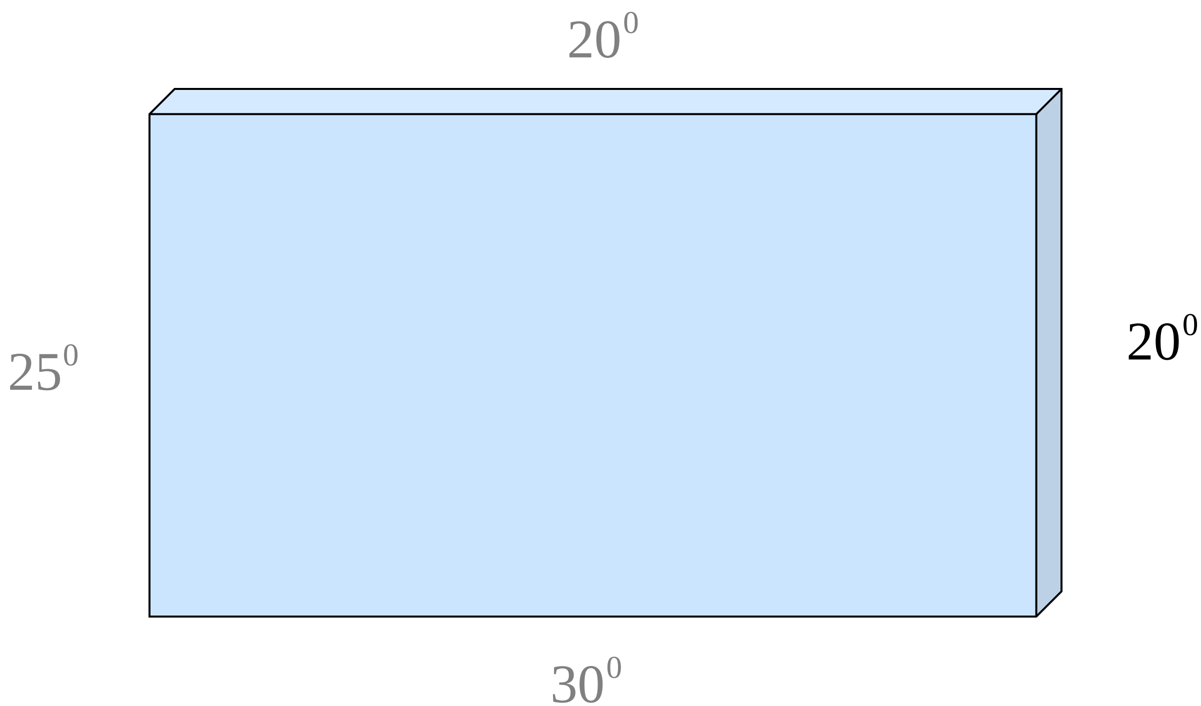
Stage didattico 2012

Lucia Della Croce - Giulia Maggi - Ada Pulvirenti

MODELLIZZAZIONE E APPROSSIMAZIONE

DI UN PROBLEMA REALE

Consideriamo la sezione di una lunga diga rettangolare costruita su un fiume.
Come si puo' facilmente immaginare, i contorni della diga sono soggetti a tre fattori:
la temperatura dell'aria, la temperatura dell'acqua e la temperatura del sottosuolo alla sua base.



In gradi Celsius

Un problema reale nell'ambito dell'ingegneria, consiste nel conoscere la distribuzione della temperatura all'interno della diga in un certo specifico periodo temporale, in modo da poter determinare gli sforzi termici a cui la diga e' soggetta.

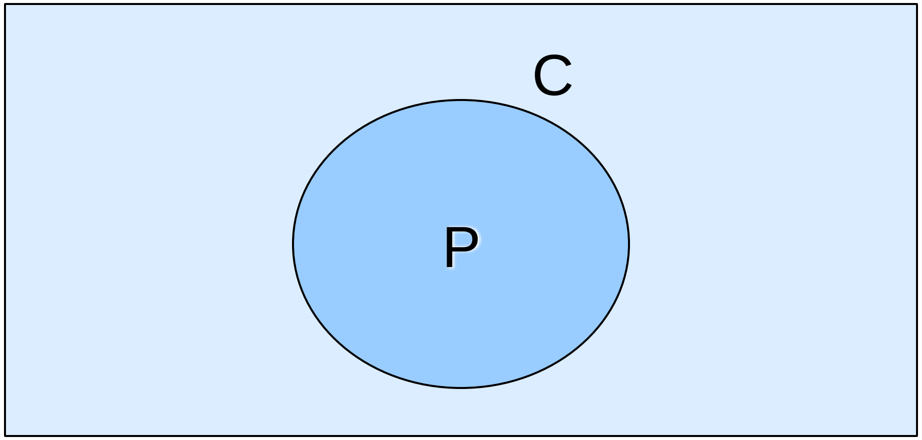
Supponendo che la temperatura ai bordi della diga rimanga costante durante il periodo di tempo considerato, si puo' pensare che la temperatura all'interno della diga raggiunga uno stato di equilibrio dopo un certo intervallo di tempo.

Sarebbe molto interessante riuscire a misurare la distribuzione di questo equilibrio termico in differenti punti della diga, ma ovviamente cio' e' estremamente difficile.

Il problema puo' essere affrontato in questo modo:

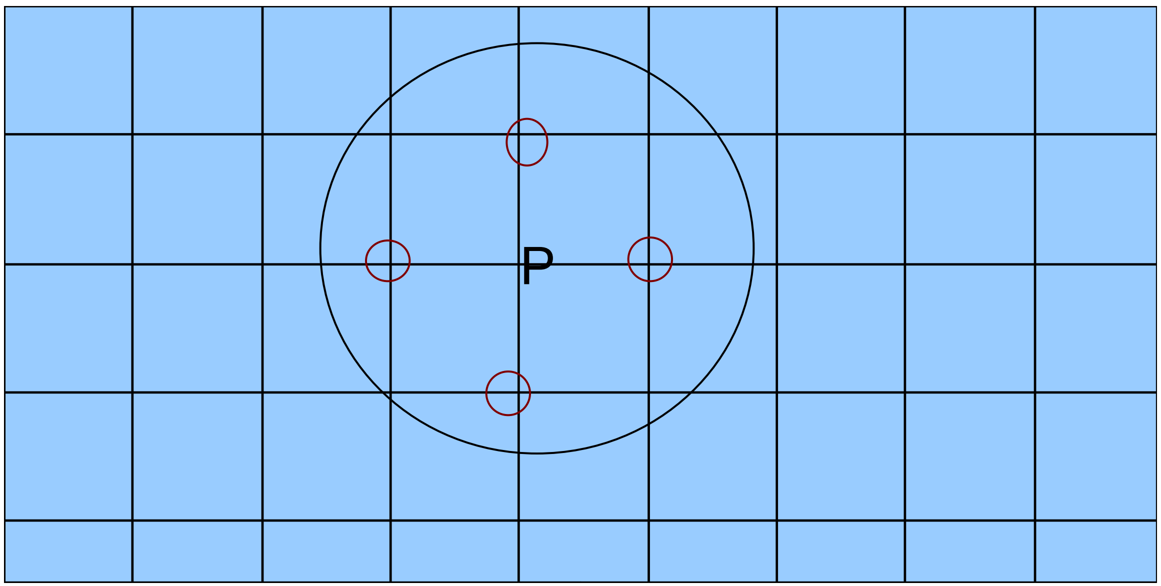
Si considera un insieme di punti della piastra e si approssima la temperatura in questi punti, basandosi su un'importante proprieta' fisica, chiamata proprieta' del valor medio.

Se la piastra ha raggiunto un equilibrio termico, considerato un punto P interno alla piastra e un cerchio C centrato in P, interamente contenuto nella piastra, allora la temperatura in P e' il valor medio della funzione temperatura in C.

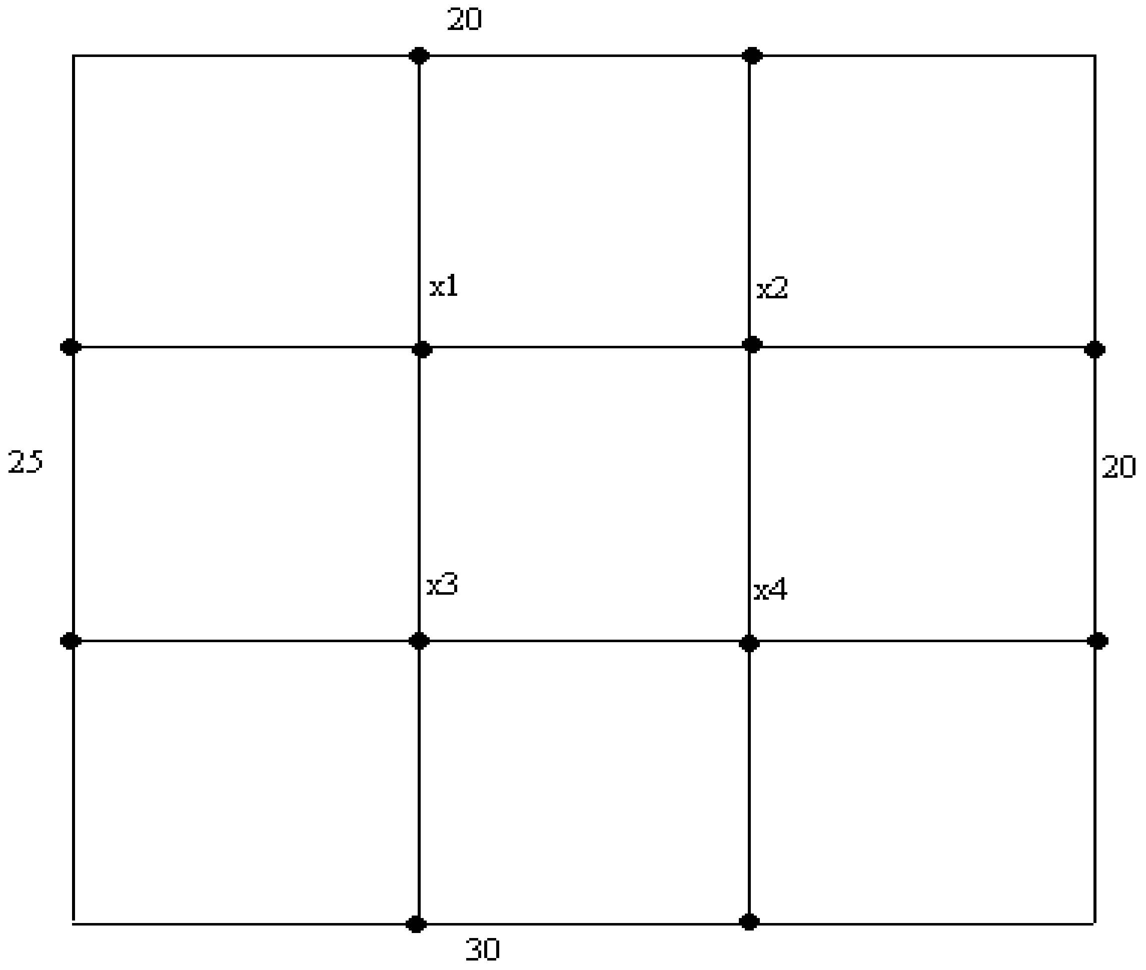


Introduciamo una griglia e consideriamo la versione approssimata della regola precedente;

Se la piastra ha raggiunto un equilibrio termico e P e' un punto della griglia che non giace sulla frontiera della piastra, allora la temperatura in P e' la media delle temperature nei quattro punti della griglia piu' vicini a P.



Iniziamo con una griglia con 4 punti interni



$$x_1 = \frac{20 + 25 + x_2 + x_3}{4}$$

$$x_2 = \frac{20 + 20 + x_1 + x_4}{4}$$

$$x_3 = \frac{25 + 30 + x_1 + x_4}{4}$$

$$x_4 = \frac{20 + 30 + x_2 + x_3}{4}$$

$$
\begin{cases}
4x_1 - x_2 - x_3 = 45 \\
-x_1 + 4x_2 - x_4 = 40 \\
-x_1 + 4x_3 - x_4 = 55 \\
-x_2 - x_3 + 4x_4 = 50
\end{cases}
$$

In forma matriciale $\quad AX = b$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 45 \\ 40 \\ 55 \\ 50 \end{bmatrix}}_{b}
$$

Risolviamo con l’ aiuto di MATLAB il sistrema

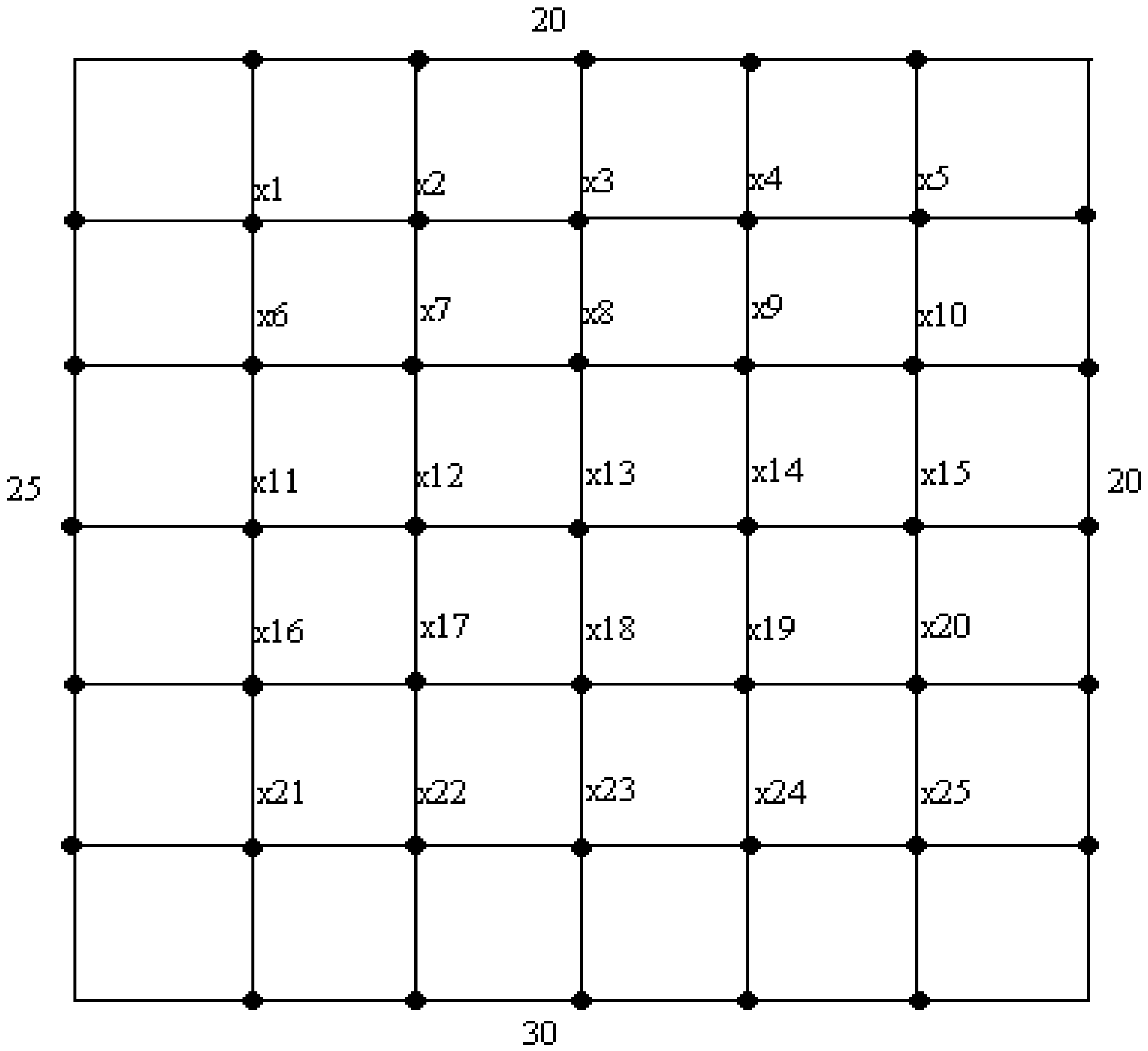
$$X = \begin{bmatrix} 23.125 \\ 21.875 \\ 25.625 \\ 24.375 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che le " *condizioni al contorno cambino* ", cioè che la temperatura al bordo della diga subisca la seguente variazione:

$$\begin{bmatrix} 35 \\ 20 \\ 35 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Come cambia la distribuzione della temperatura nei punti interni ?

Le approssimazioni della temperatura di equilibrio possono essere rese piu' accurate se si considera una griglia piu' fine, cioe' con un numero maggiore di punti interni



La nuova griglia possiede 25 punti interni.
Ripetiamo il processo come nel caso di 4 punti e otteniamo un sistema con matrice 25X25

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
$$

Termine noto

$$b^T =$$

$$\lfloor 45\ 20\ 20\ 20\ 40\ 25\ 0\ 0\ 0\ 20\ 25\ 0\ 0\ 0\ 20\ 25\ 0\ 0\ 0\ 20\ 55\ 30\ 30\ 30\ 50 \rfloor$$

Risoluzione del problema in Matlab

```
%    Problema della diga con una reticolazione 25 X 25

  d0=4*ones(25,25);
  d1=-ones(24,24);

  d11=diag(diag(d1),1);

  d12=diag(diag(d1),-1);
  Mat=d0+d11+d12;
  d5=-ones(20,20);
  d15=diag(diag(d5),5);
  d16=diag(diag(d5),-5);
  Mat = Mat +d15+d16;
  %
  %  Occorre correggere i coefficienti relativi ai nodi che sono
vicino
  %   alla frontiera
for i=5:5:20
   Mat(i,i+1)=0.;
   Mat(i+1,i)=0.;
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%          OPPURE:


     Mat(5,6) = 0;
     Mat(6,5) = 0;
     Mat(10,11)=0;
    Mat(11,10) = 0;  etc...
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

B=[45 20 20 20 40 25 0 0 0 20 25 0 0 0 20 25 0 0 0 20 55 30 30 30 50]'

%     Soluzione del sistema;

x=Mat\bx
```

S O L U Z I O N E

22.6566
21.7623
21.2865
20.8936
20.4697
23.8640
23.1061
22.4902
21.8182
20.9852
24.6933
24.3078
23.7500
22.9037
21.6529
25.6014
25.6818
25.2983
24.3939
22.7226
27.0303
27.5199
27.3673
26.6512
24.8434