Complementi di Analisi Matematica e Statistica - 2/02/17 - Tempo a disposizione: 2h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. [**8 punti**] Dato il campo

$$F(x,y) = (2x\sin y + \frac{1}{2}xy^2, x^2\cos y + \frac{1}{2}x^2 y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

determinare un potenziale per F e calcolare il lavoro di F lungo il cammino $\gamma(t) = (7\cos t, -2\sin t)$ con $t \in [0,\pi]$. $U(x,y) = x^2\sin y + \frac{1}{4}x^2y^2$, $L = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = 0$

A2. [**8 punti**] Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + e^{2n}}{n^4+1}(x-1)^n.$$

determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza S.

$R = e^{-2}$ $S = [1-e^{-2}; 1+e^{-2}]$

A3. [**8 punti**] Si consideri la superficie cartesiana $\Sigma = \text{graf}(g)$, dove

$$g(x,y) = x^2 - y^2, \quad \text{con } (x,y) \in B_{\sqrt{2}}(0) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{2}\right\}$$

Data $f(x,y,z) := \dfrac{z + y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$, calcolare $\displaystyle\int_\Sigma f \mathrm{d}S$.

$\int_\Sigma f\, dS = 2\pi$

A4. [**8 punti**] Si consideri il campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x,y,z) = (x^2, y, 3x).$$

Detta Σ la sfera di raggio 4 e centro $(0,0,0)$ si calcoli

$$\Phi_\Sigma(F) := \int_\Sigma F \cdot \hat{n} \,\mathrm{d}S,$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale uscente a Σ. $B_4(0) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 16\}$

$\Phi_\Sigma(F) = \int_{B_4(0)} \mathrm{div} F \, dV = \int_{B_4(0)} (2x+1)\, dV = \frac{256}{3}\pi$

B1. [6 punti] Date $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(2,1) = (3,2)$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenziabile tale che $\gamma(0) = (2,1)$ e $\gamma'(0) = (8,6)$, si ponga

$$g(t) = f(\gamma(t)).$$

Allora, $g'(0)$ vale $\boxed{\text{A}}$ 22 ■ 36 $\boxed{\text{C}}$ nessuna delle risposte è corretta $\boxed{\text{D}}$ $(3,2)$.

B2. [6 punti] Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ si denoti con R il suo raggio di convergenza.

Si assuma che $R \in (0,+\infty]$ e si denoti con $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ la somma di tale serie, allora

$\boxed{\text{A}}$ si ha che f è continua su $[x_0 - R, x_0 + R]$ $\boxed{\text{B}}$ nessuna delle risposte è corretta $\boxed{\text{C}}$ la serie converge per ogni x tale che $|x - x_0| \geq R$ ■ si ha che f è continua in $(x_0 - R, x_0 + R)$.

B3. [6 punti] Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, v versore di $\mathbb{R}^2$ e $P_0 = (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$ è definita come $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(P_0)}{tv}$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{v\to 0} \frac{f(v) - f(P_0)}{v}$ ■ $\lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(P_0)}{t}$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(v)}{t}$.

B4. [8 punti] Sia A una matrice simmetrica 2×2. Si consideri la forma quadratica

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \text{data da } f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x, \quad x = (x_1, x_2)$$

dobe abbiamo indicato con $\cdot$ il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$. Allora ∇f vale:

$\boxed{\text{A}}$ nessuna delle risposte è corretta $\boxed{\text{B}}$ $2Ax$ $\boxed{\text{C}}$ A ■ Ax.

B5. [6 punti] Date $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Si definisce

$$\Delta f := \text{div}\nabla f = \frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}.$$

Allora, $\Delta(f^2)$ vale

■ $2f\Delta f + 2|\nabla f|^2$ $\boxed{\text{B}}$ $2f\Delta f$ $\boxed{\text{C}}$ $2\Delta f$ $\boxed{\text{D}}$ $(\Delta f)^2$.