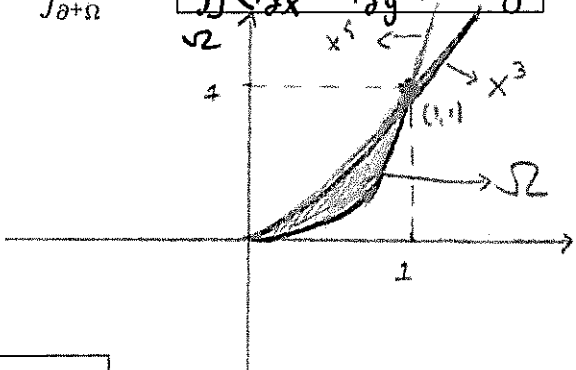
Complementi di Analisi Matematica e Statistica - 3/07/17 - Tempo a disposizione: 2h
Matricola Cognome e Nome

A1. [8 punti]
Dati $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ e la funzione $f(x,y) := \cos(x^2+y^2)$, calcolare $\int\int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $\boxed{(\pi/4)\sin 4}$

A2. [8 punti] Dati $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^4 \leq y \leq x^3\}$ ed il campo $F(x,y) = (2y, 3x)$. Disegnare Ω $\boxed{}$ e calcolare rot$F$ $\boxed{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{e}_3 = \hat{e}_3}$

Detto $\partial^+\Omega$ il bordo di Ω percorso in senso antiorario, calcolare $\oint_{\partial^+\Omega} F \cdot \mathrm{d}s$ $\boxed{= \iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy}$ $\overset{*}{=}$
SUGG: Può essere utile ricordare la formula di Gauss-Green.

$$\overset{*}{=} \text{Area}(\Omega) = \int_0^1 \left(\int_{x^4}^{x^3} dy\right) dx = \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = \frac{1}{20}$$

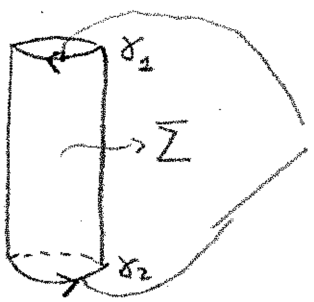


A3. [8 punti] Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2n}}{n^2}(x-2)^n.$$

Determinare il raggio di convergenza R $\boxed{R = e^2}$ e l'insieme di convergenza S $\boxed{S = [2-e^2, 2+e^2]}$

A4. [8 punti]
Sia Σ la superficie laterale del cilindro descritto dalle relazioni $x^2+y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Si consideri il campo vettoriale $F(x,y,z) = (-xy, y^2, z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Detto $\hat{\nu}$ il versore normale uscente a Σ, disegnare Σ ed indicare chiaramente $\partial^+\Sigma$. Scrivere una parametrizzazione di $\partial^+\Sigma$ $\boxed{}$ e calcolare inoltre il flusso (uscente) di rot$F$. $\boxed{= \int_\Sigma \langle \text{rot}F, \hat{\nu} \rangle dS \overset{*}{=}}$



$\partial^+\Sigma$

$\gamma_1(t) = (2\cos t, -2\sin t, 3)$ $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_2(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\overset{*}{=} \int_{\partial^+\Sigma} F \cdot dS = 0$$

B1. [8 punti] Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con $x \in I$ ($I=$ insieme di convergenza). Allora:

$\boxed{A}$ $I = (-1, 1]$ ■ Detta S la somma della serie, si ha che per $x \in (-1, 1)$ S è derivabile e che $S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. $\boxed{C}$ $I = (0, 1)$ $\boxed{D}$ $I = [-1, 1)$.

B2. [8 punti totali] Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 2,\ \ 2 \leq y < 3\}$. Indicare

La parte interna di Ω $\boxed{\mathring{\Omega} = \{(x,y) : 1 < x < 2,\ 2 < y < 3\}}$ [2 punti]

La frontiera di Ω ~~[illegible]~~ [2 punti]

La chiusura di Ω $\boxed{\bar{\Omega} = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3\}}$ [2 punti] $= [1,2] \times [2,3]$

Il complementare di Ω $\boxed{= \{(x,y) : x \leq 1 \text{ o } x > 2\ , y < 2 \text{ o } y \geq 3\}}$ [2 punti]

B3. [8 punti] Data $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenziabile, $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ e $\hat{v}$ un versore di $\mathbb{R}^d$, si consideri la curva regolare $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ tale che $\gamma(0) = \bar{x}$, $\gamma'(0) = \hat{v}$. Allora $\frac{d}{dt}_{|t=0} f(\gamma(t))$ vale $\boxed{A}$ $\langle \nabla f(\hat{v}), \bar{x} \rangle$

■ $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \hat{v}}$ $\boxed{C}$ $\hat{v}$ $\boxed{D}$ $\nabla f(\bar{x})$.

B4. [8 punti] Dati $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \leq \frac{1}{x^2}\right\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, si ha che

$\boxed{A}$ $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ è chiuso ■ $(1, 0) \in \Omega \cap B$ $\boxed{C}$ Ω è limitato $\boxed{D}$ Ω è aperto.

$\partial\Omega = \{1\} \times [2,3] \cup \{2\} \times [2,3] \cup [1,2] \times \{2\} \cup [1,2] \times \{3\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1 \text{ o } x > 2\ ,\ y < 2 \text{ o } y \geq 3\}$