

Quindi, il Teorema 7.4 fornisce che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{13}}$, che la serie converge nell'intervallo

$$I := (6 - \frac{1}{\sqrt{13}}, 6 + \frac{1}{\sqrt{13}})$$

e che la serie non converge per $|x-6| > \frac{1}{\sqrt{13}}$. Per caratterizzare l'insieme di convergenza S dobbiamo dunque studiare il comportamento della serie negli estremi dell'intervallo I. Nel secondo estremo $\bar{x} = 6 + \frac{1}{\sqrt{13}}$, si ha che la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Di contro, nel primo estremo $\underline{x} = 6 - \frac{1}{\sqrt{13}}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge. Dunque risulta che

$$S = (6 - \frac{1}{\sqrt{13}}, 6 + \frac{1}{\sqrt{13}}]$$

2. **Esercizio A2:** Data

$$f(x,y,z) = \sqrt{xyz}\ln(9-(x^2+y^2+z^2)),$$

determinare il dominio D_f di f e calcolarne il volume
Soluzione: Per prima cosa osserviamo che

$$D_f = B_3(0) \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\right\},$$

dove si è indicato con $B_3(0)$ la palla di centro 0 e raggio 3. Cerchiamo ora di capire come è fatto l'insieme

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\right\}.$$

La condizione $xyz \geq 0$ è verificata se $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ oppure $x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0$ oppure $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$ oppure $x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0$. Dunque

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$$

dove

$$\begin{aligned}
P_1 &:= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}, \\
P_2 &:= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0\right\}, \\
P_3 &:= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0\right\}, \\
P_4 &:= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0\right\}.
\end{aligned}$$

Gli assi cartesiani dividono la palla $B_3(0)$ in 8 regioni di egual volume. Gli insiemi P_1, P_2, P_3, P_4 sono 4 di queste regioni. Dunque il volume di D_f risulta

$$Vol(D_f) = \frac{1}{2} Vol(B_3(0)) = \frac{2}{3}\pi 3^3 = 18\pi.$$

3. **Esercizio A3:** Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2xy}{1 + x^2 y}, \frac{x^2}{1 + x^2 y}\right).$$

Determinare il dominio di F e calcolare il lavoro del campo lungo l'arco di circonferenza che unisce i punti $P_0 = (-6, 6)$ e $P_1 = (0, 6)$ (percorso in senso antiorario).
Soluzione: Si vede facilmente che il dominio di F è dato dall'insieme

$$D_F := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x^2 y \neq 0\right\}.$$

In D_F il campo è regolare ed ammette un potenziale U dato da

$$U(x, y) = \ln(1 + x^2 y).$$

Si ha dunque che $L = U(P_1) - U(P_0) = -\ln(217)$.

4. **Esercizio A4:** Dati i punti $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (6, 3)$, determinare una parametrizzazione γ del segmento che li unisce e calcolare

$$\int_\gamma \sin(\sqrt{xy}).$$

Soluzione: Una parametrizzazione per γ è

$$\gamma(t) = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0, 1],$$

da cui $\gamma(t) = (6t, 3t)$ e $|\gamma'| = 3\sqrt{5}$. Abbiamo dunque

$$\int_\gamma \sin(\sqrt{xy}) = 3\sqrt{5} \int_0^1 \sin(\sqrt{18}\, t) \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{5}{2}}(1 - \cos(3\sqrt{2}))$$