**Complementi di Analisi Matematica e Statistica - 18/07/17 - Tempo a disposizione: 2h**
**Matricola** **Cognome e Nome**

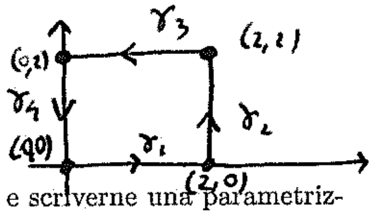
**A1. [8 punti]** Dato $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2\}$, sia $\Sigma = \mathrm{graf}(g)$, dove $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è definita da $g(x,y) = 1 - \dfrac{x^2+y^2}{2}$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + z + \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

calcolare $\int_\Sigma f \mathrm{d}S$. $\boxed{\pi(\cos 1 - \cos 2) + \frac{2\pi}{3}}(3^{3/2} - 2^{3/2})$

**A2. [8 punti]** Sia $\gamma$ la curva che costituisce la frontiera dell'insieme

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 2,\ 0 \le y < 2\}$$




percorsa in senso antiorario a partire dal punto $P = (0,0)$. Disegnare $\gamma$ e scriverne una parametrizzazione $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxx}}$.

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x$, calcolare $\int_\gamma f \mathrm{d}s$ (integrale curvilineo di prima specie). $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$.

$\gamma_1(t) = (2t, 0), \quad t \in [0,1]$
$\gamma_2(t) = (2, 2t), \quad t \in [0,1]$
$\gamma_3(t) = (2-2t, 0), \quad t \in [0,1]$
$\gamma_4(t) = (0, 2-2t), \quad t \in [0,1]$

$$\int_\gamma f ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f ds = 4$$

**A3. [8 punti]** Si consideri la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2n}}{e^{2n}+n}(x-2)^n.$$

Determinare il raggio di convergenza $R$ $\boxed{e^4}$ e l'insieme di convergenza $S$ $\boxed{(2-e^4, 2+e^4)}$

**A4. [8 punti]**

Sia $\Sigma$ la superficie rappresentata in coordinate sferiche da

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2\sin\phi\cos\theta,\ y = 2\sin\phi\sin\theta,\ z = 2\cos\phi,\ \phi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,\pi]\}.$$

Dato il campo $F(x,y,z) = (2x, xy, z)$ calcolare il flusso (uscente) di $F$ attraverso $\Sigma$ specificando i passaggi salienti. $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$

$\Sigma$ è una calotta sferica con disco di base centrato in $(0,0,0)$, raggio 2 e contenuto nel piano $y=0$. Sia $D$ tale disco.
Si consideri il volume $V$ ~~il cui bordo è dato da~~
$\partial V = \Sigma \cup D$. Il teorema della divergenza fornisce

$$\Phi(F, \partial V) = \iiint_V \mathrm{div} F \, dx dy dz = \Phi(F, D) + \Phi(F, \Sigma)$$

$$\Rightarrow \Phi(F, \Sigma) = 16\pi$$

**B1. [8 punti]** Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ con $x \in I$ ($I$= insieme di convergenza). Allora:

$\boxed{A}$ La serie converge solo se $I = (0,1)$ $\boxed{B}$ Detta $S$ la (funzione) somma della serie, si ha che $S(1/2) = e^{1/2} - 1$ $\boxed{C}$ La serie converge solo se $I = [-1,1]$ $\blacksquare$ La serie converge per ogni $r > 0$ in intervalli del tipo $[-r, r]$.

**B2. [8 punti]** Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Allora,

$\boxed{A}$ Se $f$ è anche di classe $C^2$ e la matrice Hessiana di $f$ è definita positiva in $\bar{x}$, si ha che $\bar{x}$ è punto di massimo $\blacksquare$ Se $f$ è anche di classe $C^2$, detto $\lambda$ un autovalore dell'Hessiana di $f$ in $\bar{x}$ e $\hat{v}$ la direzione del corrispondente autovettore, si ha $\lambda = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial \hat{v}^2}$ $\boxed{C}$ Esistono $x_m$ e $x_M$ in $\Omega$ punti di minimo e di massimo, rispettivamente $\boxed{D}$ Se $f$ è anche di classe $C^2$ e la matrice Hessiana di $f$ è definita positiva in $\bar{x}$, si ha che $\bar{x}$ è punto di minimo.

**B3. [8 punti]** Dati $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y \leq e^{-x^2}\right\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$, allora

$\boxed{A}$ $\Omega$ è aperto $\boxed{B}$ Esiste $(x,y) \in \Omega \cup B$ con $y < 0$ $\blacksquare$ Per ogni $(x,y) \in \Omega \cup B$ si ha che $y > 0$ $\boxed{D}$ $\Omega$ è limitato.

**B4. [8 punti totali]** Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1 \ \text{ o } \ x > 1, \ \ y \geq \sqrt{1-x^2}\right\}$. Determinare

La parte interna di $\Omega$ [ ] **[2 punti]**

La frontiera di $\Omega$ [ ] **[2 punti]**

La chiusura di $\Omega$ [ ] **[2 punti]**

Il complementare di $\Omega$ [ ] **[2 punti]**

Si osservi che $\Omega$ risulta essere l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x=-1, \ y>0\}.$$

Ciò detto si ha

$$\mathring{\Omega} = \emptyset$$

$$\partial\Omega = \Omega$$

$$\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x=-1, \ y \geq 0\}$$

---

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x=-1, \ y \in (-\infty,+\infty)\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x=-1, \ y \leq 0\}$$