La vera forma della Groenlandia. Ovvero perché le mappe geografiche distorcono le forme.

Francesco Bonsante

June 16, 2015

Cos'è una piantina geografica?

- Una piantina geografica dovrebbe riprodurre *scala* in modo preciso la geografia della terra o di una parte di essa.
- Idealmente se la scala è $1 : 100.000$ ogni centimetro sulla piantina dovrebbe corrispondere esattamente a $100.000cm = 1km$ nel mondo reale.
- ▸ È possibile costruire piantine precise?

Cos'è una piantina geografica?

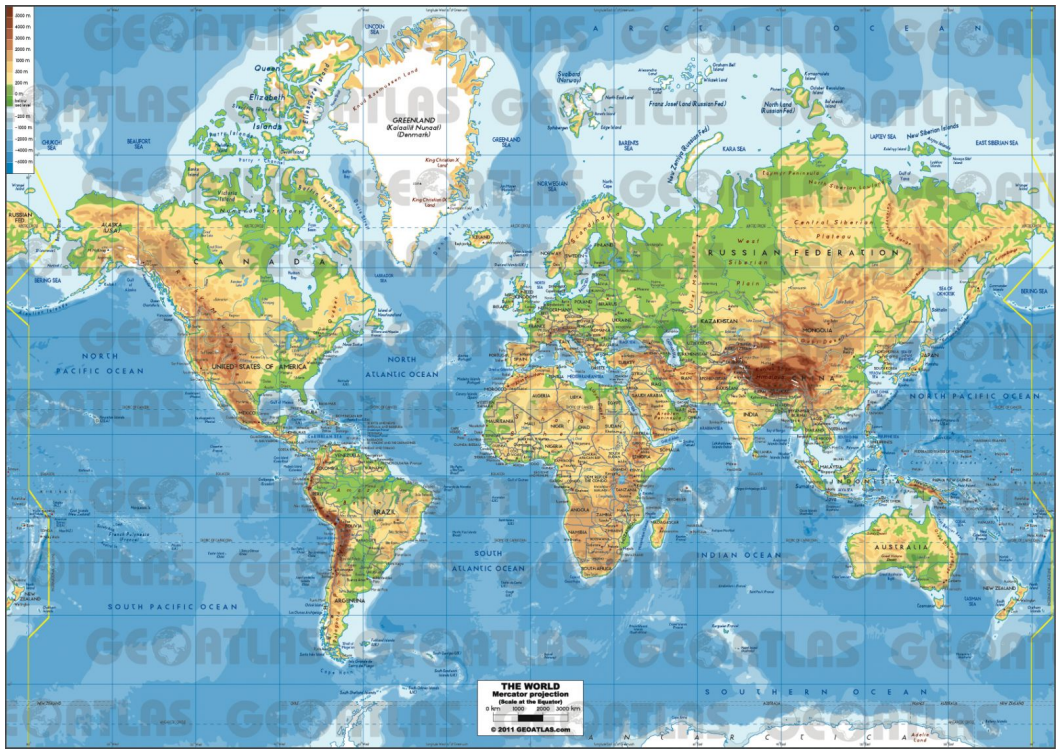
- Una piantina geografica dovrebbe riprodurre *scala* in modo preciso la geografia della terra o di una parte di essa.
- Idealmente se la scala è $1 : 100.000$ ogni centimetro sulla piantina dovrebbe corrispondere esattamente a $100.000cm = 1km$ nel mondo reale.
- ▸ È possibile costruire piantine precise?

Cos'è una piantina geografica?

- Una piantina geografica dovrebbe riprodurre *scala* in modo preciso la geografia della terra o di una parte di essa.
- Idealmente se la scala è $1 : 100.000$ ogni centimetro sulla piantina dovrebbe corrispondere esattamente a $100.000cm = 1km$ nel mondo reale.
- ▸ È possibile costruire piantine precise?

Esempi di piantine

La piantina di Mercatore:



Esempi di piantine

La piantina di Peters:

Chi ha ragione?

NESSUNO DEI DUE!

- La piantina di Mercatore preserva gli angoli ma distorce le aree e le lunghezze.
- La piantina di Peters ha la proprietà di riprodurre fedelmente le aree ma di distorcere gli angoli e le lunghezze.

È possibile costruire una cartina geografica precisa?

NO È MATEMATICAMENTE IMPOSSIBILE

La ragione è che la terra è curva e dunque non è possibile *schiacciarla* su un foglio di carta (piano) senza deformare le forme.

Scopo del seminario

Introdurre la nozione di curvatura di una superficie e mostrare come la non sviluppabilità della sfera è una manifestazione del fatto che la curvatura è non nulla.

Il caso della cilindro

Intuitivamente il fatto che la terra è curva corrisponde al fatto che non sia contenuta su una porzione di piano.

ATTENZIONE: se la terra fosse cilindrica potremmo realizzare delle piantine precise....eppure neanche il ciclindro è contenuto in un piano.....

La curvatura può essere zero anche per superfici che non siano piane.

Il caso della cilindro

Intuitivamente il fatto che la terra è curva corrisponde al fatto che non sia contenuta su una porzione di piano.
ATTENZIONE: se la terra fosse cilindrica potremmo realizzare delle piantine precise....eppure neanche il ciclindro è contenuto in un piano.....
La curvatura può essere zero anche per superfici che non siano piane.

Il caso della cilindro

Intuitivamente il fatto che la terra è curva corrisponde al fatto che non sia contenuta su una porzione di piano.
ATTENZIONE: se la terra fosse cilindrica potremmo realizzare delle piantine precise....eppure neanche il ciclindro è contenuto in un piano.....
La curvatura può essere zero anche per superfici che non siano piane.

La lunghezza di una circonferenza su un piano

Indico con $C_r(p)$ il luogo dei punti che distano esattamente r da p.

- Tale luogo descrive una circonferenza centrata in p di raggio r.
- La sua lunghezza è esattamente $2\pi r$.
- Più r è grande più $C_r(p)$ è lunga.

La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

Fissiamo ora p un punto sulla sfera di raggio R_T e indichiamo con $\Gamma_r(p)$ il luogo dei punti sulla sfera che distano da p esattamente r (dove la distanza è misurata sulla sfera!).

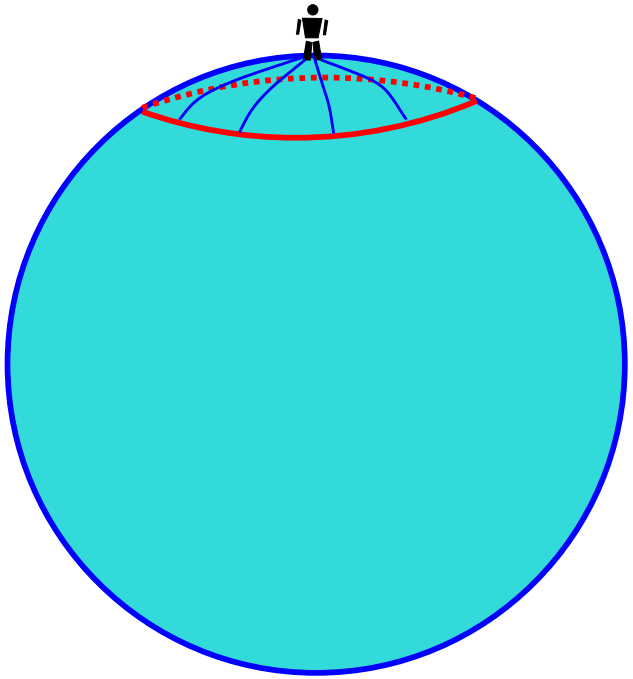


Figure : Caso $r < (\pi/2)R_T$.

La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

Fissiamo ora p un punto sulla sfera di raggio R_T e indichiamo con $\Gamma_r(p)$ il luogo dei punti sulla sfera che distano da p esattamente r (dove la distanza è misurata sulla sfera!).

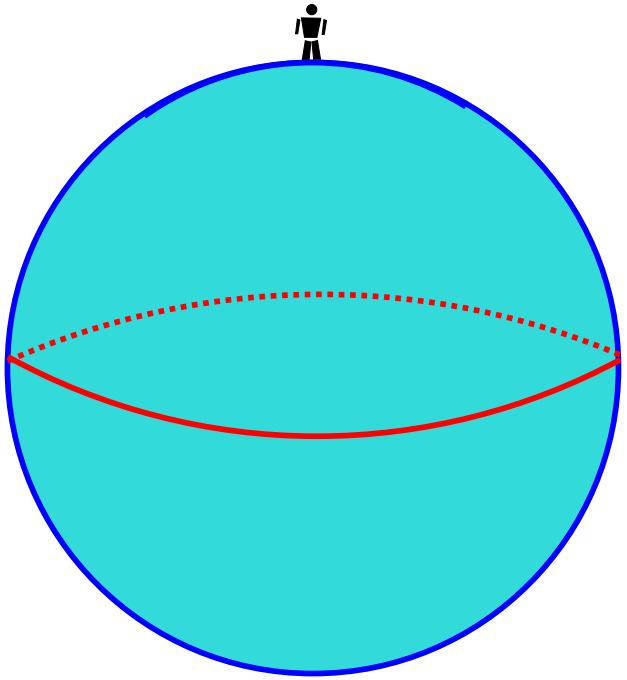


Figure : Caso $r = (\pi/2)R_T$.

La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

Fissiamo ora p un punto sulla sfera di raggio R_T e indichiamo con $\Gamma_r(p)$ il luogo dei punti sulla sfera che distano da p esattamente r (dove la distanza è misurata sulla sfera!).

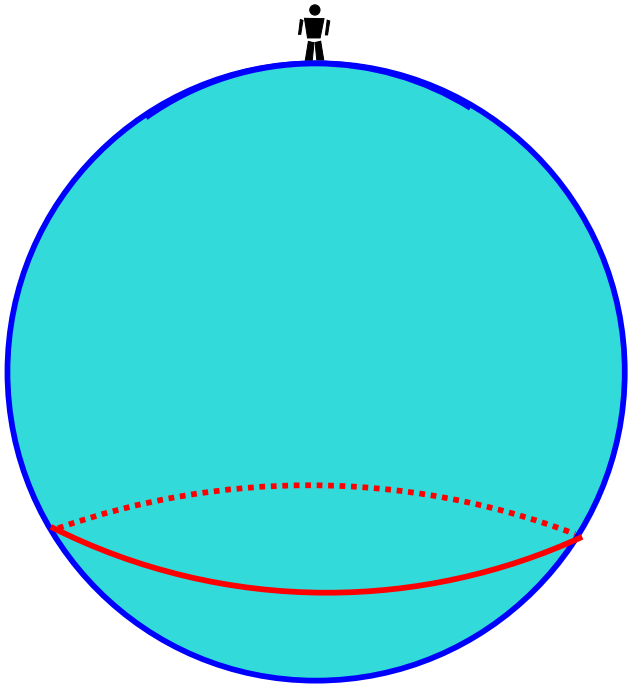


Figure : Caso $r > (\pi/2)R_T$.

La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

Fissiamo ora p un punto sulla sfera di raggio R_T e indichiamo con $\Gamma_r(p)$ il luogo dei punti sulla sfera che distano da p esattamente r (dove la distanza è misurata sulla sfera!).

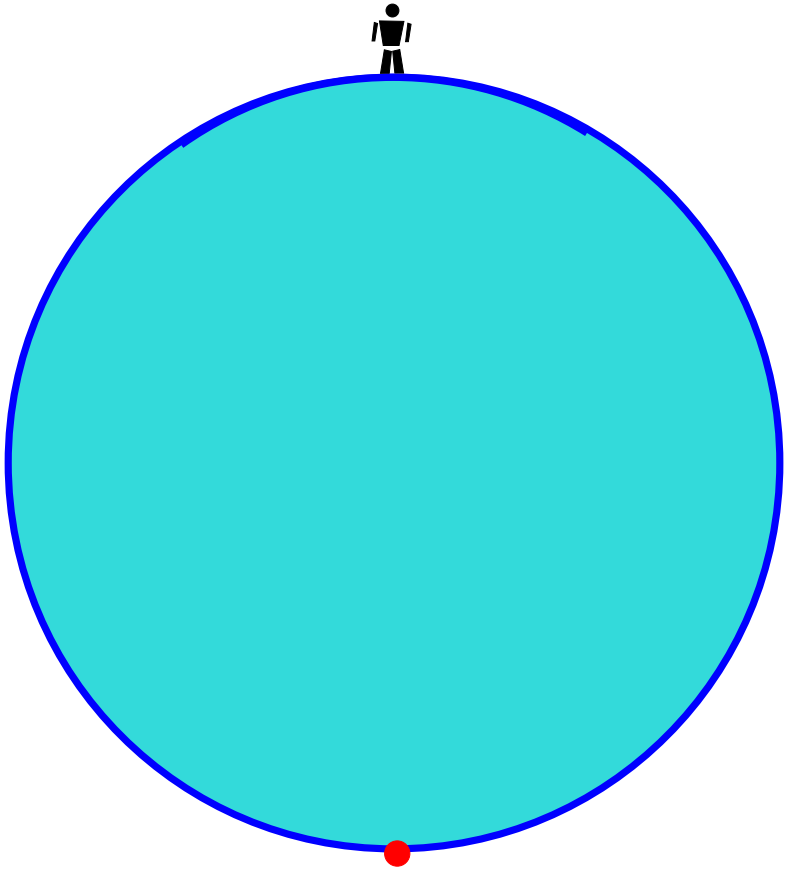


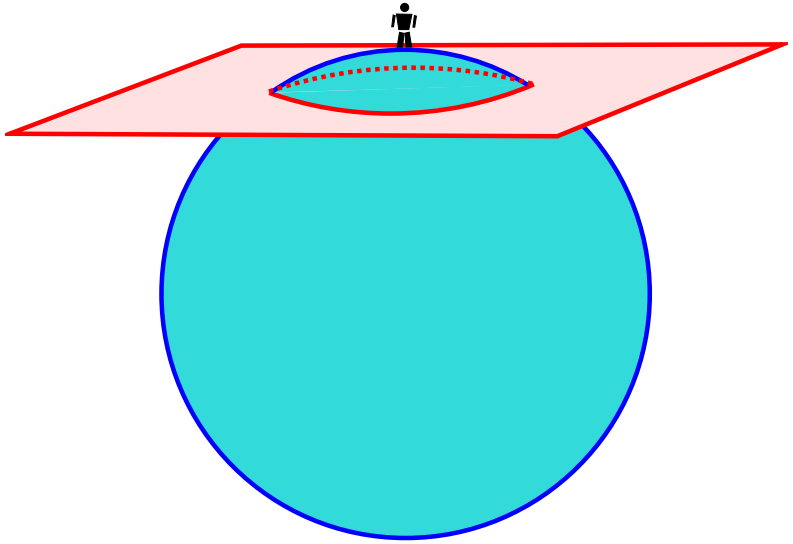
Figure : Caso $r = \pi R_T$.

La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

Il comportamento di $\Gamma_r(p)$ è molto diverso da quello di $C_r(p)$ soprattutto quando r è grande!
Ma come si calcola la lunghezza di $\Gamma_r(p)$?

La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

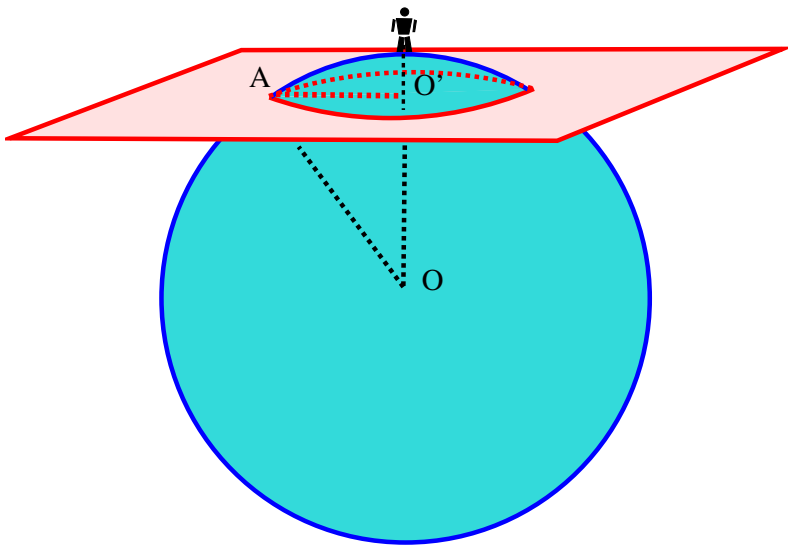
Osserviamo che $\Gamma_r(p)$ giace su un piano *parallelo* all'equatore.



La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

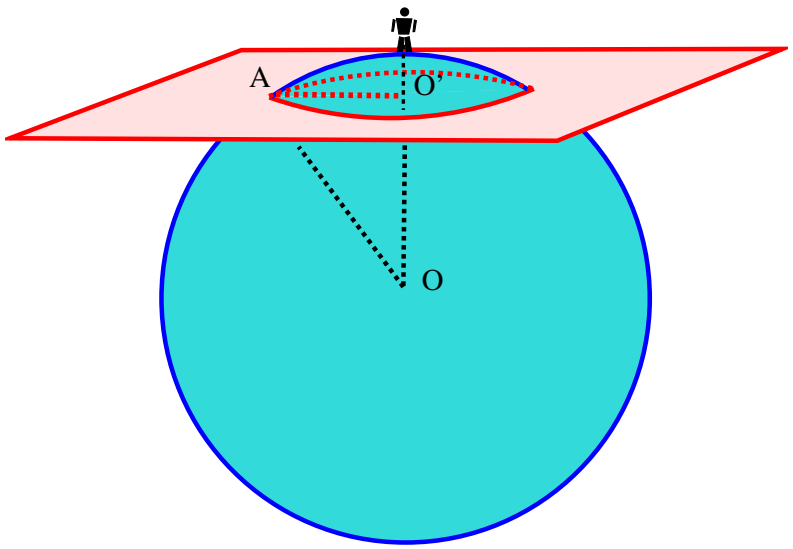
In particolare su tale piano $\Gamma_r(p)$ è una circonferenza centrata in O' di raggio $s = R_T \sin(r/R_T)$

Dunque si ha che la lunghezza di $\Gamma_r(p)$ è $2\pi s = 2\pi R_T \sin(r/R_T) < 2\pi r$.

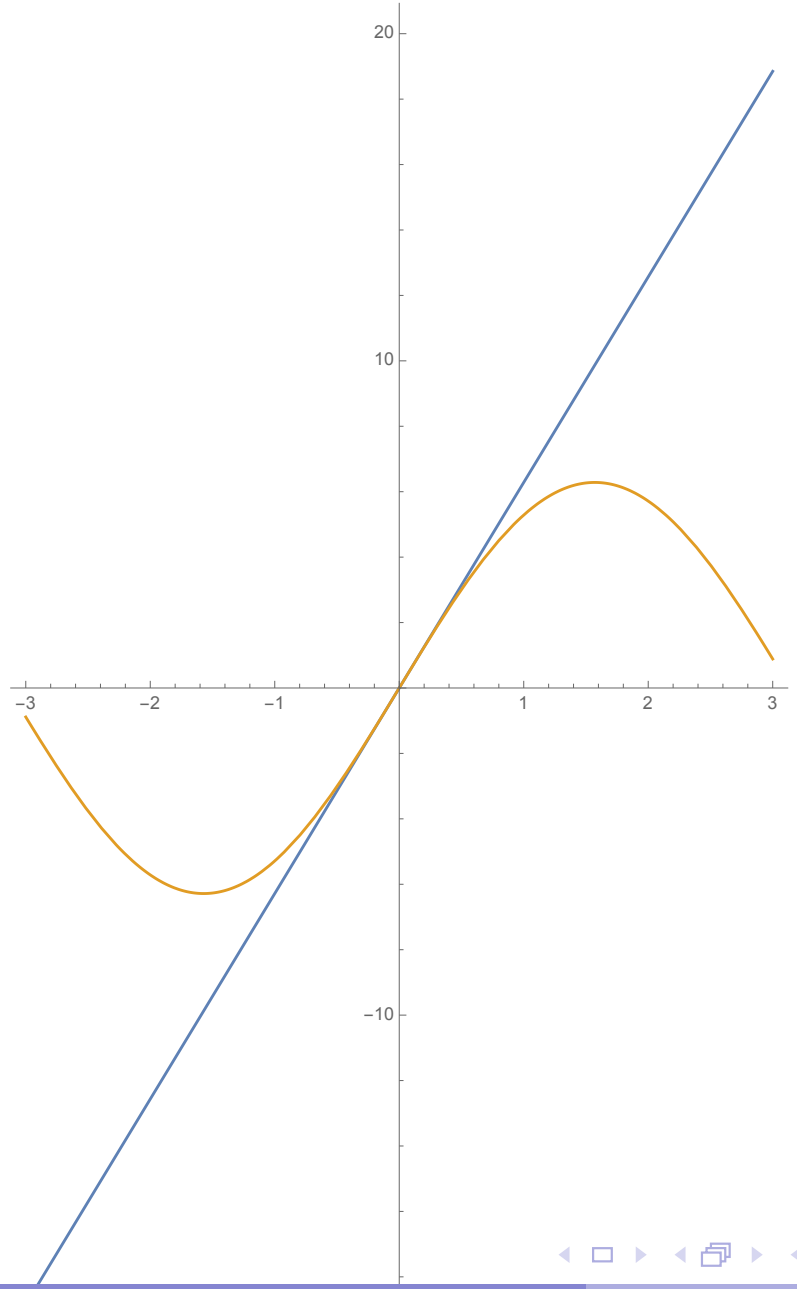


La lunghezza di una circonferenza sulla sfera

In particolare su tale piano $\Gamma_r(p)$ è una circonferenza centrata in O' di raggio $s = R_T \sin(r/R_T)$
Dunque si ha che la lunghezza di $\Gamma_r(p)$ è
$2\pi s = 2\pi R_T \sin(r/R_T) < 2\pi r$.



Un confronto



Perché non si possono costruire piantine precise

- Sia p un punto sulla sfera e supponiamo di poter costruire una piantina precisa di una zona intorno a p con fattore di scala k.
- Indichiamo con $\bar{p}$ il corrispettivo punto sulla piantina. Allora il luogo $\Gamma_r(p)$ è rappresentato sulla piantina dalla circonferenza C di raggio kr centrata in $\bar{p}$.
- La lunghezza di $\Gamma_r(p)$ è minore di $2\pi r$, mentre la lunghezza di C sulla cartina è precisamente $2\pi kr$. Dunque $\mathrm{lungh}(C) > k\,\mathrm{lungh}(\Gamma_r(p))$.

Perché non si possono costruire piantine precise

- Sia p un punto sulla sfera e supponiamo di poter costruire una piantina precisa di una zona intorno a p con fattore di scala k.
- Indichiamo con $\bar{p}$ il corrispettivo punto sulla piantina. Allora il luogo $\Gamma_r(p)$ è rappresentato sulla piantina dalla circonferenza C di raggio kr centrata in $\bar{p}$.
- La lunghezza di $\Gamma_r(p)$ è minore di $2\pi r$, mentre la lunghezza di C sulla cartina è precisamente $2\pi kr$. Dunque $\mathrm{lungh}(C) > k\,\mathrm{lungh}(\Gamma_r(p))$.

Perché non si possono costruire piantine precise

- Sia p un punto sulla sfera e supponiamo di poter costruire una piantina precisa di una zona intorno a p con fattore di scala k.
- Indichiamo con $\bar{p}$ il corrispettivo punto sulla piantina. Allora il luogo $\Gamma_r(p)$ è rappresentato sulla piantina dalla circonferenza C di raggio kr centrata in $\bar{p}$.
- La lunghezza di $\Gamma_r(p)$ è minore di $2\pi r$, mentre la lunghezza di C sulla cartina è precisamente $2\pi kr$. Dunque $\mathrm{lungh}(C) > k\,\mathrm{lungh}(\Gamma_r(p))$.

Un'osservazione

- Se la terra fosse perfettamente rotonda e avendo a disposizione strumenti estremamente precisi, uno potrebbe misurare il raggio della terra guardando semplicemente quanto la lunghezza di una circonferenza sulla terra di raggio r ARBITRARIO si scosta da $2\pi r$
- Fissando ad esempio $r = 1km$ Matematicamente ciò equivale a risolvere l'equazione $R_T \sin(1/R_T) = \mathrm{lungh}\Gamma_1(p)$
- In realtà per $r = 1km$ la differenza tra la lunghezza di $\Gamma_1(p)$ e $2\pi km$ è circa $4\mu m = 0,004mm$.

Un'osservazione

- Se la terra fosse perfettamente rotonda e avendo a disposizione strumenti estremamente precisi, uno potrebbe misurare il raggio della terra guardando semplicemente quanto la lunghezza di una circonferenza sulla terra di raggio r ARBITRARIO si scosta da $2\pi r$
- Fissando ad esempio $r = 1km$ Matematicamente ciò equivale a risolvere l'equazione $R_T \sin(1/R_T) = \mathrm{lungh}\Gamma_1(p)$
- In realtà per $r = 1km$ la differenza tra la lunghezza di $\Gamma_1(p)$ e $2\pi km$ è circa $4\mu m = 0,004mm$.

Un'osservazione

- Se la terra fosse perfettamente rotonda e avendo a disposizione strumenti estremamente precisi, uno potrebbe misurare il raggio della terra guardando semplicemente quanto la lunghezza di una circonferenza sulla terra di raggio r ARBITRARIO si scosta da $2\pi r$
- Fissando ad esempio $r = 1km$ Matematicamente ciò equivale a risolvere l'equazione $R_T \sin(1/R_T) = \mathrm{lungh}\Gamma_1(p)$
- In realtà per $r = 1km$ la differenza tra la lunghezza di $\Gamma_1(p)$ e $2\pi km$ è circa $4\mu m = 0,004mm$.

Che cos'è la curvatura di una superficie

- La curvatura di una superficie in un punto è la misura di quanto la lunghezza delle circonferenze di raggio r sulla superficie si discostano da $2\pi r$ per r piccoli.
- In generale se la curvatura è positiva allora le circonferenze sulla superficie hanno lunghezza minore di $2\pi r$ mentre se la curvatura è negativa la lunghezza dellle circonferenze è maggiore di $2\pi r$.
- Se una regione intorno ad un punto p è sviluppabile allora la curvatura è zero nel punto p.

Esempio di una superficie a curvatura negativa

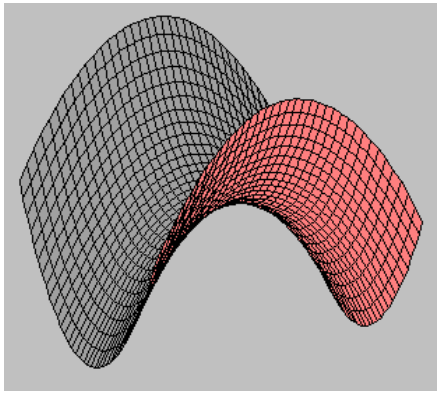
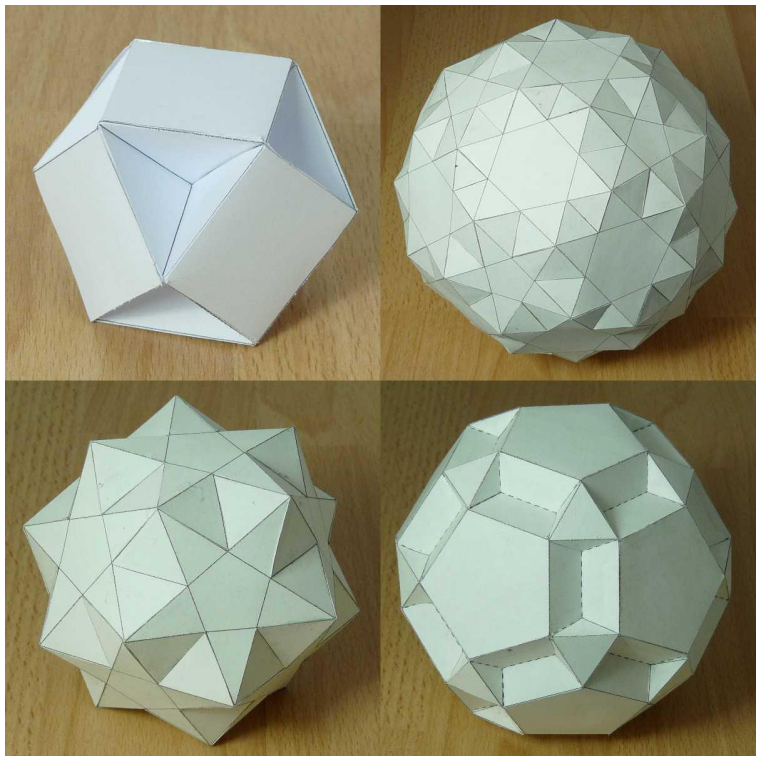


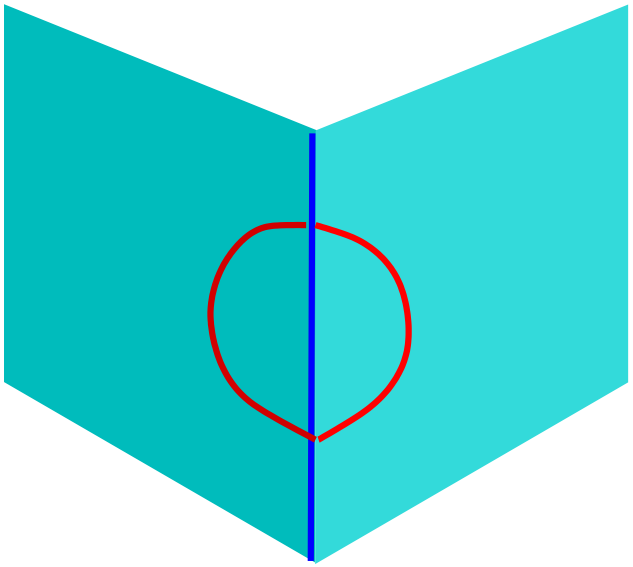
Figure : La sella è un esempio di superficie a curvatura negativa

Il caso dei poliedri

Un poliedro è una superficie ottenuta attaccando lungo i lati poligoni piani.

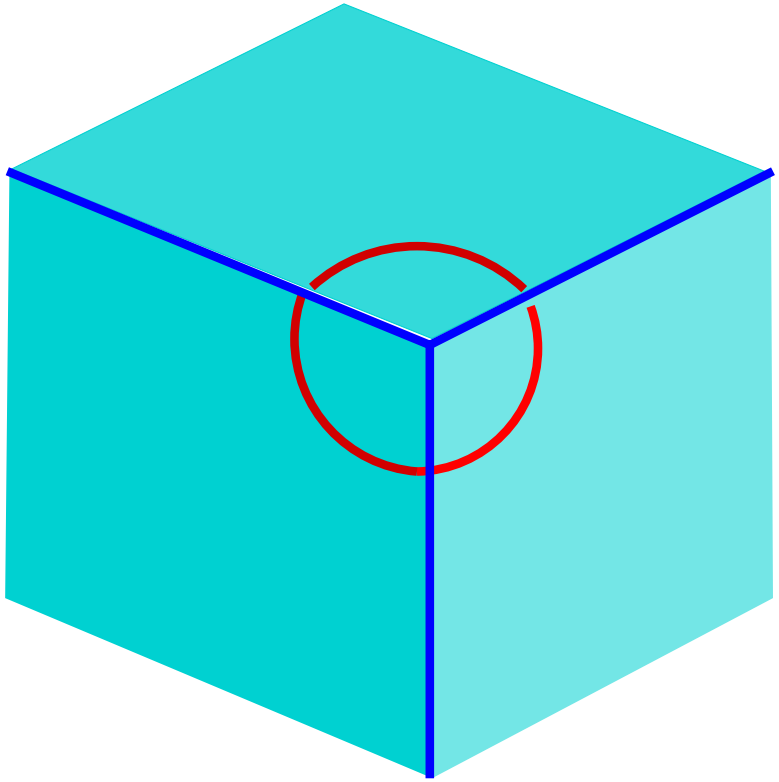


La geometria vicino ai lati di un poliedro



Se p è su un lato di un poliedro e r è piccolo allora $\Gamma_r(p)$ è l'unione di due semicirconferenze piane, ciascuna su uno delle due facce che incidono il lato.

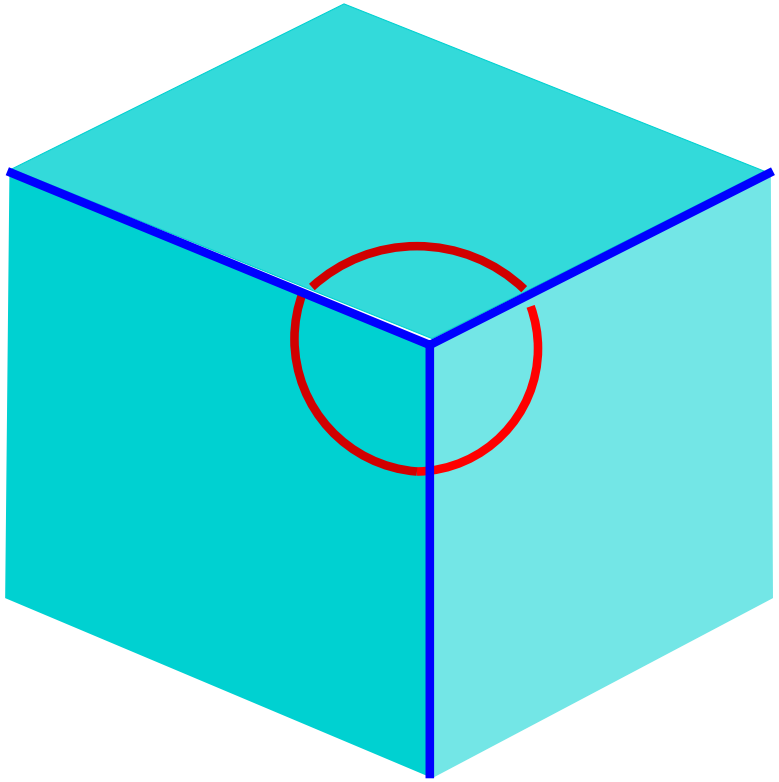
La geometria vicino ad un vertice



Se v è un vertice allora $\Gamma_r(p)$ è l'unione di tanti settori circolari di raggio r, ciascuno contenuto in una faccia che incide su p. Se $f_1, \ldots, f_k$ sono le facce che insistono su p e θ_i è l'angolo che il vertice p forma sulla faccia f_i si ha

$$\mathrm{lungh}(\Gamma_r(p)) = \theta_1 r + \theta_2 r + \ldots + \theta_k r = (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k) r$$

La geometria vicino ad un vertice



Se v è un vertice allora $\Gamma_r(p)$ è l'unione di tanti settori circolari di raggio r, ciascuno contenuto in una faccia che incide su p. Se $f_1, \ldots, f_k$ sono le facce che insistono su p e θ_i è l'angolo che il vertice p forma sulla faccia f_i si ha

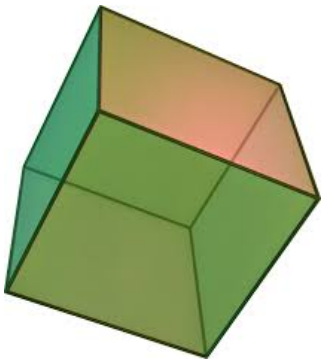
$$\mathrm{lungh}(\Gamma_r(p)) = \theta_1 r + \theta_2 r + \ldots + \theta_k r = (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k) r$$

La curvatura nel vertice di un poliedro

$$K_v = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k) \ .$$

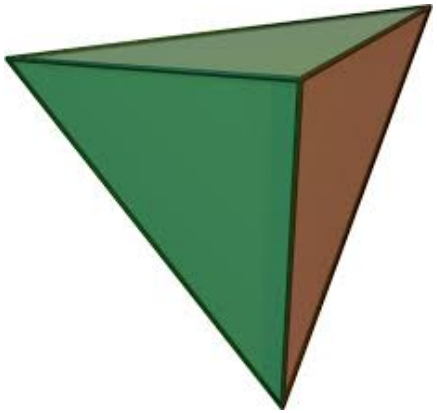
Esempi: cubo

Tutti i vertici hanno curvatura $2\pi - 3 \cdot (\pi/2) = \pi/2$.



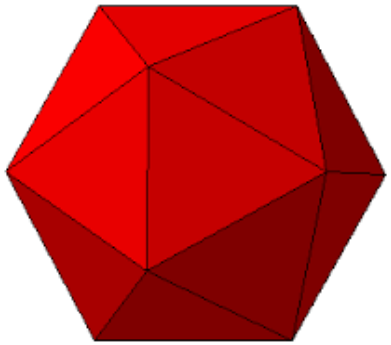
Esempi: tetraedro regolare

Tutti i vertici hanno curvatura $2\pi - 3 \cdot (\pi/3) = \pi$.



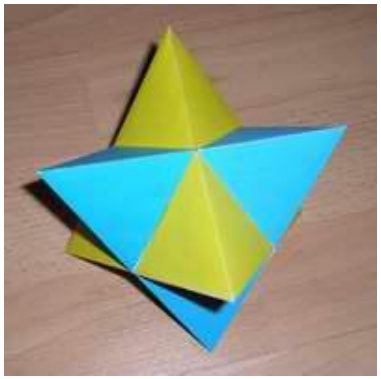
Esempi: icosaedro

Tutti i vertici hanno curvatura $2\pi - 5\pi/3 = \pi/3$



Esempi: Stella octangula

8 vertici hanno curvatura π e 6 vertici hanno curvatura $2\pi - 8\pi/3 = -2/3\pi$

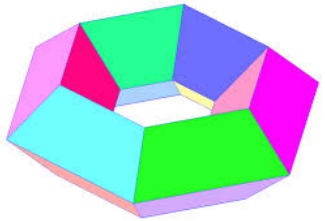


La curvatura totale

La curvatura totale di un poliedro è la somma algebrica delle curvature dei suoi vertici.
Esempi:

- CUBO: 8 vertici con curvatura $\pi/2 \Rightarrow K_{tot} = 4\pi$
- TETRAEDRO: 4 vertici con curvatura $\pi \Rightarrow K_{tot} = 4\pi$
- ICOSAEDRO: 12 vertici con curvatura $\pi/3 \Rightarrow K_{tot} = 4\pi$
- STELLA OCTANGULA: 8 vertici con curvatura π e 6 con curvatura $-2/3\pi \Rightarrow K_{tot} = 8\pi + 6 \cdot (-2/3)\pi = 4\pi$

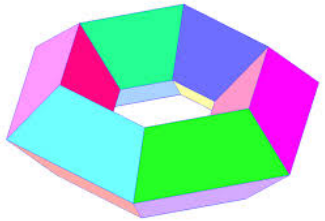
Un poliedro con un buco



Questo poliedro ha 24 vertici, 24 facce (trapezi), 48 lati.

- K_{tot} è somma di 24 termini: ogni termine è della forma $2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$.
- $K_{tot} = 2\pi \cdot 24 -$ (somma di tutti gli angoli di tutte le facce).
- $K_{tot} = 2\pi \cdot 24 - 2\pi \cdot 24 = 0$.

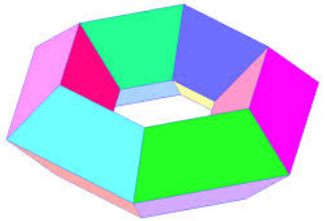
Un poliedro con un buco



Questo poliedro ha 24 vertici, 24 facce (trapezi), 48 lati.

- K_{tot} è somma di 24 termini: ogni termine è della forma $2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$.
- $K_{tot} = 2\pi \cdot 24 -$ (somma di tutti gli angoli di tutte le facce).
- $K_{tot} = 2\pi \cdot 24 - 2\pi \cdot 24 = 0$.

Un poliedro con un buco



Questo poliedro ha 24 vertici, 24 facce (trapezi), 48 lati.

- K_{tot} è somma di 24 termini: ogni termine è della forma $2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$.
- $K_{tot} = 2\pi \cdot 24 -$ (somma di tutti gli angoli di tutte le facce).
- $K_{tot} = 2\pi \cdot 24 - 2\pi \cdot 24 = 0$.

La formula di Gauss Bonnet per i poliedri

Sia P un poledro con g buchi allora:

$$K_{tot} = 4\pi(1 - g)$$

Dimostrazione nel caso $g = 0$

Assumiamo che tutte le facce di P siano triangolari. Indichiamo con f il numero di facce, v il numero di vertici e e il numero di lati.

- K_{tot} è la somma di v addendi. Ogni addendo è della forma $2\pi - (\theta_1 + \ldots + \theta_k)$
- $K_{tot} = 2\pi v -$(somma di tutti gli angoli)
- $K_{tot} = 2\pi v - \pi f$.
- Ogni faccia contiene 3 lati e ogni lato incide esattamente su due facce: $3f = 2l$ ovvero $f = 2l - 2f$.
- $K_{tot} = 2\pi v - 2\pi(l - f) = 2\pi(v - l + f) = 4\pi$.

Dimostrazione nel caso $g = 0$

Assumiamo che tutte le facce di P siano triangolari. Indichiamo con f il numero di facce, v il numero di vertici e e il numero di lati.

- K_{tot} è la somma di v addendi. Ogni addendo è della forma $2\pi - (\theta_1 + \ldots + \theta_k)$
- $K_{tot} = 2\pi v -$(somma di tutti gli angoli)
- $K_{tot} = 2\pi v - \pi f$.
- Ogni faccia contiene 3 lati e ogni lato incide esattamente su due facce: $3f = 2l$ ovvero $f = 2l - 2f$.
- $K_{tot} = 2\pi v - 2\pi(l - f) = 2\pi(v - l + f) = 4\pi$.

Dimostrazione nel caso $g = 0$

Assumiamo che tutte le facce di P siano triangolari. Indichiamo con f il numero di facce, v il numero di vertici e e il numero di lati.

- K_{tot} è la somma di v addendi. Ogni addendo è della forma $2\pi - (\theta_1 + \ldots + \theta_k)$
- $K_{tot} = 2\pi v -$(somma di tutti gli angoli)
- $K_{tot} = 2\pi v - \pi f$.
- Ogni faccia contiene 3 lati e ogni lato incide esattamente su due facce: $3f = 2l$ ovvero $f = 2l - 2f$.
- $K_{tot} = 2\pi v - 2\pi(l - f) = 2\pi(v - l + f) = 4\pi$.

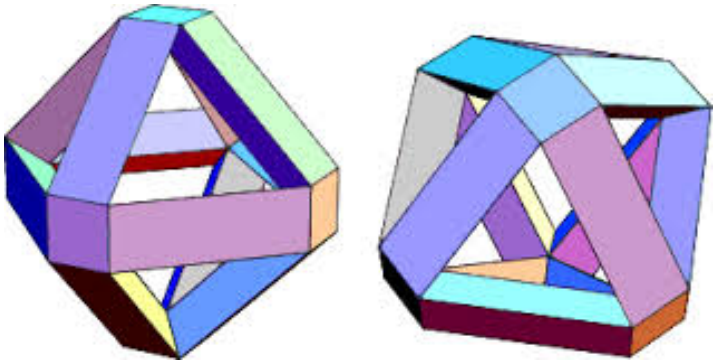
Dimostrazione nel caso $g = 0$

Assumiamo che tutte le facce di P siano triangolari. Indichiamo con f il numero di facce, v il numero di vertici e e il numero di lati.

- K_{tot} è la somma di v addendi. Ogni addendo è della forma $2\pi - (\theta_1 + \ldots + \theta_k)$
- $K_{tot} = 2\pi v -$(somma di tutti gli angoli)
- $K_{tot} = 2\pi v - \pi f$.
- Ogni faccia contiene 3 lati e ogni lato incide esattamente su due facce: $3f = 2l$ ovvero $f = 2l - 2f$.
- $K_{tot} = 2\pi v - 2\pi(l - f) = 2\pi(v - l + f) = 4\pi$.

Dimostrazione nel caso $g = 0$

Assumiamo che tutte le facce di P siano triangolari. Indichiamo con f il numero di facce, v il numero di vertici e e il numero di lati.

- K_{tot} è la somma di v addendi. Ogni addendo è della forma $2\pi - (\theta_1 + \ldots + \theta_k)$
- $K_{tot} = 2\pi v -$(somma di tutti gli angoli)
- $K_{tot} = 2\pi v - \pi f$.
- Ogni faccia contiene 3 lati e ogni lato incide esattamente su due facce: $3f = 2l$ ovvero $f = 2l - 2f$.
- $K_{tot} = 2\pi v - 2\pi(l - f) = 2\pi(v - l + f) = 4\pi$.

quanti buchi ha questa superficie?