Complementi di Analisi Matematica e Statistica 04/07/2016 **- Testo e Soluzioni**

- Parte A

1. **Esercizio A1:** Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n+1}(x-\beta)^n.$$

determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza S.
<u>Soluzione:</u> Per prima cosa poniamo $a_n := \frac{e^{\alpha n}}{n+1}$. Allora si ha

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\alpha(n+1)}}{e^{\alpha n}} \frac{n+1}{n+2} = e^{\alpha}.$$

Dunque, il Teorema (7.4) fornisce che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = e^{-\alpha}$ e che la serie converge nell'intervallo

$$I := (\beta - e^{-\alpha}, \beta + e^{-\alpha}).$$

e che la serie non converge per $|x-\beta| > R$. Per caratterizzare l'insieme di convergenza S dobbiamo dunque studiare il comportamento della serie negli estremi dell'intervallo I. Nel secondo estremo $\bar{x} = \beta + e^{-\alpha}$, si ha che la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

che diverge (serie armonica). Di contro, nel primo estremo $\underline{x} = \beta - e^{-\alpha}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

che converge per il Criterio di Leibniz.

2. **Esercizio A2:** Dato il campo

$$F(x,y) = \Big(15x^2y - 2x, 5x^3 + 3y\Big)$$

se ne determini un eventuale potenziale e se ne calcoli il lavoro lungo il segmento di estremi

$$P_0 = (1,0) \quad \text{e } P_1 = (0,1).$$

<u>Soluzione:</u> Per prima cosa cerchiamo un potenziale U per F, cioè una funzione

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

di classe C^1 tale che $\nabla U = F$. In particolare, si deve avere

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 15x^2y - 2x \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 5x^3 + 3y. \end{cases}$$

Integriamo la prima equazione rispetto ad x. Otteniamo

$$U(x, y) = 5x^3y - x^2 + g(y),$$

dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione della sola y da determinarsi. Per determinare g e dunque U, integriamo rispetto ad y la seconda equazione ottenendo

$$5x^3 + 3y = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 5x^3 + g'(y).$$

Dunque si ha che g deve soddisfare

$$g'(y) = 3y$$

da cui $g(y) = \frac{3}{2}y^2$. Un potenziale per F è dunque

$$U(x, y) = 5x^3y - x^2 + \frac{3}{2}y^2.$$

Abbiamo quindi mostrato che il campo F è conservativo (Definizione 6.5) e dunque il lavoro lungo una curva dipende solo dagli estremi di tale curva. Più precisamente si ha (Lemma 6.1)

$$L = U(P_1) - U(P_0) = \frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2}$$

3. **Esercizio A3:** Data $f(x, y) = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ con $(x, y) \in D_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$, si consideri la superficie $\Sigma = \mathrm{graf}(f)$ ed il campo vettoriale

$$F(x, y) = (-y, x, 3z).$$

Calcolare ν (il versore normale uscente a Σ) e calcolare

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \nu \mathrm{d}S.$$

Soluzione: Osserviamo prima di tutto che la superficie Σ è l'emisfero sud della sfera di centro $(0, 0, R)$ e raggio R. Una parametrizzazione per Σ è data dalla seguente funzione

$$\phi : D_R \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Dunque, il campo dei vettori normali è dato da

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y).$$

Un semplice conto, mostra che

$$\mathbf{v} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Dunque,

$$\mathbf{v}(x,y) = (-\frac{x}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}, -\frac{y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}, 1).$$

Si noti che per costruzione il vettore $\mathbf{v}$ è sempre un vettore che punta verso l'alto. In particolare, per la superficie Σ in esame risulta entrante (suggerimento: provare a calcolare il vettore normale nel punto della sfera-il polo sud-che corrisponde alla scelta $x = y = 0$). Un vettore normale uscente è dunque $-\mathbf{v}$. Per otterenere il versore normale uscente basta dunque calcolare $|-\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$ e considerare $\nu := \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Abbiamo dunque

$$|\mathbf{v}| = \frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}, \quad \text{e} \quad \nu(x,y) := \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \Big(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{f(x,y)-R}{R}\Big).$$

Calcoliamo ora

$$I := \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \nu \mathrm{d}S$$

Strategia 1:
Usiamo il Teorema di Stokes (Teorema 6.10) che fornisce

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \nu \mathrm{d}S = \int_{\partial\Sigma^+} F \cdot \mathbf{T}$$

dove abbiamo indicato con $\partial\Sigma^+$ il bordo di Σ orientato positivamente (con la normale uscente) e con $\mathbf{T}$ il versore tangente a tale bordo. Si ha che $\partial\Sigma^+$ è la circonferenza di centro $(0,0,R)$ che giace interamente nel piano $z = R$ e percorsa in senso orario. Percorrendo cioè il bordo rimanendo sul lato di Σ su cui ν è uscente, si tengono i punti di Σ alla propria sinistra. Indichiamo con $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di $\partial\Sigma^+$ data da

$$\gamma(t) = (R\cos t, -R\sin t, R), \quad t \in [0,2\pi],$$

e quindi $F(\gamma(t)) = (R\sin t, R\cos t, 3R)$. Inoltre abbiamo che $|\gamma'| = R$ e dunque $\mathbf{T}(\gamma(t)) = (-\sin t, -\cos t, 0)$ (con la notazione $\mathbf{T}(\gamma(t))$ si intende il versore tangente alla curva γ, cioè $\partial\Sigma^+$, nel punto $\gamma(t)$). Conseguentemente, si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \mathbf{T}(\gamma(t)) = R\sin t \cdot (-R\sin t) + R\cos t \cdot (-\cos t) = -R.$$

Quindi,

$$\int_{\partial\Sigma^+} F \cdot \mathbf{T} := \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \mathbf{T}(\gamma(t))|\gamma'(t)|\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} R^2 \mathrm{d}t = -2\pi R^2.$$

Strategia 2:
Calcoliamo direttamente l'integrale I. Per prima cosa calcoliamo $\mathrm{rot}F$. Si ha

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = 2\mathbf{e}_3.$$

Dunque, se $(x,y) \in D_R$, si ha $\mathrm{rot}F(x,y) \cdot \nu(x,y) = 2\frac{f(x,y)-R}{R}$. Di conseguenza, l'integrale diventa (vedi Definizione di integrale su superficie)

$$I = \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \nu \mathrm{d}S = \int_{D_R} 2\frac{f(x,y)-R}{R}\Big|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\Big|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_{D_R} -\frac{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2 \times \mathrm{Area}(D_R) \times R = -2\pi R^2.$$

4.

- **Esercizio A4:** Dato il campo $F(x,y,z) := a(x^3, y^3, z^3)$, si consideri il dominio di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : b \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq c\right\}.$$

Calcolare il flusso di F uscente da $\partial\Omega$.
<u>Soluzione:</u> Il dominio Ω è una sfera cava di raggio $\sqrt{c}$. Il raggio della cavità sferica è $\sqrt{b}$. Tale Ω soddisfa le ipotesi del Teorema della Divergenza che fornisce

$$\int_\Sigma F \cdot \nu \mathrm{d}S = \int\int\int_\Omega \mathrm{div} F(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

Calcoliamo dunque $\mathrm{div} F = 3a(x^2 + y^2 + z^2)$ che in coordinate sferiche diventa $\mathrm{div} F = 3a\rho^2$ con $\rho \in [\sqrt{b}, \sqrt{c}]$. Abbiamo dunque, usando le coordinate sferiche (pag. 205) ed il relativo cambiamento di variabile negli integrali multipli (Teorema 5.11)

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta, \qquad \text{con } \rho \in [\sqrt{b}, \sqrt{c}], \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi), \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$\int\int\int_\Omega \mathrm{div} F(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 3a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{c}} \rho^4 \sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta = \frac{12}{5} a\pi \Big((\sqrt{c})^5 - (\sqrt{b})^5 \Big).$$

- Parte B

- **Esercizio B1:** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 2\right),$$

Allora il dominio D di f è:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y \in (0, \frac{1}{4}x^2)\right\}$$

<u>Soluzione:</u> Per rendersi conto che la soluzione proposta è quella giusta è sufficiente risolvere la disequazione

$$\frac{x}{\sqrt{y}} - 2 > 0.$$

Prima di tutto, notiamo che dev'essere sicuramente $y > 0$ per dar senso alla radice e per dar senso alla frazione. Poi, abbiamo che dev'essere

$$x > 2\sqrt{y}$$

e dunque pure x risulta strettamente positivo. Infine, visto che entrambi i membri della disequazione qui sopra sono positivi, possiamo elevare al quadrato ed ottenere

$$x^2 > 4y,$$

da cui l'ultima condizione $y < \frac{x^2}{4}$.

- **Esercizio B2:** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(2,1) = (3,2)$. Allora, posto $\nu = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, si ha
$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(2,1) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$
Soluzione: Essendo f differenziabile, il Teorema 3.9 fornisce
$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \nu.$$
Dunque il risultato segue con la scelta $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

- **Esercizio B3:** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Dati un punto $\bar{P} \in \mathbb{R}^2$ ed un versore $\nu \in \mathbb{R}^2$ si consideri una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(0) = \bar{P}$ e $\gamma'(0) = \nu$. Allora
$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))_{|t=0}$$
vale
$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(\bar{P})$$
Soluzione: Il Teorema di differenziabilità della funzione composta (in questo caso $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$) fornisce
$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$
Dunque, se $t = 0$, otteniamo (ricordare anche il Teorema 3.9)
$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))_{|t=0} = \frac{\partial f}{\partial \nu}(\bar{P}).$$

- **Esercizio B4:**

  Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 si definisce $\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f)$. Allora si ha
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$
Soluzione: Evidente. Basta fare il calcolo.

- **Esercizio B5:** Si consideri
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \quad \text{o } y = 0 \\ x + y & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Allora detto $\nu = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, si ha
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \nu} = \sqrt{2}.$$
Soluzione: Calcoliamo la derivata direzionale di f direttamente usando la definizione (Definizione 3.15). Visto che $f(0,0) = 0$, si ha
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \nu} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h\frac{\sqrt{2}}{2}, h\frac{\sqrt{2}}{2})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\frac{\sqrt{2}}{2} + h\frac{\sqrt{2}}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\sqrt{2}}{h} = \sqrt{2}.$$